Tema 2

Espacio, tiempo y espaciotiempo: diagramas de Minkowski

2.1 Introducción: los postulados de la relatividad especial

Primer postulado (principio de relatividad)
Las leyes de la física son las mismas para cualquier observador inercial (no acelerado).[a]

Esto *no significa* que un observador subido a un vagón con velocidad uniforme y otro observador en el andén de una estación obtengan *los mismos resultados numéricos* para un fenómeno determinado: por ejemplo, ambos observadores ven trayectorias diferentes para una pelota que el primero deje caer libremente, pero en los dos casos las trayectorias se describen usando las *mismas leyes* de Newton.

Este postulado pone de manifiesto la *imposibilidad de distinguir estados de reposo o movimiento absolutos* para un observador inercial: el observador en el tren no puede distinguir si se está moviendo a no ser que pueda observar directamente la *velocidad relativa* respecto al andén (descorriendo la cortina de la ventanilla y mirando a través de ella).

Este principio no sólo se refiere a las leyes que describen objetos móviles (para ellos es fácil de demostrar), sino a *todas* las leyes de la física, lo que le convierte en un postulado (no demostrable) que aún no ha sido rebatido experimentalmente.

Einstein pone así *fin a la idea del éter luminífero*. Si existiera, las ecuaciones de Maxwell (leyes de la física que predicen la velocidad de la luz y que no necesitan de ninguna especificación de la velocidad del observador) deberían modificarse en función del estado de movimiento del observador respecto al éter.

[a]Se le llama relatividad especial o restringida pues se aplica sólo a observadores no acelerados. La relatividad general, que Einstein desarrolló posteriormente, incluye también a observadores acelerados. A diferencia de la primera, que fue publicada en un sólo trabajo en *Annalen der Physik* en 1905, la relatividad general se fue fraguando en varios años entre 1907 y 1915.

Segundo postulado (constancia o universalidad de la velocidad de la luz)
La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, independientemente de la velocidad de la fuente de luz respecto al observador.

El éxito reconocido de las ecuaciones de Maxwell en la descripción de una gran variedad de fenómenos electromagnéticos sugirió la validez de este postulado. Sin embargo, como ya hemos visto, la primera confirmación experimental *directa* de este postulado no llegó hasta 1964 cuando se observó que los fotones emitidos por un pión a gran velocidad no viajaban a distinta velocidad que los emitidos por una fuente en reposo.

Este postulado es el responsable de que sea tan *difícil conciliar* la teoría de la relatividad con la visión que tenemos del mundo a través de nuestro *sentido común*.

2.2 La definición de tiempo

El trabajo de Einstein se basa en la definición clara y precisa de conceptos que nos pueden parecer simples y hasta pueriles. La idea es establecer el significado de conceptos básicos, como el tiempo o el espacio, de modo que sirvan como instrucciones para hacer medidas (*definiciones operacionales*). Persiguiendo esta idea hasta sus últimas consecuencias, Einstein consiguió remover los cimientos de la física newtoniana.

2.2.1 ¿Qué se entiende por medir el tiempo?

Definir el tiempo desde el punto de vista operacional es *medir* el tiempo. Un reloj no es más que un dispositivo que aprovecha algún fenómeno que se repite con regularidad. Lo importante para Einstein no es la precisión del reloj sino *cómo utilizamos los relojes*. Siempre que hablamos de tiempo nos referimos a *sucesos simultáneos*: por ejemplo, la llegada del tren y la posición de las manecillas del reloj. Sin embargo existe *ambigüedad* sobre la hora a la que ocurre un suceso debido a que la luz necesita cierto tiempo para informar a *observadores distantes*, que no están en el mismo lugar de los sucesos que están observando. Veremos que también hay problemas cuando se trata de *observadores móviles*.

2.2.2 El sistema común de tiempos: relojes sincronizados

Einstein buscó una definición operacional que permitiera asignar un tiempo único y bien determinado para un suceso. Veámoslo con un ejemplo típico.

Observadores distantes

Pablo y Alicia son dos observadores situados frente una vía de ferrocarril en los puntos A y B, respectivamente (Fig. 2.1). La hora de un suceso en A viene caracterizada por una lectura del reloj de Pablo que sea simultánea al suceso. Del mismo modo, el reloj de Alicia describe la hora de un suceso en B. Disponemos, por tanto, de dos definiciones de tiempo unívocas: la hora de Pablo y la hora de Alicia, para los sucesos que ocurran en A

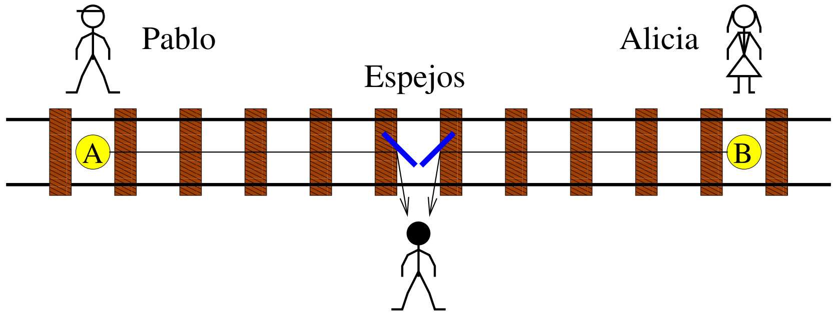

Figura 2.1: Pablo y Alicia acuerdan un sistema común de tiempos.

y B, respectivamente. ¿Podemos establecer un *sistema común de tiempos* para representar unívocamente las horas de los sucesos que ocurran en cualquier punto del espacio?

La clave está en *sincronizar los relojes* de todos los observadores situados en cualquier punto del espacio para que todos marquen la misma hora. Para sincronizar los relojes de Pablo y Alicia basta con medir la distancia entre ambos y situarse en el punto medio con dos espejos colocados según indica la Fig. 2.1 de modo que se pueda ver a la vez a ambos sin girar la cabeza. Supongamos que eres tú mismo el que se pone en el punto medio. Entonces, pides a Pablo y Alicia que disparen el flash de sus respectivas cámaras fotográficas a la hora en punto. Si ves desde el punto medio ambos flashes llegan desfasados entonces pides a uno de ellos que retrase o adelante su reloj según convenga. Así, les haces disparar sus flashes y reajustar sus relojes hasta que ambos flashes lleguen al punto medio simultáneamente. Entonces ambos relojes estarán sincronizados. Lo que hemos hecho con Pablo y Alicia lo podríamos repetir con tantos relojes y observadores en reposo como quisiéramos.

Ya podemos ponernos de acuerdo sobre la hora a la de un suceso: es la que marca *un reloj situado en el lugar en el que ocurre el suceso*. Nótese que este tiempo común (llamado *tiempo propio*) para todos los observadores en reposo entre sí, no es el que marca el reloj de un observador cualquiera que *ve* el suceso, pues la luz no llega instantáneamente a cada observador.

Observadores móviles

Si intentamos ahora sincronizar el tiempo común de los relojes fijos respecto a la vía con el de un observador (Gertrudis) que se desplaza a velocidad uniforme en un vagón (Fig. 2.2) *veremos que no es posible*.

Supongamos que Pablo y Gertrudis ya tienen sus relojes sincronizados y tú te encuentras en el punto medio como antes. Exactamente a la hora en punto Gertrudis pasa frente a ti. Un poco después te llegan dos flashes simultáneos procedentes de las cámaras de Pablo y Alicia, confirmando que aún están sincronizados. Sin embargo, Gertrudis no está de acuerdo: para ella ambos flashes no pueden ser simultáneos porque, antes de que los destellos hayan llegado hasta a ti, Gertrudis se ha acercado a Alicia alejándose de Pablo. Consecuentemente, el flash de Alicia le llega antes a Gertrudis que el flash de Pablo.

De este modo, sucesos simultáneos para observadores en reposo frente a la vía no lo

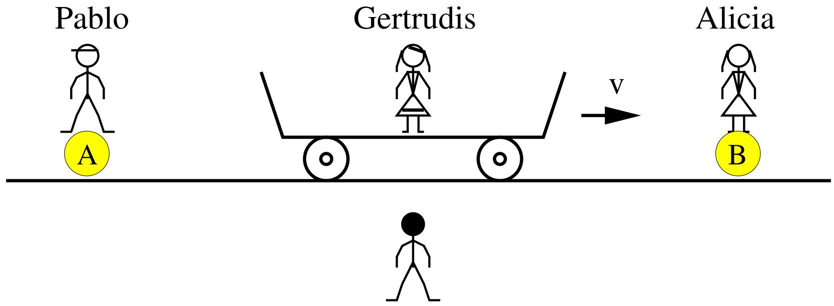

Figura 2.2: Gertrudis no está de acuerdo con el sistema común de tiempos de Pablo y Alicia.

son para Gertrudis (observador que se mueve respecto a la vía) y, por tanto, no pueden acordar un sistema común de tiempos. Sin embargo, Gertrudis puede establecer su *propio* sistema común de tiempos para emplearlo con todos los observadores que se encuentren en su vagón, en reposo respecto a ella.

2.2.3 La relatividad de las medidas del tiempo: dilatación temporal

Puesto que observadores en movimiento relativo no se pueden poner de acuerdo en un sistema común de tiempos, Einstein llegó a la revolucionaria conclusión de que *el tiempo para unos y otros no es el mismo*.

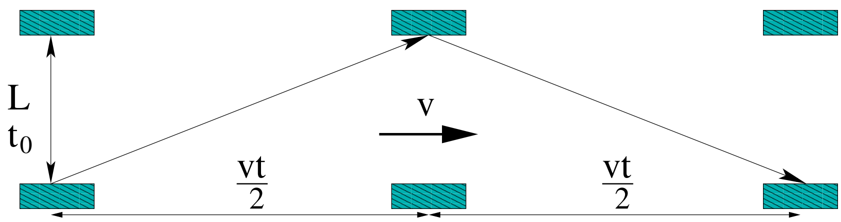

Figura 2.3: La luz reflejada en el techo del vagón constituye un reloj en movimiento.

Analicemos un experimento mental que ilustra esta conclusión de Einstein (Fig. 2.3). Un rayo de luz es emitido desde el suelo del vagón y devuelto al mismo reflejado por un espejo situado en el techo. Para Gertrudis el rayo recorre una distancia $2L$ en un tiempo t_0. Para un observador fijo respecto a la vía el rayo recorre una distancia mayor en un tiempo t. Un físico newtoniano tomaría "obviamente" $t_0 = t$ y por tanto esperaría que la velocidad de la luz medida por el observador fijo a la vía será mayor que la medida por Gertrudis. Esto es también lo que nos dice nuestra intuición. Sin embargo, *para Einstein ambas velocidades de la luz deben ser las mismas* lo que nos lleva a tener que aceptar que las respectivas *medidas del tiempo t_0* y *t no son las mismas*.[b] El reloj de Gertrudis parece ir más lento pues t_0 es menor que t o, lo que es lo mismo,

> *las medidas de tiempo que hace un obervador están dilatadas respecto a las que hace otro que se mueva uniformemente respecto a él.*

Estudiaremos la dilatación temporal con más detalle en un próximo tema.

[b]Podemos hacer fácilmente las cuentas: $c = \dfrac{2L}{t_0} = \dfrac{2\sqrt{L^2 + (vt/2)^2}}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

2.3 La definición de espacio

De nuevo haremos uso de una definición operacional: ¿cómo medimos el espacio?

2.3.1 ¿Qué se entiende por medir una longitud?

Si queremos medir la longitud de un bloque en reposo no tenemos ninguna dificultad: basta con alinear las marcas de una regla con los extremos del bloque. Aunque no compares a la vez ambos extremos con las marcas de la regla, sabes que la medida será la misma pues las marcas no se mueven respecto al bloque.

Pero si el bloque se mueve tenemos un problema: necesitamos conocer la posición de ambos extremos del bloque en el mismo instante. *Las medidas de longitud son, en último término, medidas de sucesos simultáneos*.

2.3.2 La relatividad de la medidas espaciales: contracción espacial

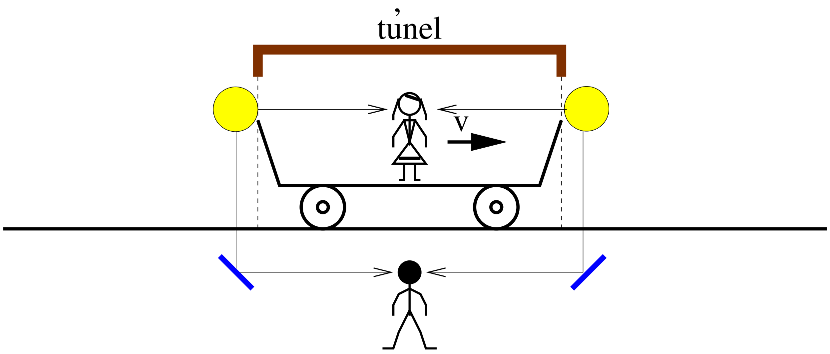

Figura 2.4: Gertrudis en su vagón atravesando el túnel.

Volvamos a nuestro ejemplo típico. Ahora el vagón de Gertrudis va a atravesar un túnel, cuya longitud medida cuidadosamente por un observador en reposo respecto a la vía es L (Fig. 2.4). Un observador fijo (tú mismo) se sitúa en el punto medio del túnel con un sistema de espejos que le permite ver los dos extremos del túnel sin girar la cabeza. En un momento dado, ves que la cola del vagón desaparece en el interior del túnel en el mismo instante en que la cabeza asoma por el otro extremo. Estos dos instantes de tiempo los señalizamos mediante dos destellos luminosos emitidos desde los extremos del túnel. Ambos te llegarán simultáneamente. Por tanto llegas a la conclusión de que el vagón *mide igual que el túnel*.

¿A qué conclusión llega Gertrudis? Ella también ve los destellos luminosos pero para ella no son simultáneos: verá primero el que proviene de la cabeza del vagón (que le informa de que la cabeza del vagón sale del túnel) y *después* el de la cola. Es decir, para ella, cuando la cabeza del tren sale del túnel, la cola aún no ha entrado en el túnel. En consecuencia, Gertrudis pensará que el vagón es *más largo que el túnel*. Por tanto, la longitud del vagón está contraída para ti (que lo mides en movimiento) respecto a la que mide Gertrudis (que lo mide en reposo). Las longitudes medidas en reposo se llaman *longitudes propias*. En consecuencia:

las medidas de longitud que hace un observador están contraídas respecto a las que hace otro que se mueva uniformemente respecto a él.

Estudiaremos la contracción espacial con más detalle en un próximo tema.

2.4 Resumen: las transformaciones de Lorentz

Hemos llegado a la conclusión de que observadores inerciales distintos obtendrán resultados distintos en sus medidas del espacio y del tiempo.

Las *transformaciones de Lorentz* son las ecuaciones que permiten relacionar las medidas que hace un observador inercial del espacio, x, y del tiempo, t, referentes a un suceso con las medidas que haría otro observador inercial, que se mueve a velocidad v respecto al primer observador, referentes al *mismo* suceso. Sus expresiones son

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \end{aligned} \quad \text{o bien} \quad \begin{aligned} ct &= \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right) \\ x &= \gamma\,(x' + vt') \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ es el factor de Lorentz. Nótese que si v es mucho menor que c entonces $\gamma \approx 1$ y recuperamos nuestra *intuición* (galileana) pues $t' \approx t$ y $x' \approx x - vt$.

Estas ecuaciones *resumen de forma cuantitativa la teoría de la relatividad de Einstein* que acabamos de exponer. Así en los ejemplos anteriores, t' sería el tiempo propio de Gertrudis (instante en que se produce el suceso según su sistema común de tiempos) que no sólo depende del tiempo propio del observador en reposo respecto a la vía, t, sino también de la localización del suceso respecto a ese observador, x. Del mismo modo, la localización del suceso según Gertrudis, x', está relacionada con t y x.

Las *otras dos direcciones espaciales*, y y z, que son *perpendiculares a la dirección del movimiento relativo* de los dos observadores inerciales, *no se transforman*:

$$y' = y \tag{2.2}$$
$$z' = z \tag{2.3}$$

y por ello, generalmente, no hablaremos de ellas. Nótese que siempre podemos elegir nuestros ejes de coordenadas para que el eje x coincida con la dirección de v.

2.5 El espaciotiempo: diagramas de Minkowski

El concepto unificado de *espaciotiempo*, introducido por H. Minkowski en 1908, es una *mera simplificación matemática*. El espacio y el tiempo son completamente diferentes, se miden de formas muy distintas (como hemos visto) y los percibimos también de distinto modo.

Ahora bien, en relatividad no se analizan las localizaciones de objetos en el espacio, sino *sucesos* que están localizados en el espacio y en el tiempo: para especificar un suceso hay que decir *dónde* (tres dimensiones espaciales) y *cuándo* (una dimensión más, el tiempo). Minkowski propuso concebir el mundo como una red espaciotemporal *tetradimensional*. Esta visión tiene dos ventajas:

Primero, nos lleva a una *resolución gráfica* muy sencilla y práctica *de las transformaciones de Lorentz*, haciendo uso de los *diagramas espacio-tiempo* o diagramas de Minkowski, que estudiaremos a continuación.

Además, los diagramas espacio-tiempo nos permiten *visualizar la película* completa de la evolución de un objeto en el espacio y el tiempo: su *línea de universo*.

2.5.1 Observador en reposo

En realidad nos referimos a un observador inercial, $\mathcal{O}$, cualquiera, ya que, según el principio de relatividad no existe un observador privilegiado. Lo llamamos así para especificar el observador que se halla en reposo respecto a la vía en los ejemplos anteriores. Nótese que *un observador no es más que un sistema de referencia*, unos ejes de coordenadas espaciotemporales.

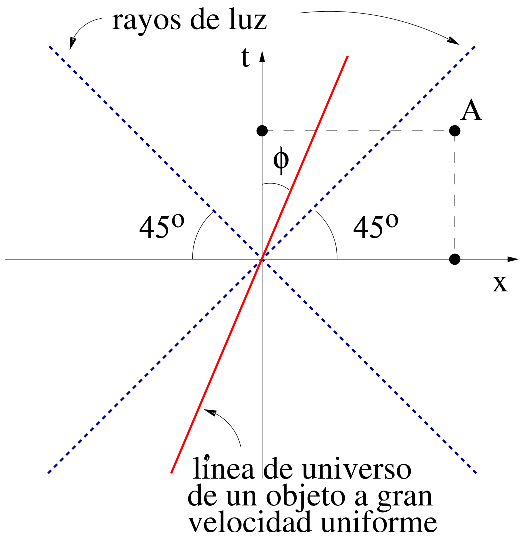

Figura 2.5: Diagrama espacio-tiempo para un observador $\mathcal{O}$.

Localizamos *un suceso* A mediante un punto cuyas coordenadas espacial, x, y temporal, t, se pueden leer sobre los ejes de coordenadas del diagrama espacio-tiempo (Fig. 2.5). La coordenada t indica el *tiempo propio* del suceso y la x es la *distancia medida desde el origen* que se toma como punto de referencia. Recuérdese que t no es la hora en la que $\mathcal{O}$ ve el suceso sino el tiempo medido en el sistema común de tiempos.

El *eje* x es el conjunto de *sucesos simultáneos* que ocurren a $t = 0$. Una paralela cualquiera al eje x ($t = T$) indica sucesos simultáneos que ocurren en otro instante de tiempo T.

El *eje* t es el conjunto de *sucesos que ocurren en el mismo lugar*, $x = 0$. Cada paralela al eje t ($x = X$) indica sucesos que ocurren en otro lugar X.

Elegiremos las escalas de modo que $c = 1$. De este modo, longitudes y tiempos tienen las mismas unidades (metros, por ejemplo). Así, $t = 1$ m es el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro según $\mathcal{O}$ (un *metro-luz*).

Los *rayos luminosos* (líneas de universo de la luz) se representan por líneas a 45°, pues para ellos $t = x$ ó $t = -x$ (según la luz viaje de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente), ya que hemos tomado $c = 1$.

La *línea de universo de un objeto* que se mueva con velocidad uniforme v es una línea recta ($t = \frac{1}{v}x$) que forma un ángulo $\phi = \arctan v$ con el eje t. El signo es positivo o negativo según se mueva de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente. Veremos que el ángulo ϕ en valor absoluto es siempre $|\phi| < 45°$. Si la línea de universo del objeto no es recta entonces el movimiento no es uniforme.

2.5.2 Observador en movimiento relativo: transformaciones de Lorentz

Hasta ahora hemos descrito las cosas tal y como las mediría un observador en reposo respecto a la vía. Veamos cómo dibujar el diagrama espacio-tiempo para otro observador como Gertrudis, que se mueve uniformemente en un vagón a gran velocidad, v, según el eje x. Seguimos tomando $c = 1$. Hacemos coincidir, por simplicidad, el origen de coordenadas de ambos obervadores.

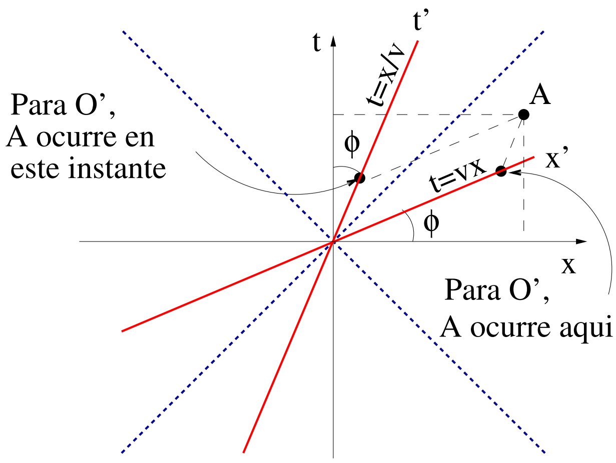

Figura 2.6: Diagrama espacio-tiempo para el observador móvil $\mathcal{O}'$.

El *eje* x' es el conjunto de sucesos simultáneos que ocurren a $t' = 0$, lo que según (2.1) es lo mismo que la recta $t = vx$. Por tanto, forma un águlo $\phi = \arctan v$ con el el eje x.

El *eje* t' es el conjunto de sucesos que ocurren en $x' = 0$, lo que según (2.1) es lo mismo que la recta $t = \frac{1}{v}x$. Por tanto, forma el mismo águlo $\phi = \arctan v$, esta vez, con el el eje t.

Las *coordenadas espaciotemporales de un suceso*, por ejemplo el suceso A de antes, se hallan trazando paralelas a los ejes x' y y', que ahora no serán perpendiculares entre sí (Fig. 2.6).

2.5.3 El intervalo y la calibración de los ejes

No todo es relativo al observador. Ya hemos visto que la velocidad de la luz es la misma para cualquier observador. Además hay otra cantidad muy importante que también es *invariante*. Se trata del *intervalo* entre dos sucesos, que cualquier observador puede determinar fácilmente a partir de sus medidas de la localización en el espacio y en el tiempo de dos sucesos cualesquiera. Supongamos, por simplicidad, que uno de los dos sucesos es el origen espaciotemporal O, que lo tomamos coincidente para dos observadores inerciales, $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, y sean (x, t) y (x', t') las coordenadas de otro suceso A, según cada observador. Entonces de define el intervalo como

$$\text{intervalo} \equiv \Delta s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2. \tag{2.4}$$

Es fácil comprobar usando las transformaciones de Lorentz (2.1) que esta igualdad se cumple.

El intervalo nos ayuda a *calibrar los ejes*: las *distancias entre las marcas de referencia de los ejes de cada observador no miden lo mismo* (véase la Fig. 2.7):

Para encontrar la relación entre las marcas de los ejes temporales (recordemos que tomamos $c = 1$) basta mirar dónde cortan las hipérbolas $t^2 - x^2 = 1$ al eje t', dado por $t = \frac{1}{v}x$.

Para los ejes espaciales hay que mirar dónde cortan las hipérbolas $t^2 - x^2 = -1$ al eje x', dado por $t = vx$.

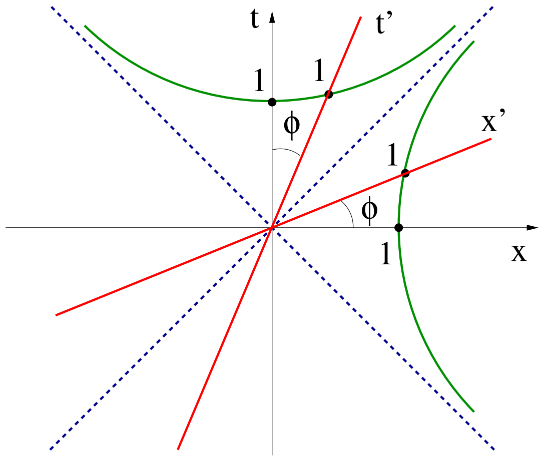

Figura 2.7: Calibrado de los ejes del observador $\mathcal{O}'$.

2.5.4 Orden temporal: pasado, presente, futuro y causalidad

Haciendo uso de los diagramas espacio-tiempo, es fácil ver que sucesos simultáneos para un observador no lo son para otro. Por ejemplo los sucesos O y C de la Fig.2.8. Ésta es la relatividad de la simultaneidad de la que ya hemos hablado.

Ahora hay algo que nos preocupa. Hay sucesos que siguen el mismo orden temporal para dos observadores inerciales mientras que otros cambian de orden (Fig.2.8). Sin embargo, esperamos que *algunos sucesos deben guardar el orden temporal para cualquier observador inercial*. Nos referimos a los que están relacionados de forma causal: de lo contrario viviríamos en un mundo en el que los efectos podrían preceder a sus causas dependiendo de la velocidad relativa con la que los observáramos. La región de sucesos en el espaciotiempo conectados causalmente con un suceso O en el origen se muestra en

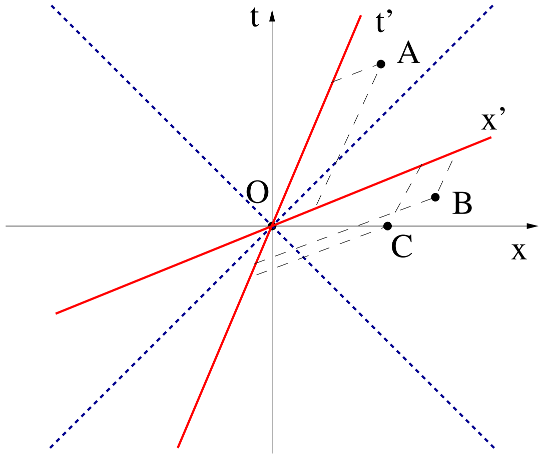

Figura 2.8: Los sucesos O y C son simultáneos para $\mathcal{O}$ pero no para $\mathcal{O}'$. El suceso A ocurre después que el O, tanto para $\mathcal{O}$ como para $\mathcal{O}'$. El suceso B ocurre después que el O para $\mathcal{O}$ pero antes que el O para $\mathcal{O}'$.

la Fig. 2.9. Para demostrarlo basta con dibujar los ejes de un observador inercial que se mueve con velocidad arbitraria, pero *nunca superior a la de la luz*. Entonces es claro que sucesos situados por encima de líneas a 45° guardan siempre el mismo orden temporal: se trata del *cono de luz* de un observador situado en el origen de coordenadas. Nótese que:

– Los sucesos conectados causalmente están separados por un *intervalo positivo* (según nuestra definición (2.4)), que llamamos *tipo temporal*. No hay ningún observador inercial que pueda medir sucesos separados temporalmente como sucesos simultáneos. El orden temporal de dos sucesos es el mismo para cualquier observador inercial.

– Los sucesos no conectados causalmente están separados por un *intervalo negativo*, que llamamos *tipo espacial*. Siempre es posible encontrar un observador inercial que pueda medir sucesos separados espacialmente como sucesos simultáneos. El orden temporal de dos sucesos depende del obervador.

– Los sucesos conectados por un rayo de luz están separados por un *intervalo nulo* o *tipo luz*.

Digamos finalmente que Einstein cambió radicalmente nuestro concepto de pasado, presente y futuro absolutos, introduciendo una nueva subdivisión: para un suceso O existe el *pasado* (parte inferior del cono de luz), el *presente* (vértice del cono de luz), el *futuro* (parte superior del cono de luz) y el *todo lo demás* (exterior al cono de luz). Ésta última subdivisión contiene a los sucesos que jamás pueden influir en O y también aquéllos en los que O tampoco influirá.

Ejercicios

2.1 Utilizando los diagramas de Minkowski, ilustra la dilatación de los intervalos de tiempo y la contracción de las longitudes.

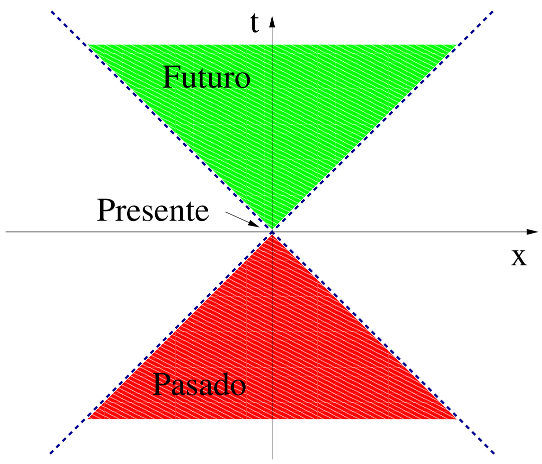

Figura 2.9: Región de sucesos conectados causalmente con el origen.