

Tema 10

Gravedad y espaciotiempo

10.1 Relatividad de las medidas del tiempo

Por la relatividad especial sabemos que cuando un reloj se mueve rápidamente respecto a un observador, el intervalo entre cada “tic” es distinto (más largo) al medido cuando el reloj estaba en reposo. Ésta es la *dilatación temporal cinemática*. Es de esperar que ocurra algo parecido cuando el reloj se mueva a velocidad variable.

Por otro lado, según el principio de equivalencia, los efectos producidos por la gravitación son los mismos que los producidos por una aceleración. Por tanto, la simple *presencia de materia en las proximidades de un reloj hará también que éste marche más despacio*, aunque el observador no se mueva respecto a él. Ésta es la *dilatación temporal gravitatoria*.

Einstein sugirió un experimento imaginario con el que puede calcularse, para un campo gravitatorio débil como el de la Tierra, el valor de la dilatación temporal gravitatoria (Fig. 10.1). Se deja caer una masa m desde lo alto de una torre de altura h sobre la superficie de la Tierra. Al llegar al suelo su velocidad será $v = \sqrt{2gh}$ y por tanto su energía inicial, $E_1 = mc^2$, habrá aumentado en una cantidad igual a la energía cinética adquirida, de modo que en el suelo vale $E_2 = E_1 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + mgh$ (expresión aproximada, no relativista). Supongamos que toda esa energía se convierte en un fotón de energía $E_2 = h\nu_2$ que es emitido hacia arriba, donde h es la constante de Planck. Por

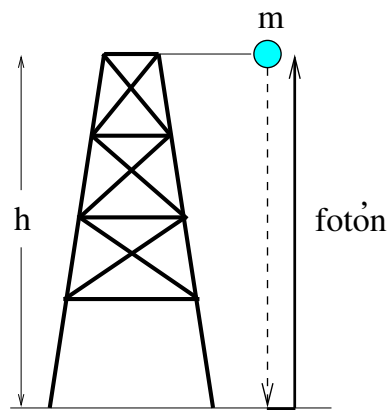


Figura 10.1: Experimento que muestra la dilatación temporal gravitatoria.

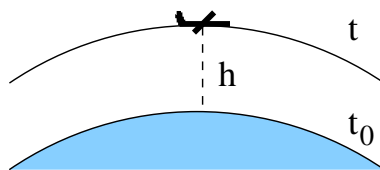


Figura 10.2: Dilatación temporal gravitatoria en el experimento de Hafele y Keating.

conservación de la energía, la energía del fotón cuando alcanza la cima de la torre deberá ser $E_1 = h\nu_1 < E_2$, es decir, su frecuencia ν habrá disminuido: *un fotón que escapa de un campo gravitatorio se desplaza al rojo*. Por tanto,^a

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \frac{mc^2}{mc^2 + mgh} = \frac{1}{1 + gh/c^2} \approx 1 - \frac{gh}{c^2} \\ \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} &= 1 - \frac{gh}{c^2} \quad \text{o bien} \quad \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2} = \frac{gh}{c^2}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Éste es un experimento ideal, pero una versión práctica del mismo pudo llevarse a cabo por Pound y Rebka en 1960: la emisión γ de una transición atómica se debe desplazar al rojo una fracción 2.46×10^{-15} cuando se mide tras ascender los 22.6 m de altura de la torre del Jefferson Physical Laboratory en Harvard. Esta pequeñísima diferencia se pudo apreciar gracias al efecto Mossbauer, y la predicción fue verificada con una precisión del 1 %.

Este cambio en las frecuencias debe ser el mismo que experimentan los tics de un reloj. Recordemos que el tiempo entre dos tics (periodo) es el inverso de la frecuencia. Por tanto, deducimos que el tiempo transcurre más lentamente cuanto más intenso es el campo gravitatorio. Así, si t es el intervalo de tiempo entre dos sucesos medido a una altura h sobre la superficie de la Tierra y t_0 es el medido a nivel del suelo tenemos que:^b

$$t = t_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right). \quad (10.2)$$

En el experimento de Hafele y Keating (1971), que hemos mencionado en un capítulo precedente, con el que se midieron los comportamientos de relojes abordo de aviones comerciales, se combinan la dilatación temporal cinemática y la gravitatoria (Fig. 10.2). La primera es debida al movimiento relativo entre los relojes en vuelo y el reloj de referencia en Washington, que a su vez se mueve respecto al centro de la Tierra (sistema localmente inercial por ser un sistema en caída libre hacia el Sol). Su efecto es el retraso de los relojes que vuelan hacia el este y el adelanto de los que vuelan hacia el oeste. La segunda se debe a que la intensidad del campo gravitatorio para los relojes abordo es menor que para el que se queda en tierra, lo que se traduce en un adelanto adicional, que podemos deducir explícitamente usando (10.2). Véase Ejercicio 10.1. El resultado confirma las predicciones con una precisión del 10 %.

^aEstamos asumiendo que $h \ll R_\oplus$, el radio de la Tierra. Podemos sin embargo conseguir un resultado más general cambiando gh por $\frac{G_N M_\oplus}{R_\oplus} - \frac{G_N M_\oplus}{R_\oplus + h}$. Recordemos que $g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2$, donde M_\oplus es la masa de la Tierra.

^bLa expresión exacta, válida también cuando el campo gravitatorio es intenso, se puede deducir de las ecuaciones de campo de Einstein: $t = t_0 \left[1 - \frac{2G_N M}{(R+h)c^2} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{2G_N M}{Rc^2} \right]^{-1/2}$.

En 1976 el *Smithsonian Astrophysical Observatory* lanzó un cohete Scout hasta una altura de 10000 km. A esa altura un reloj debe marchar 4.25 partes en 10^{10} más rápido que a nivel del suelo.^c Durante dos horas de caída libre, el cohete estuvo transmitiendo pulsos de un oscilador maser que actuaba como reloj, los cuales se comparaban con los pulsos de otro reloj similar situado en tierra. El resultado confirmó la dilatación temporal gravitatoria al 0.02 % [Vessot *et al*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 2081], su mejor determinación hasta la fecha.

10.2 Relatividad de las medidas espaciales

Ya sabemos que el movimiento relativo entre dos observadores hace que no estén de acuerdo en las medidas de longitudes que realizan. Por tanto, según el principio de equivalencia hemos de esperar que las medidas de longitudes también deban alterarse cuando exista una masa en las proximidades, aunque el observador se encuentre en reposo. Este hecho implica un *cambio en las reglas de la geometría*, que no son otra cosa que las reglas para definir distancias. Para comprender este cambio hemos de hacer un inciso con el fin de introducir el concepto de métrica. Hemos podido hablar de relatividad especial sin mencionar la métrica, pero en relatividad general este concepto es ineludible.

10.3 Métrica, curvatura y geodésicas

10.3.1 El concepto de métrica

Los objetos físicos tienen significado independientemente del sistema de coordenadas que usemos. En cambio, las coordenadas cambian de un sistema de referencia a otro. Pues bien, el *tensor métrico* g_{ij} es la herramienta que nos permite determinar longitudes a partir de las coordenadas de los puntos del espacio (matemáticamente, convierte vectores en escalares).^d Así, el cuadrado de la longitud del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es

$$|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i,j=1,n} g_{ij} a_i a_j, \quad (10.3)$$

donde n es el número de dimensiones del espacio. La métrica es expresable en distintos sistemas de coordenadas, pero la longitud del objeto físico es siempre la misma (invariante). Ahora bien, tal longitud depende de cuál sea la geometría del espacio.

A continuación discutiremos distintas geometrías, es decir distintas métricas, y daremos ejemplos ilustrativos de una misma métrica expresada en sistemas de coordenadas diferentes.

^cCompruébese que $\Delta t/t = G_N M_\oplus h / (c^2 R_\oplus (R_\oplus + h))$.

^dEn general, un tensor de rango n tiene n índices (cada uno de los cuales abarca las d dimensiones del espacio vectorial correspondiente) con propiedades bien definidas bajo un grupo de transformaciones. Así, en el espaciotiempo de 4D (índices $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$), y bajo las transformaciones de Lorentz, un *escalar* es un tensor de rango cero (invariante); un *vector* como $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ o $p^\mu = (E, \mathbf{p}c)$ tiene rango uno; la métrica $g^{\mu\nu}$ y otros tensores de dos índices tienen rango dos; etc.

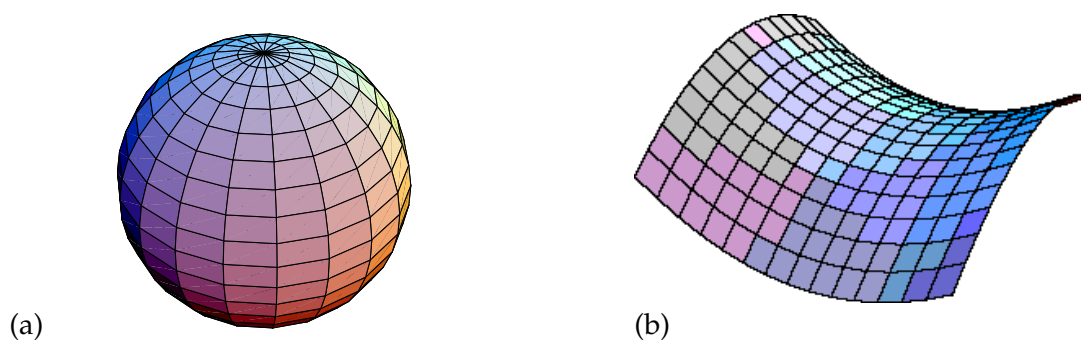


Figura 10.3: Espacios bidimensionales con curvatura constante positiva (a) y negativa (b).

10.3.2 La geometría euclídea

Es la geometría del *espacio plano*. Se caracteriza por cumplir los cinco postulados de Euclides, de los cuales el más representativo es el quinto: en el plano, por un punto exterior a una recta pasa *una y sólo una* recta paralela a la recta dada (nunca llega a cortarla). En general llamaremos *geodésica* a la mínima distancia entre dos puntos, que es estrictamente “recta” en la geometría euclídea. Existen además otras formas de caracterizar el espacio plano:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° .
- El cociente de la longitud de una circunferencia y su diámetro es π .

Veamos a continuación dos ejemplos de geometrías, una euclídea y otra no euclídea, para fijar los conceptos básicos.

Ejemplo A: Espacio euclídeo bidimensional

Se trata de una superficie bidimensional plana.

Coordenadas cartesianas:

Las coordenadas cartesianas de un vector en 2D son $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$. Para determinar la métrica lo más sencillo en general es considerar el vector elemento de línea $d\ell = (dx, dy)$,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 \quad \Rightarrow \quad g_{xx} = g_{yy} = 1, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad (10.4)$$

o en forma matricial,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Coordenadas polares:

Las coordenadas polares de un vector en 2D son $\mathbf{a} = (a_r, a_\varphi)$, donde $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Usando de nuevo el vector elemento de línea,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = 0. \quad (10.6)$$

Longitud de una circunferencia:

$$dr = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2\pi r . \quad (10.7)$$

Ejemplo B: Superficie de una esfera en 3D (geometría no euclídea)

Véase Fig. 10.3a. Lo más cómodo es usar coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) . Como la superficie de la esfera tiene dos dimensiones, sólo dos coordenadas serán suficientes para determinar un punto en este espacio (el radio $r \equiv R_c$ es constante y es el inverso de la curvatura).

Coordenadas esféricas:

Recordemos que en 3D, $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$. Por tanto, usando que $r = R_c$ y $dr = 0$, tenemos

$$d\ell^2 = R_c^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad \Rightarrow \quad g_{\vartheta\vartheta} = R_c^2, \quad g_{\varphi\varphi} = R_c^2 \sin^2 \vartheta, \quad g_{\vartheta\varphi} = g_{\varphi\vartheta} = 0 \quad (10.8)$$

Coordenadas polares:

Conviene hacer el cambio de variables:

$$r = R_c \vartheta \quad \Rightarrow \quad d\ell^2 = dr^2 + R_c^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R_c} \right) d\varphi^2 \quad (10.9)$$

que podemos comparar con la métrica del espacio euclídeo (10.6): $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Longitud de una circunferencia:

$$dr = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2\pi R_c \sin \left(\frac{r}{R_c} \right) \quad [C \rightarrow 2\pi r \text{ cuando } r \ll R_c]. \quad (10.10)$$

Vemos que el cociente de la longitud de la circunferencia y su diámetro $d = 2r$ es $C/d < \pi$.

10.3.3 La geometría de Minkowski

Es la geometría de la relatividad especial, la geometría del *espaciotiempo plano*. Como sabemos, un punto en el espaciotiempo (suceso) queda determinado por cuatro coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ en un sistema de referencia dado. Las coordenadas de un suceso en distintos sistemas de referencia (es decir, según distintos observadores inerciales) están relacionadas mediante las transformaciones de Lorentz. Ya hemos visto que estas transformaciones dejan invariante el *intervalo* entre dos sucesos:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 . \quad (10.11)$$

Por tanto la métrica de Minkowski, es (en coordenadas cartesianas):

$$g = \eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (10.12)$$

La métrica no es definida positiva. En coordenadas esféricas es fácil ver que:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (10.13)$$

Recordemos que la *distancia propia* viene dada por el intervalo (tipo espacial) entre dos sucesos según un observador para el que éstos son simultáneos ($dt = 0$): $d\ell = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Por otro lado, el *tiempo propio* viene dado por el intervalo (tipo temporal) entre dos sucesos que tienen lugar en el mismo lugar para un observador ($dx = dy = dz = 0$): $cd\tau = \sqrt{ds^2} = cdt$.

10.3.4 Otras geometrías no euclídeas

Son aquellas en las que el postulado de las rectas paralelas (o sus caracterizaciones equivalentes) se sustituye por otro postulado distinto.

Elíptica

En el plano, por un punto exterior a una recta no se puede trazar *ninguna* recta paralela a la recta dada. Un ejemplo de esta geometría es la superficie de una esfera (Fig. 10.3a), siendo las líneas rectas (geodésicas) los círculos máximos. La suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que 180° y el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre menor que π . Se dice que su *curvatura es siempre positiva*.

Hiperbólica

En el plano, por un punto exterior a una recta se pueden trazar *infinitas* rectas paralelas a la recta dada. Se trata de la geometría de la superficie de una silla de montar (Fig. 10.3b). La suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que 180° y el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre mayor que π . Se dice que su *curvatura es siempre negativa*.

General: geometría de Riemann

Tanto la geometría elíptica como la hiperbólica tienen curvatura constante. La geometría de Riemann es la más general posible y por tanto, en cuatro dimensiones, es la geometría del espaciotiempo. En ella la *curvatura varía de un punto a otro*. Un ejemplo ilustrativo en 2D aparece en la Fig. 10.4.

En resumen: las geometrías euclídea y de Minkowski son casos particulares de las geometrías riemannianas y pseudoriemannianas.

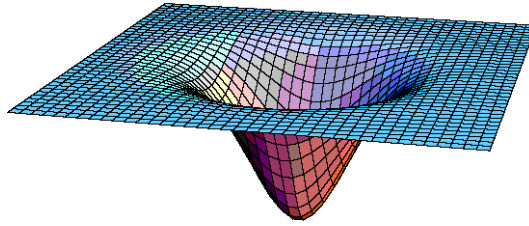


Figura 10.4: Espacio bidimensional con curvatura variable.

Tipo	Nombre	Curvatura	Métrica def. +	Ejemplos
Plana	Euclídea	cero	sí	espacio plano (tradicional)
	Minkowski	cero	no	espaciotiempo plano (RE)
Curva	Elíptica*	$\text{const} > 0$	sí	superficie esfera, universo
	Hiperbólica*	$\text{const} < 0$	sí	superficie silla de montar
	Pseudo-riemanniana	variable	no	espaciotiempo de la RG

* Riemannianas

10.4 Las ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein (ECE) *determinan* la métrica del espaciotiempo a partir de la distribución de materia. Se trata de igualdades que involucran los componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ (tensor curvatura que se construye a partir de segundas derivadas del tensor métrico), la curvatura escalar \mathcal{R} (que se obtiene a partir del tensor curvatura) y el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$ que describe la configuración de masa y energía en un punto del espaciotiempo:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (10.14)$$

donde los índices μ y ν van de 0 a 3 (las cuatro dimensiones del espaciotiempo) y G_N es la constante de Newton. La constante Λ es la llamada constante cosmológica que introdujo Einstein en un principio para obtener un universo estático y que luego retiró ante la evidencia experimental de un universo en expansión. Curiosamente y desde hace pocos años los datos experimentales parecen favorecer una constante cosmológica no nula.

Atendiendo a la simetría del campo gravitatorio que se pretenda describir puede anticiparse la forma del tensor métrico que lo representa, antes de resolver las ECE. Dos casos son de especial relevancia: el campo estático e isótropo (el creado por un planeta o una estrella, por ejemplo) y el campo homogéneo e isótropo (el universo a gran escala, de acuerdo con el principio cosmológico). La primera se conoce como métrica general estática e isótropa, que conduce a la *métrica de Schwarzschild* cuando se aplican las ECE:^e

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (10.15)$$

(Nótese que se reduce a la métrica de Minkowski lejos de la masa M). La segunda es la *métrica de Robertson-Walker*, que conduce a los diferentes modelos de universo (los

^eNótese que de la métrica de Schwarzschild se deduce la expresión de la dilatación temporal que habíamos adelantado.

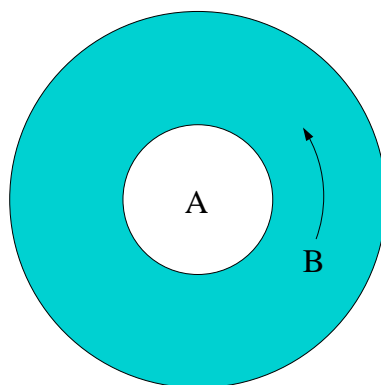


Figura 10.5: Un observador B gira alrededor de un observador inercial A.

estudiaremos en un próximo capítulo) cuando se aplican las ECE:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right). \quad (10.16)$$

Otros ejemplos de configuraciones del espaciotiempo para las que se conoce la solución de las ECE son la métrica de Kerr (campo creado por masas en rotación), las cuerdas cósmicas (campos creados por hilos de materia) y las paredes de dominio (campos creados por planos de materia).

10.5 Volviendo al principio de equivalencia

Consideremos un observador A inercial (en *caída libre*) alrededor del cual *gira* una plataforma sobre la que se encuentra un segundo observador (por tanto, no inercial) B mirando hacia A (Fig. 10.5). Podemos imaginar que ambos se encuentran en el espacio exterior, lejos de cualquier masa.

Ambos discrepan sobre si B está fijo o móvil respecto a A. Según A, B se mueve: está girando a su alrededor. Según B, él no se mueve, pues siempre ve a A en el mismo lugar.

Para averiguar quién tiene razón deciden someterse a una serie de pruebas. Veamos que *ninguna prueba permite distinguir entre reposo o movimiento* (principio de equivalencia) y que las *observaciones de ambos son simplemente interpretadas de modo diferente* por cada uno de ellos: A usa la relatividad especial y B la relatividad general.

1. ¿Siente B ‘algo’ que le empuja en dirección radial hacia el borde de la plataforma?

- Deducción/observación: Sí (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: B sufre una *fuerza centrífuga* en dirección radial y hacia fuera. Se trata de una fuerza ficticia, como todas las fuerzas de inercia, consecuencia de una elección ‘poco conveniente’ del sistema de coordenadas: en realidad B tiende a seguir una trayectoria rectilínea y uniforme según A, pero como (el sistema de referencia) B gira, aparece una fuerza, que para A no existe.

B: B dice permanecer *estático en un campo gravitatorio*. Tiene derecho a pensar así, pues la aceleración de la gravedad es localmente indistinguible de cualquier otra aceleración. Piénsese en la nave giratoria de la película “2001: una odisea del espacio” que ‘genera’ gravedad artificialmente.

Para B no existe ninguna fuerza (la gravedad no es una fuerza sino una distorsión del espaciotiempo) *pero tiene que pagar un precio*: sus medidas tienen lugar en una geometría extraña, un *espaciotiempo curvo*.

2. Medir el intervalo de tiempo Δt entre dos sucesos.

- Observaciones: $\Delta t_A > \Delta t_B$ (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: Debido a la *dilatación temporal cinemática*, $\Delta t_A = \gamma \Delta t_B > \Delta t_B$, donde el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, siendo $v = \omega r$, ω la velocidad angular de B y r su radio de giro. Nótese, por cierto, que el radio r medido por A y por B coinciden porque el movimiento de B respecto a A es perpendicular a la dirección radial.

B: Debido a la *dilatación temporal gravitatoria*, el reloj de B marcha más lento que el de A y por eso $\Delta t_A > \Delta t_B$.

3. Medir la longitud C de una circunferencia centrada en A y radio r igual a \overline{AB} .

- Observaciones : $C_A < C_B$ (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: $2\pi r = C_A = C_B/\gamma < C_B$ (*contracción de Lorentz* debida a que B se mueve a velocidad $v = \omega r$ respecto a A).

B: B afirma encontrarse en un espaciotiempo curvo, lo que significa que la relación entre la longitud de una circunferencia y su radio no es la misma que en un espaciotiempo plano. En nuestro caso, $C_B/\pi > 2r$ (*curvatura negativa*).

4. ¿Observa B que un rayo de luz emitido por él transversalmente a la dirección AB se defleca?

- Deducción/observación: Sí (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: B gira así que un rayo de luz parece deflectarse como consecuencia de que *sus ejes de coordenadas van rotando*. Piénsese en un rayo de luz transversal a un cohete que acelera rectilíneamente: para el astronauta el rayo también está curvado.

B: B insiste en que él no gira: lo que ocurre es que un rayo de luz se defleca en presencia de un campo gravitatorio, sigue una *geodésica en un espaciotiempo curvo*.

Ejercicios

- 10.1** Completa^f las predicciones del experimento de Hafele y Keating (tabla siguiente), sabiendo que los aviones en ruta hacia el este volaron durante 41.2 h a una altura media de 8900 m mientras que los que iban en ruta hacia el oeste volaron durante 48.6 h a una altura media de 9400 m. El cálculo real exige conocer las hojas de ruta y las velocidades de los aviones en diferentes tramos en los que se subdividieron los vuelos [Hafele & Keating, Science 177 (1972) 166].

Diferencia de tiempos	Hacia el este	Hacia el oeste
Dilatación cinemática	-184 ± 18 ns	96 ± 10 ns
Dilatación gravitatoria	144 ± 14 ns	179 ± 18 ns
Efecto total	-40 ± 23 ns	275 ± 21 ns
Efecto observado	-59 ± 10 ns	273 ± 21 ns

- 10.2** Los satélites de la red GPS se encuentran orbitando alrededor de la Tierra a una altura $h = 20\,000$ km, y por tanto a $v = 14\,000$ km/h. Compara tu reloj con otro situado en un satélite GPS. (i) ¿Qué efectos influyen en el ritmo de ambos relojes y qué consecuencias tienen? (ii) ¿Cuánto atrasan o adelantan los relojes de los satélites GPS respecto al tuyo cada día debido a esos efectos? (iii) ¿Es relevante el movimiento de rotación de la Tierra? [Datos: $g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2 = 9.8$ m/s², $G_N = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻², $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $R_\oplus = 6\,370$ km.]

^fLos efectos de dilatación cinemática fueron estimados en el Ejercicio 4.1.