

Tema 12

Cosmología

12.1 Introducción

Poco después de llegar a la forma final de las ecuaciones de campo, Einstein se puso a investigar las implicaciones que tenían sobre la estructura del universo. En 1917 publicó un trabajo en el que presentaba un modelo simple de un universo cerrado, esférico y estático, para lo que hubo de introducir la constante cosmológica que ya hemos mencionado.

12.2 Modelos de universo

El punto de partida en general es la métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (12.1)$$

que supone homogeneidad e isotropía del universo a gran escala (*principio cosmológico*): un espaciotiempo 4D que contiene un subespacio 3D máximamente simétrico. Sólo dos cantidades especifican la métrica en estas circunstancias: $R(t)$, que es el *factor cosmológico de escala* (tiene dimensiones de longitud y se relaciona con el tamaño del universo)^a y k , que es el *parámetro de curvatura* (sólo puede tomar tres valores, gracias al rescalamiento de la coordenada radial, $k = +1, -1, \text{ ó } 0$, correspondiendo a una geometría cerrada, abierta o plana, respectivamente). Se suele también definir el factor de escala adimensional $a(t) = R(t)/R_0$, donde $R_0 = R(t_0)$ es el factor de escala en la época actual.

Sustituyendo la métrica de Robertson-Walker en las ecuaciones de Einstein,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (12.2)$$

^aEl parámetro de desplazamiento al rojo z , debido a la expansión de Hubble, está relacionado con el factor de escala ahora, $R_0 = R(t_0)$, y en el momento de la emisión de la luz por parte de la fuente, $R = R(t)$: mediante:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} = H \frac{\delta r}{c} \equiv \frac{\dot{R}}{R} \delta t = \frac{\delta R}{R} = \frac{R_0 - R}{R} \Rightarrow 1 + z = \frac{R_0}{R}, \text{ definiendo } H = \dot{R}/R,$$

que resulta valer más allá de la aproximación no relativista anterior. El punto indica derivada respecto a t .

y asumiendo que la forma del tensor energía-impulso es la correspondiente a un *fluido perfecto* de densidad total ρ y presión p , es decir $T^{\mu\nu} = \text{diag}(p, \rho, \rho, \rho)$, se obtienen las ecuaciones cosmológicas (Friedmann-LeMaître), que dictan la evolución del universo:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (12.3)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p/c^2). \quad (12.4)$$

(Nótese que una presión positiva decelera la expansión, igual que la densidad.)

A partir de estas dos ecuaciones se deduce una tercera:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p/c^2),$$

que nos da ρ en función de a suponiendo que el universo es un fluido perfecto con *una sola componente* con ecuación de estado $p = \omega \rho c^2$, pues entonces

$$\dot{\rho} = -3(1 + \omega)\rho\dot{R}/R \Rightarrow \rho \propto R^{-3(1+\omega)} \propto a^{-3(1+\omega)} \quad \text{si } \omega \neq -1$$

lo que nos permite conocer la evolución del universo en distintas eras. Así:

– universo *dominado por la radiación* ($\omega = 1/3$): (despreciando curvatura y Λ)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho, \quad \rho \propto a^{-4} \Rightarrow a(t) \propto t^{1/2}; \quad H = \frac{1}{2t}.$$

[así era el universo desde el fin de la etapa inflacionaria ($10^{-35} - 10^{-33}$ s tras el Big Bang) hasta que la densidad de materia y radiación se igualaron, unos 10^4 años después.]

– universo *dominado por la materia* ($\omega = 0$): (despreciando curvatura y Λ)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho, \quad \rho \propto a^{-3} \Rightarrow a(t) \propto t^{2/3}; \quad H = \frac{2}{3t}.$$

[así ha sido el universo desde que tenía unos 10^4 años, es decir casi siempre]

– universo *dominado por la energía del vacío* ($\omega = -1$): (despreciando curvatura)

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 > 0, \quad \rho = \text{const} \Rightarrow a(t) \propto e^{Ht}; \quad H = \text{const}.$$

[así era el universo durante la *inflación* y así parece ser que empieza a serlo también ahora: un universo dominado por la constante cosmológica.]

El factor de escala $a(t)$ varía, por tanto, con el tiempo, a no ser que se ajusten los parámetros, como hizo Einstein en un principio, para forzar un *universo estático*: existe una solución a las ecuaciones cosmológicas con ρ , p y Λ positivos correspondiente a un universo con a finito y constante, con curvatura positiva (cerrado y por tanto sin bordes) y densidad constante, fijadas ambas por las constantes universales G_N y Λ . Einstein desechó este modelo de universo ante la evidencia observacional de la expansión de Hubble en los años 1920, eliminando la constante cosmológica ($\Lambda = 0$) que ya no era

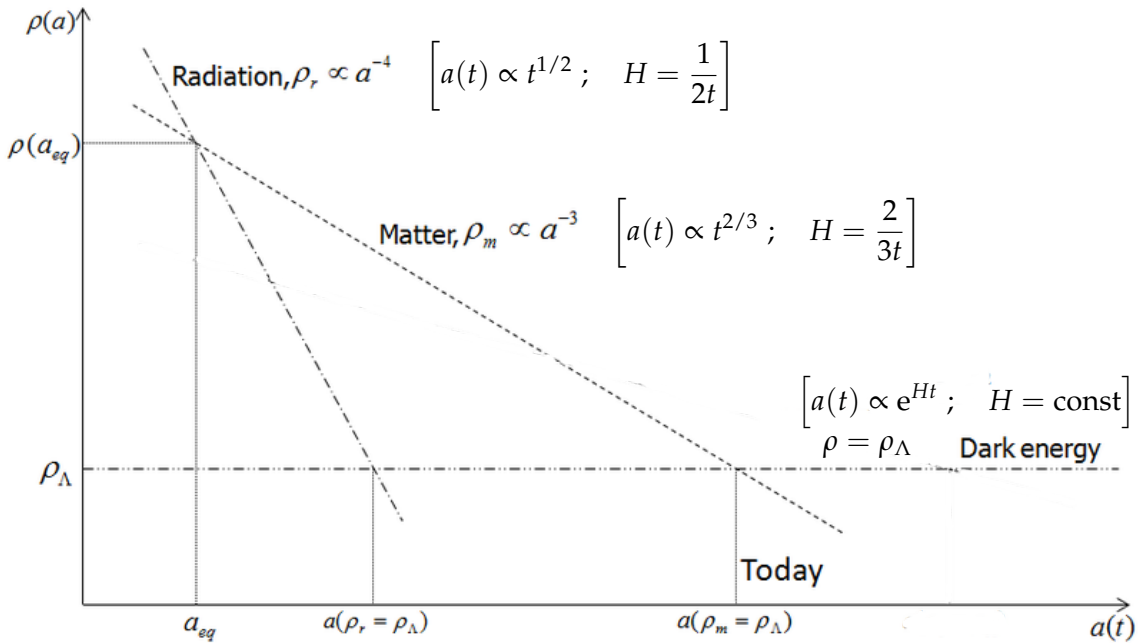


Figura 12.1: Esquema de la evolución de la densidad del universo.

necesaria. Sin embargo este parámetro puede no ser nulo y de hecho parece no serlo a tenor de observaciones recientes, como ahora veremos.

La *expansión* (o la *recesión*) no es más que un rescalamiento del universo. Las coordenadas “comóviles” (r, θ, φ) permanecen invariables para observadores en reposo pero todas las distancias se estiran. No hay un “centro del universo”: todos los puntos son equivalentes; desde todos ellos se observa la misma expansión. Es como si todos los objetos del universo estuvieran dibujados sobre la superficie de un globo que se va inflando (el centro del globo no pertenece al espacio 2D del globo, del mismo modo que el centro de expansión del universo no se encuentra en nuestro espacio 3D).

Se definen varios *parámetros cosmológicos* cuya determinación observacional nos permitirá, en principio, determinar cuál es la geometría del universo, es decir el valor de k , usando de las ecuaciones de Friedmann-LeMaître:

- El *parámetro de Hubble* H mide el ritmo de expansión del universo:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \quad (\text{su valor actual es la constante de Hubble } H_0). \quad (12.5)$$

Experimentalmente: $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $h = 0.71_{-0.03}^{+0.04}$.

- El *parámetro de densidad* Ω , se descompone en una contribución debida a la materia, Ω_m , y otra debida a la constante cosmológica Ω_Λ (densidad de energía del vacío). La contribución de los fotones es muy pequeña: $\Omega_\gamma = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}$. Se define como el cociente entre ρ y la densidad crítica ρ_c (aquella para la que el universo es plano, es decir $k = 0$):

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_m + \Omega_\Lambda; \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}. \quad (12.6)$$

Nótese que ρ_Λ es constante pero $\rho_m \propto a^{-3}$ va disminuyendo con la expansión. Los valores actuales son ρ_M, Ω_M . Las ecuaciones (12.3) y (12.4) pueden generalizarse para un universo con distintas componentes de densidades ρ_i (incluida ρ_Λ) con ecuaciones de estado $p_i = \omega_i \rho_i c^2$:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \sum_i \rho_i - \frac{kc^2}{R^2} \quad (12.7)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G_N}{3} \sum_i \rho_i (1 + 3\omega_i). \quad (12.8)$$

La Ω_M se obtiene a partir de sus diferentes componentes: materia bariónica (Ω_B), partículas relativistas, esencialmente neutrinos (Ω_ν) y *materia oscura* fría (Ω_{CDM}), que es ¡la principal contribución!^b Sus valores son:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \Omega_B + \Omega_\nu + \Omega_{\text{CDM}} \\ \Omega_B &= 0.044 \pm 0.004 \approx \Omega_{\text{vis}} \quad (\approx 0.18 \Omega_M) \\ 0.003 &\lesssim \Omega_{\text{HDM}} \approx \Omega_\nu < 0.015 \\ \Omega_{\text{CDM}} &= 0.22 \pm 0.04 \quad (\approx 0.82 \Omega_M) \end{aligned} \quad (12.9)$$

Nótese que la ecuación (12.3) nos da una relación entre el parámetro de Hubble H , la curvatura k y el parámetro de densidad $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda$:

$$\frac{kc^2}{R^2} = H^2(\Omega - 1), \quad (12.10)$$

de donde deducimos que si $\Omega > 1$ el universo es cerrado ($k = +1$), si $\Omega = 1$ es plano ($k = 0$) y si $\Omega < 1$ es abierto.

- La *constante cosmológica* Λ interviene en la fórmula que relaciona la distancia de luminosidad d_L con el parámetro de desplazamiento al rojo z de objetos muy lejanos:^c

$$H_0 d_L = c \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right] \quad (12.11)$$

donde el parámetro de deceleración q_0 vale:^d

$$q_0 \equiv - \left. \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \right|_0 \approx \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda. \quad (12.12)$$

^bLa materia oscura es aquella que *no se ve*: sólo se sienten sus efectos gravitatorios (curvas de rotación de las galaxias, velocidades de cúmulos de galaxias, etc.). Se divide en dos categorías: bariónica y no bariónica, con la segunda subdividida en caliente (HDM) y fría (CDM), constituida por partículas poco masivas (relativistas) y muy masivas (lentas), respectivamente. Los candidatos a materia oscura bariónica son genéricamente llamados MACHOs (planetas muy masivos, estrellas enanas, agujeros negros, etc.). Candidatos a HDM son los neutrinos. Candidatos a CDM son las hipotéticas WIMPs (neutralinos, etc.) y axiones. Todas estas formas de materia oscura parecen ser necesarias para explicar los distintos niveles de estructura del universo. La mayoritaria parece ser sin embargo CDM.

^cExisten varias formas de definir distancias en cosmología: distancia propia d_p , distancia angular d_A y distancia de luminosidad d_L . Hemos de especificar a cuál nos referimos. Dependen de los parámetros cosmológicos y del desplazamiento al rojo z del objeto, que es único, medible e independiente de modelo.

^dExactamente: $q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 + \frac{3}{2}\sum_i \omega_i \Omega_i$, donde $\Omega_0 = \sum_i \Omega_i$ y $p_i = \omega_i \rho_i c^2$ (ecuación de estado) es la presión de la especie i , siendo $\omega = 0$ para partículas no relativistas, $\omega = +\frac{1}{3}$ para partículas relativistas y $\omega < 0$ para la *energía oscura*, que produce una presión negativa, de sentido contrario a la gravedad (la constante cosmológica es un caso especial que corresponde a $\omega = -1$).

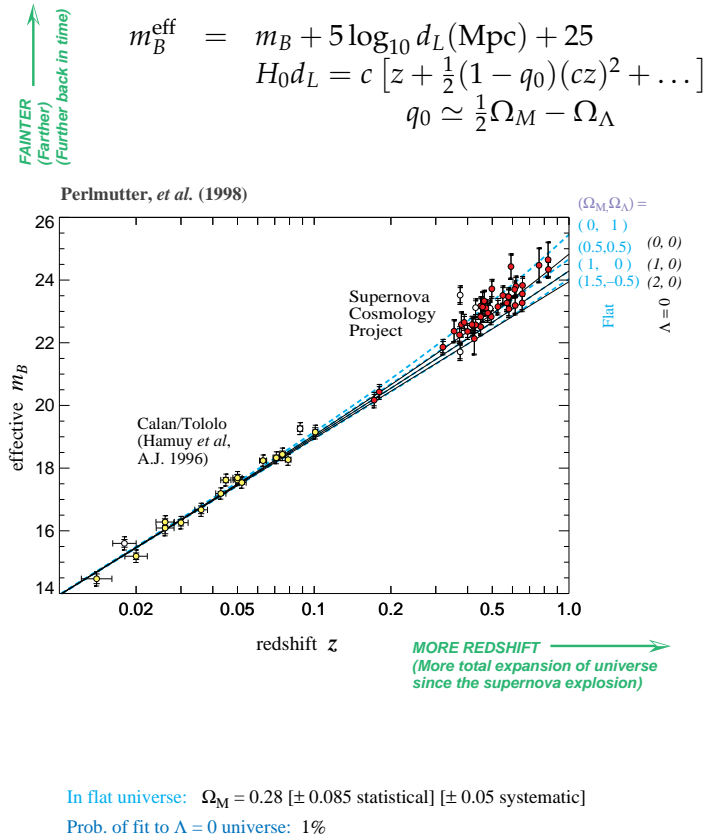


Figura 12.2: Diagrama de Hubble de supernovas tipo Ia [Knop et al, ApJ 598 (2003) 102].

En los últimos años se han realizado medidas de la distancia de varias decenas de supernovas tipo Ia con z muy alto (Fig. 12.2). Las supernovas son objetos efímeros pero extraordinariamente brillantes cuya curva de luminosidad es muy regular. Esto permite conocer su magnitud absoluta y así averiguar su distancia a partir de su magnitud relativa. No son muy frecuentes pero se han podido observar unos centenares de ellas con z muy alto (cercano a la unidad) desde finales de los años 90, por dos colaboraciones de astrónomos en competición, una en el Monte Stromlo (Australia) y otra en Cerro Tololo (Chile). La noticia no es que estas supernovas lejanas se aparten de la ley de Hubble lineal sino que lo hacen de forma tal que el resultado es incompatible con un parámetro de deceleración q_0 positivo, que es lo que cabría esperar si el Universo estuviera formado por materia exclusivamente. La deceleración negativa observada, es decir la reacceleración (premio Nobel de Física 2011 para S. Perlmutter, B.P. Schmidt y A.G. Riess) se interpreta en términos de la existencia de una densidad de energía del vacío que produce una presión de signo contrario a la debida a la atracción gravitatoria. Curiosamente tal efecto parece compatible con la existencia de una constante cosmológica que Einstein había introducido en sus ecuaciones para forzar un universo estático y que después suprimió ante la evidencia experimental de la hipótesis de expansión.^e

Existe un buen número de medidas complementarias de los parámetros cosmológicos

^eEinstein llegó a decir que la introducción de la constante cosmológica fue uno de los mayores errores de su vida.

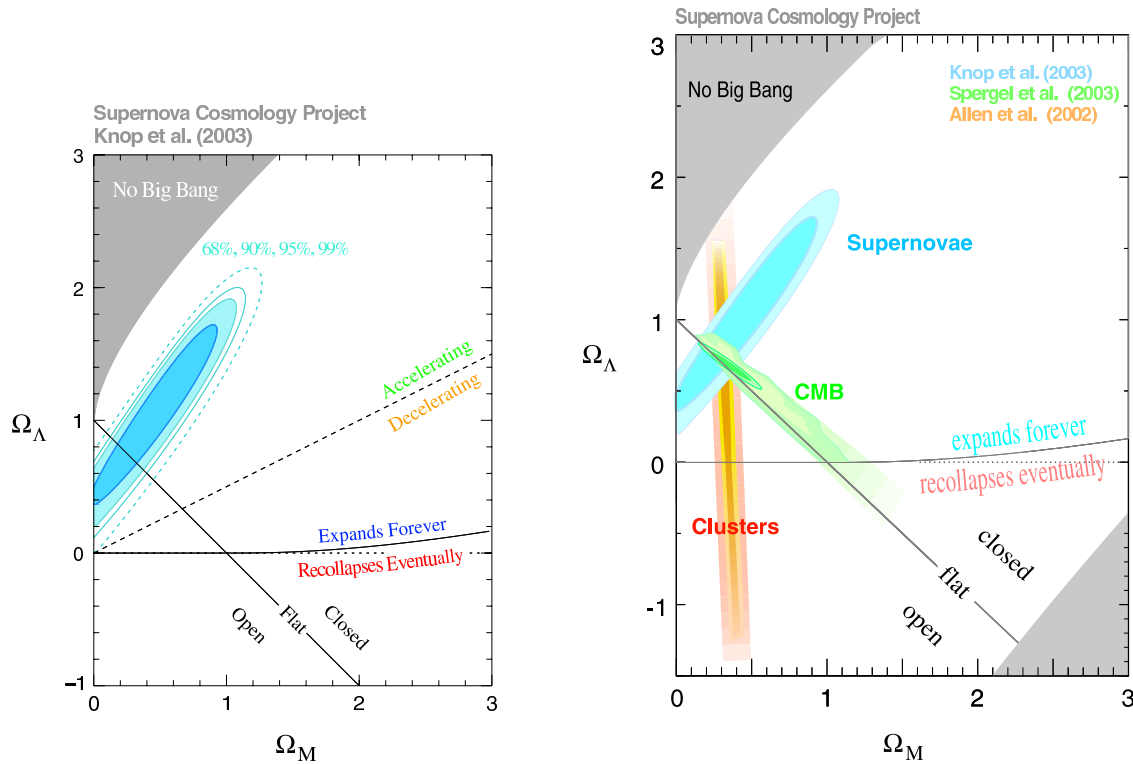


Figura 12.3: Valores más probables de Ω_M y Ω_Λ según los datos de las supernovas lejanas (izquierda) y superponiendo toda la información disponible (derecha) [Knop et al, ApJ 598 (2003) 102].

y todas apuntan a la siguiente conclusión (Fig. 12.3):

$$\Omega_M = 0.27 \pm 0.04, \quad \Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04, \quad (12.13)$$

es decir, un *universo plano dominado por la constante cosmológica*.

Conviene finalmente remarcar que sólo cuando $\Lambda = 0$ se tiene que un universo cerrado ($k = +1$) se expande hasta un cierto momento en que empieza a colapsar, mientras que los universos abiertos ($k = -1$) y planos ($k = 0$) se expanden siempre (el universo plano es un caso límite). Véase Fig. 12.4. En cambio, si $\Lambda \neq 0$ entonces el valor de k no determina el destino del universo. En la Fig. 12.3 se indican las regiones correspondientes en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_M$.

12.3 La paradoja de Olbers

¿Por qué no es el cielo de noche tan uniformemente brillante como la superficie del Sol? Así debería ser si en el universo hubiera infinitas estrellas. En cada elemento de área del cielo habría una estrella. Ésta es la paradoja de Olbers. Se remonta a los tiempos de Kepler, a principios del siglo XVII, fue discutida por Halley y Cheseaux en el siglo XVIII, pero no fue popularizada como paradoja hasta que Olbers retomó la cuestión en el siglo XIX.

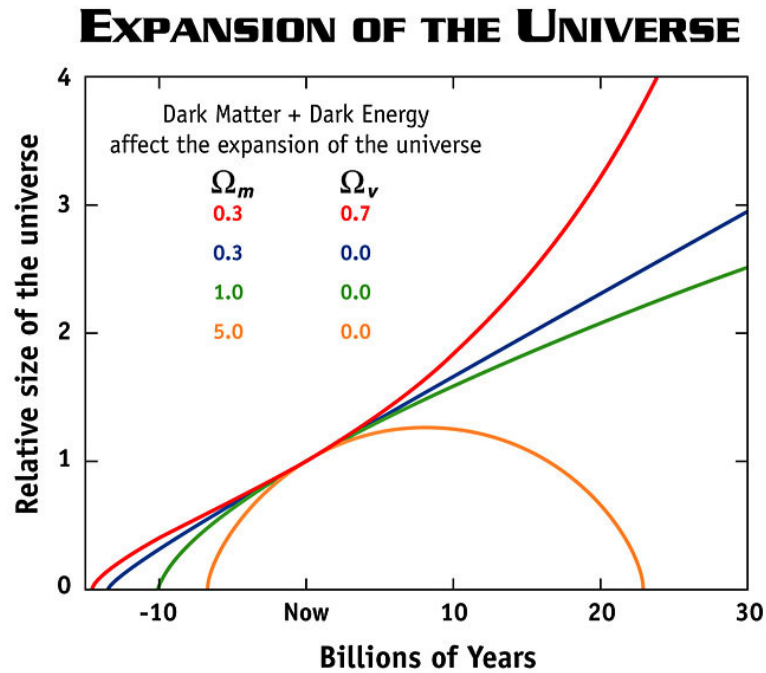


Figura 12.4: Evolución de los distintos tipos de universo, suponiendo $\Lambda = 0$.

En todo este tiempo se han propuesto una serie de posibles explicaciones. Las siguientes son las más relevantes:

1. Hay polvo que nos impide ver las estrellas más lejanas.
2. El universo tiene sólo un número finito de estrellas.
3. La distribución de las estrellas no es uniforme: algunas se esconden detrás de las otras, de modo que existen regiones oscuras, sin ninguna estrella en toda la línea de visión.
4. El universo se expande, de modo que la luz de las estrellas distantes está desplazada al rojo hasta oscurecerse.
5. El universo es joven, de modo que la luz de las estrellas más distantes no ha tenido tiempo de llegar hasta nosotros.

Discutamos estas potenciales soluciones:

1. Está simplemente mal. El polvo se calentaría reemitiendo la radiación. Además se podría atenuar la luz de las estrellas lejanas, pero habría que poner tanto polvo para conseguirlo con todas ellas, que también oscureceríamos la luz de nuestro propio Sol.
2. Puede ser técnicamente correcta. Pero, aunque el número fuera finito, es todavía suficientemente grande para iluminar el cielo, así que tampoco vale.
3. Podría ser correcta, aunque no lo sabemos a ciencia cierta. Si las estrellas se distribuyeran en forma fractal, formando estructuras a gran escala, podría haber regiones

del cielo vacías (oscuras). Esta posibilidad se está investigando actualmente con resultados positivos hasta escalas de unos pocos megaparsecs. Sin embargo, datos recientes de objetos aún más distantes parecen indicar que se recupera la homogeneidad e isotropía (el principio cosmológico).

4. Este efecto es seguro que contribuye en combinación con el siguiente.
5. Este efecto es más importante que el anterior, según cálculos que se han realizado. Vivimos dentro de una región de universo observable de radio igual a la edad del universo: la luz de objetos alejados de nosotros más de 15 mil millones de años no ha tenido tiempo de llegar hasta nosotros.

Nótese que estas dos últimas soluciones de la paradoja de Olbers son incompatibles con un universo estático y eterno.

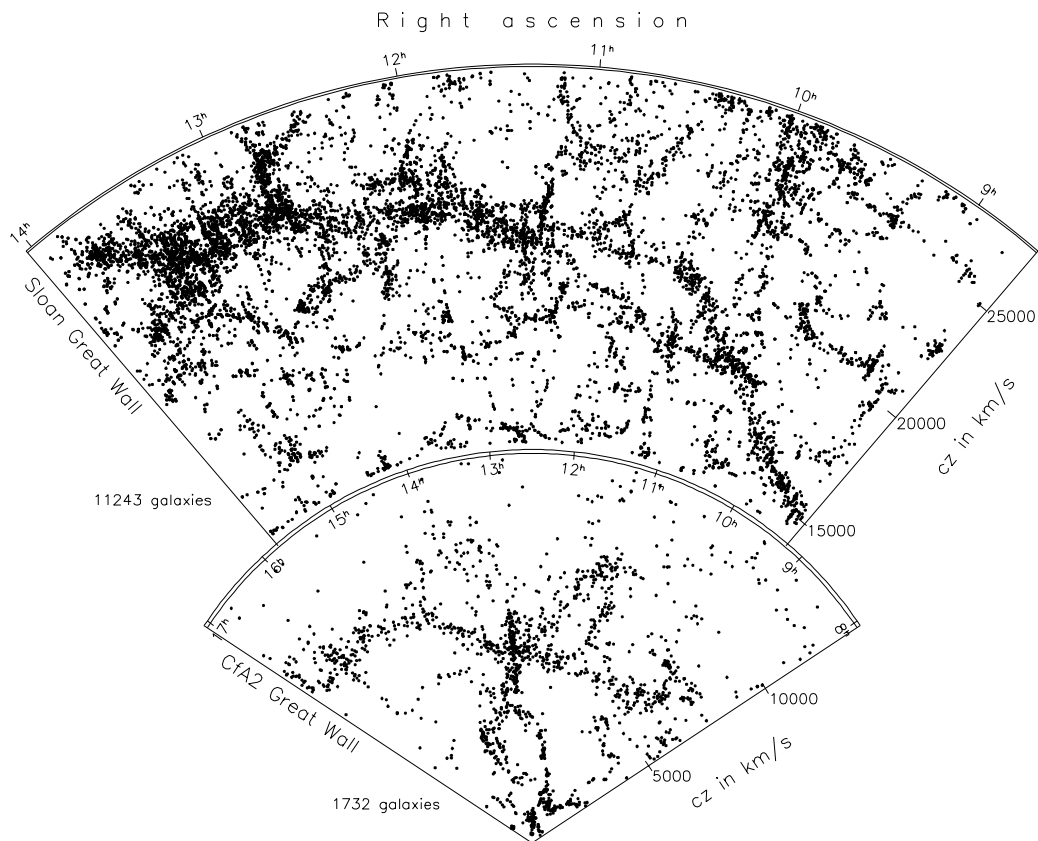


Figura 12.5: Mapa (parcial) del universo que muestra su estructura a gran escala. Se trata de dos porciones del cielo (coordenadas ecuatoriales) a distinta profundidad con un grosor de 12° (CfA2) y 4° (Sloan), respectivamente. Cada punto es una galaxia. Se aprecian enormes estructuras denominadas *dedos de dios* y dos *grandes murallas*. [Extraído de J.R. Gott et al., astro-ph/0310571].