Tema 3

RELATIVIDAD: LA MISMA HISTORIA SEGÚN DISTINTOS PROTAGONISTAS

3.1 La historia

Un tren que mide 100 m circula a la increíble velocidad de $\sqrt{3}/2$ veces la velocidad de la luz. El tren pasa por una estación cuyo andén mide 50 m y posee pasos a nivel con barreras a ambos extremos. El jefe de estación, que se encuentra en el extremo del andén por el que entra el tren, hace subir la barrera que hay a su lado y hace bajar la barrera del otro extremo en el mismo instante en que la cola del tren pasa frente a él.

¿Corren algún peligro las personas que intenten cruzar la vía por los pasos a nivel mientras la barreras estén subidas? Obviamente, la conclusión no puede depender del observador ¿Cómo es la película de los acontecimientos según el jefe de estación? ¿Y según el maquinista del tren?

3.2 Análisis de los hechos: diagrama espacio-tiempo

3.2.1 Protagonistas: dos observadores inerciales

Sea $\mathcal{O}$ el jefe de estación, un observador fijo al extremo del andén, junto a la primera barrera.

Sea $\mathcal{O}'$ un viajero situado en la cola del tren. Sus medidas de longitudes e intervalos de tiempo serán las mismas que las de cualquier otro observador en el tren, por ejemplo el maquinista. Hemos elegido al viajero de cola porque tomaremos el origen de tiempos y distancias coincidente con el momento en que la cola del tren pasa frente al jefe de estación.

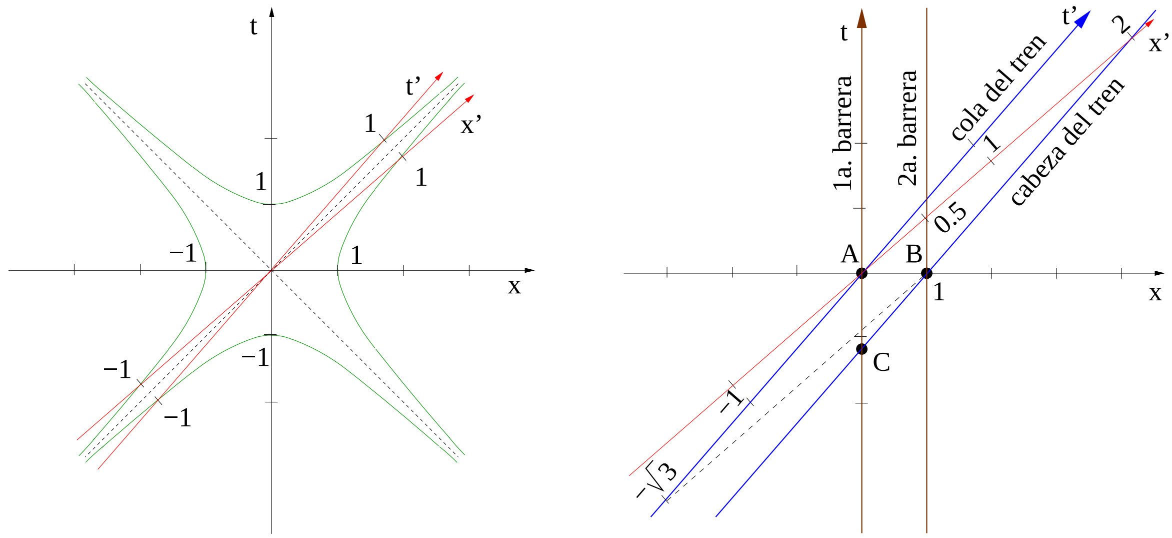


Figura 3.1: Diagrama espacio-tiempo dibujado por el jefe de estación. Escala 1:50 m.

3.2.2 Los puntos de vista: sistemas de referencia espacio-tiempo

En la Fig. 3.1 hemos dibujado los ejes espaciotemporales de ambos observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$. Ya conocemos su significado. El eje t forma un ángulo $\phi \approx 41^\circ$ con el eje t', el mismo que forman los ejes x' y x, pues $\tan\phi = v = \sqrt{3}/2$. Recordemos que tomamos siempre $c = 1$. Los dos sistemas de referencia nos proporcionan visiones distintas, la de cada observador, de los mismos hechos. Las coordenadas de los mismos sucesos serán diferentes para cada observador, estando relacionadas mediante las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) \\ x' &= \gamma(x - vt), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 2, \end{aligned}$$

que no necesitaremos utilizar, pues las leeremos directamente en el diagrama espacio-tiempo.

3.2.3 Distintas varas de medir: calibrado de los ejes

A continuación hemos de calibrar los ejes. Recordemos que la separación entre dos marcas consecutivas de los ejes (distancia o tiempo unidad) no miden lo mismo para cada observador (aunque para ambos expresen una *unidad*).

Como ya sabemos, hay que trazar las hipérbolas $t^2 - x^2 = \pm 1$. Los puntos de corte con los respectivos ejes determinan las distancias y tiempos unidad. Esto se hace gráficamente, sin necesidad de realizar ningún cálculo. Se obtiene fácilmente que las unidades que usa $\mathcal{O}'$ son, en este caso, $\sqrt{7}$ veces las de $\mathcal{O}$.

3.2.4 Los hechos: líneas de universo

Dibujamos también las líneas de universo de los objetos más relevantes que intervienen en nuestra historia.

Las barreras se representan mediante líneas verticales paralelas al eje t, que cortan al eje x en $x = 0$ (primera barrera) y en $x = 50$ m (segunda barrera).

La cola del tren es una línea recta que coincide con el eje t' (recta de ecuación $t = \frac{1}{v}x$) y la cabeza del tren es una paralela a la anterior que pasa por el punto $(x = 50\text{ m}, t = 0)$.

3.2.5 Momentos clave: sucesos relevantes

	Para $\mathcal{O}$: (x, t)	Para $\mathcal{O}'$: (x', t')
Suceso A: La cola llega a la primera barrera	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Suceso B: La cabeza llega a la segunda barrera	$(50\text{ m}, 0)$	$(100\text{ m}, -50\sqrt{3}\text{ m})$
Suceso C: La cabeza llega a la primera barrera	$(0, -100/\sqrt{3}\text{ m})$	$(100\text{ m}, -200/\sqrt{3}\text{ m})$

Table 3.1: Sucesos más relevantes.

Señalemos ahora tres sucesos importantes en nuestra historia (Tabla 3.1).

Suceso A: Se eleva la primera barrera y la cola del tren pasa frente al jefe de estación. Lo hemos tomado como origen de distancias y tiempos tanto para $\mathcal{O}$ como para $\mathcal{O}'$. Sus coordenadas son $(x_A = 0, t_A = 0)$ o bien $(x'_A = 0, t'_A = 0)$.

Suceso B: Se baja la segunda barrera. Esto ocurre, para $\mathcal{O}$ en el mismo instante en que se eleva la primera y en el otro extremo del andén. Por tanto, sus coordenadas son $(x_B = 50\text{ m}, t_B = 0)$. Es inmediato determinar gráficamente que las coordenadas de este suceso para el observador $\mathcal{O}'$ son $(x'_B = 100\text{ m}, t'_B = -50\sqrt{3}\text{ m})$.

Suceso C: La cabeza del tren alcanza la primera barrera. Este suceso ocurre antes que los otros dos para cualquier observador.

3.2.6 Longitudes

Cada observador mide sus longitudes comparando las coordenadas espaciales de dos sucesos simultáneos: los extremos del objeto a medir *en el mismo instante de tiempo*. Veamos entonces cuál es la longitud del tren y del andén según cada uno.

Para un observador $\mathcal{O}$ en la estación, el andén siempre mide 50 m (diferencia entre las coordenadas espaciales x de las líneas de universo de las dos barreras en cualquier instante común de tiempos t) y el tren siempre mide 50 m (diferencia entre la coordenada espacial x

de la línea de universo de la cabeza del tren menos la x de la línea de universo de cola, en cualquier instante común de tiempos t).

Para un observador $\mathcal{O}'$ en el tren, el andén siempre mide 25 m (diferencia entre las coordenadas espaciales x' de las líneas de universo de las dos barreras en cualquier instante común de tiempos t') y el tren siempre mide 100 m (diferencia entre la coordenada espacial x' de la línea de universo de la cabeza del tren menos la x' de la línea de universo de cola, en cualquier instante común de tiempos t').

3.2.7 Secuencia temporal

Para un observador $\mathcal{O}$ en la estación, los sucesos A y B son simultáneos: la primera barrera sube cuando la segunda barrera baja. La cola del tren está en $x = 0$ y la cabeza en $x = 50$ m en ese instante.

Para un observador $\mathcal{O}'$ en el tren, el suceso B es anterior al suceso A: la segunda barrera baja $50\sqrt{3}$ m antes de que suba la primera barrera. Nótese que en ese instante en que baja la segunda barrera, la primera barrera está en $x' = 75$ m (un cuarto del tren ha penetrado ya en la estación) y la segunda en $x' = 100$ m (justo a la altura de la cabeza del tren).

3.2.8 Tiempo que el tren tarda en cruzar la estación

Para un observador $\mathcal{O}$ en la estación, el tren tarda $\Delta t = t_B - t_C = 100/\sqrt{3}$ m en cruzar la estación. Esto es lógico porque para él el andén mide $l = 50$ m y el tren pasa a $v = \sqrt{3}/2$ y por tanto $\Delta t = l/v$.

Para un observador $\mathcal{O}'$ en el tren, el tren tarda $\Delta t' = t'_B - t'_C = 50/\sqrt{3}$ m en cruzar la estación. Esto también es lógico porque para él el andén mide $l' = 25$ m y por tanto $\Delta t' = l'/v$. Nótese que debido a la contracción de Lorentz, $l' = l/\gamma \Rightarrow \Delta t' = \Delta t/\gamma$.

3.3 Versiones de lo ocurrido

Véase la Figurea 3.2.

3.3.1 La película según el jefe de estación

Para el jefe de estación, o cualquier persona situada en reposo respecto al andén, el tren que se acerca mide 50 m, lo mismo que mide el andén.

Para cualquier observador fijo respecto a la estación, la subida de la barrera del extremo por el que entra el tren, la bajada de la barrera opuesta y el paso de la cola del tren frente al

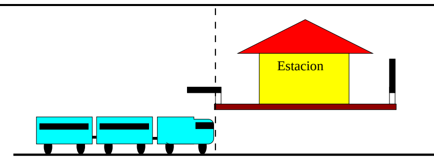
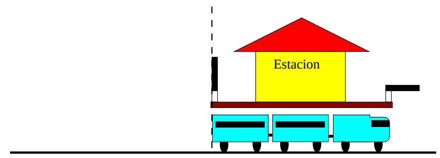
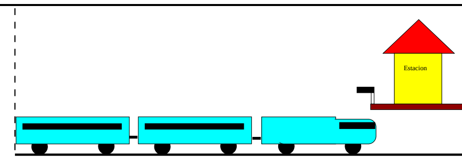
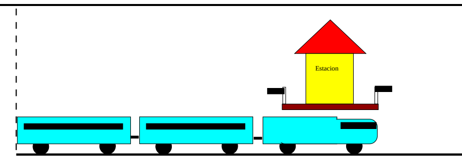
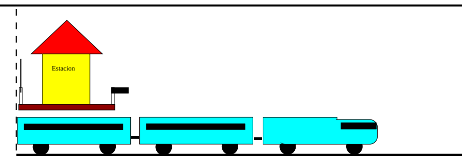
Según el jefe de estación	
Suceso C: $t = -100/\sqrt{3}$ m, $x = -50$ m	
Suceso A: $t = 0$, $x = 0$ (simultáneos) Suceso B: $t = 0$, $x = 50$ m	
Según el maquinista	
Suceso C: $t' = -200/\sqrt{3}$ m, $x' = 100$ m	
Suceso B: $t' = -150/\sqrt{3}$ m, $x' = 100$ m	
Suceso A: $t' = 0$, $x' = 0$	

Figura 3.2: Varios "fotogramas" de la película de los hechos según cada observador.

jefe de estación son sucesos simultáneos.[1]

Por tanto, la barrera opuesta es bajada justo en el momento en que la cabeza del tren pasa frente a ella, con lo que *no habrá ningún peligro para los transeúntes*.

3.3.2 La película según el maquinista del tren

Para el maquinista del tren, o cualquier viajero en el mismo, el tren mide 100 m, mientras que el andén mide sólo 25 m.

Para cualquier observador en el tren, la subida de una barrera y la bajada de la otra no son sucesos simultáneos, sino que la barrera de cabeza se baja $50\sqrt{3}$ m (esto es 2.89×10^{-7} s) antes de que se suba la barrera de cola al pasar ésta frente al jefe estación.

[1]Todos saben descontar el tiempo que la luz tarda en recorrer la distancia desde las barreras hasta donde se encuentran y estarán de acuerdo en que son sucesos que han ocurrido a la vez en su sistema común de tiempos.

Por tanto, según cualquier viajero, el tren se aproxima a una estación con un andén mucho más corto que el mismo tren. Antes de que la cola del tren llegue a la primera barrera, la segunda barrera se baja. ¡Menos mal!, debe pensar el viajero, porque como el tren es más largo que el andén, la cabeza ya debe estar a la altura de la segunda barrera, y así es. Cuando la cola del tren llega a la altura de la primera barrera, ésta se sube. La otra ya llevaba un tiempo bajada, con lo que *no habrá ningún peligro para los transeúntes*.

3.4 Conclusiones

La longitud propia del tren es 100 m y la del andén es 50 m (éstos son los valores que mediría cualquier observador en resposo respecto a ellos).

Resulta que para el jefe de estación el tren mide la mitad de su longitud propia y el maquinista mide también la mitad de la longitud propia del andén. Éste es el efecto de la *contracción de Lorentz*. En este caso el factor de contracción es $\gamma = 2$.

Diferentes observadores inerciales *discrepan sobre la película de lo sucedido y sobre las medidas que hacen, pero están de acuerdo en lo fundamental*: la primera barrera sube cuando la cola del tren pasa frente al jefe de estación que hay junto a ella y la segunda barrera se baja cuando la cabeza del tren llega a su altura, y por tanto no hay peligro para los que vayan a cruzar los pasos a nivel.

Todo esto no nos extrañaría en absoluto si nuestra *intuición relativista* estuviera desarrollada. No lo está porque la velocidad de la luz es muy grande y no hay trenes circulando a velocidades comparables a la de la luz. En un mundo donde c fuese más pequeña estaríamos acostumbrados a estas situaciones.

Ejercicio

3.1 Un pistolero dispara simultáneamente sus dos revólveres, con las manos separadas 80 cm, contra un tren que pasa frente a él a una velocidad de $0.6c$.

(a) ¿Cuál es la distancia entre los revólveres según los viajeros del tren?

(b) ¿Cuál es la separación entre los agujeros de bala en los laterales del vagón?

Haz un diagrama espacio-tiempo y discute los resultados.