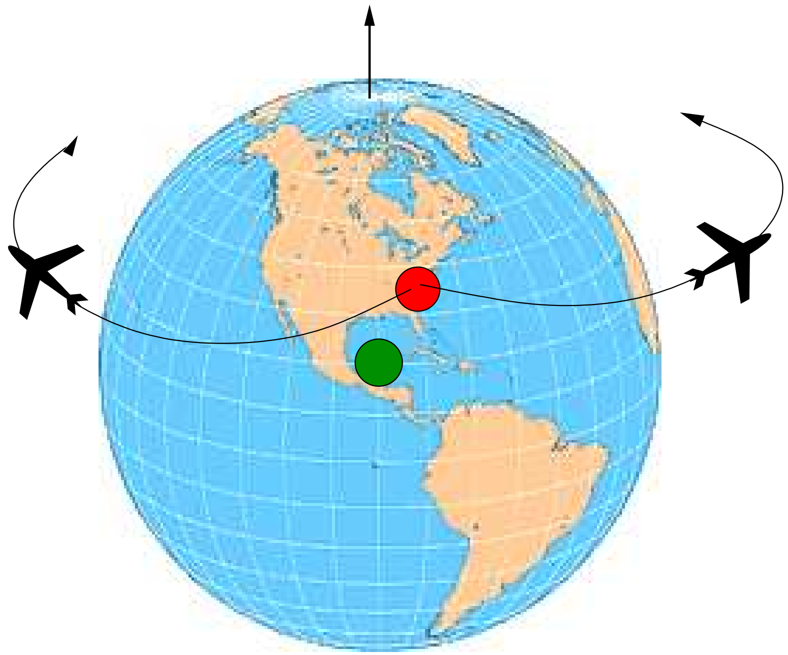
Experimento de Hafele y Keating



Hacia el oeste:

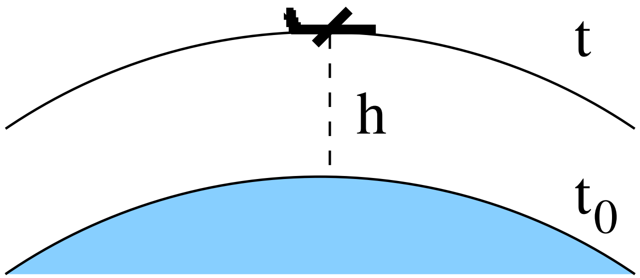
48.6 horas a 440 km/h

$h = 9400$ m

Hacia el este:

41.2 horas a 713 km/h

$h = 8900$ m



Experimento de Hafele y Keating

Dilatación cinemática

$t_{\bullet} \equiv t_0 =$ Centro de la Tierra, $\quad t_{\bullet} \equiv t_A =$ Aeropuerto

$$v_A = \omega R \cos\alpha, \quad \omega R = 1675 \text{ km/h} = 465 \text{ m/s}, \quad \alpha = \text{latitud (supondremos } \alpha = 0^\circ\text{)}$$

- Hacia el Este: $t_0 = \gamma(v_A) t_A = \gamma(v_A + v_E) t_E$

$$\Rightarrow \quad t_A = \frac{t_0}{\gamma(v_A)} = t_0 \left(1 - \frac{v_A^2}{2c^2}\right), \qquad t_E = \frac{t_0}{\gamma(v_A + v_E)} = t_0 \left(1 - \frac{(v_A + v_E)^2}{2c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_E = t_E - t_A = -\frac{t_0}{2c^2}\left[(v_A + v_E)^2 - v_A^2\right] = -184 \text{ ns}} \text{ (retrasan)}$$

- Hacia el Oeste: $t_0 = \gamma(v_A) t_A = \gamma(v_A - v_W) t_W$

$$\Rightarrow \quad t_A = \frac{t_0}{\gamma(v_A)} = t_0 \left(1 - \frac{v_A^2}{2c^2}\right), \qquad t_W = \frac{t_0}{\gamma(v_A - v_W)} = t_0 \left(1 - \frac{(v_A - v_W)^2}{2c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_W = t_W - t_A = \frac{t_0}{2c^2}\left[v_A^2 - (v_A - v_W)^2\right] = 96 \text{ ns}} \text{ (adelantan)}$$

- Nota: Si viajaran a $v \gg v_A$ siempre retrasarían: $\boxed{\Delta t = -t_0 \frac{v^2}{2c^2}} < 0$

Experimento de Hafele y Keating

Dilatación gravitatoria

Nota: $\dfrac{2GM}{c^2} = 9 \text{ mm} \ll R = 6370 \text{ km}$

$$t = t_0 \left[1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)}\right]^{1/2} \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right]^{-1/2} \simeq \left[1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)\right]$$

$$= t_0 \left[1 + \frac{GMh}{c^2 R^2} \frac{R}{R+h}\right] = t_0 \left[1 + \frac{gh}{c^2} \frac{R}{R+h}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = t - t_0 = t_0 \frac{gh}{c^2} \frac{R}{R+h}} > 0$$

$$h_E \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_E = 144 \text{ ns}} \text{ (adelantan)}$$

$$h_W \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_W = 179 \text{ ns}} \text{ (adelantan)}$$

Experimento de Hafele y Keating

Efecto total (errores estimados en el artículo original)

Diferencia de tiempos	**Hacia el este**	**Hacia el oeste**
Dilatación cinemática	-184 ± 18 ns	96 ± 10 ns
Dilatación gravitatoria	144 ± 14 ns	179 ± 18 ns
Efecto total	-40 ± 23 ns	275 ± 21 ns
Efecto observado	-59 ± 10 ns	273 ± 21 ns

Relojes en órbita

Orbitación $\Rightarrow$ $$\frac{GMm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}}$$

Es una velocidad muy grande: $h = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 8$ km/s $= 28\,800$ km/h $\gg \omega R$

- Dilatación cinemática:

$$\Delta t|_{\text{cin}} = -\frac{t_0}{2}\frac{v^2}{c^2} = -t_0\frac{gR}{2c^2}\frac{R}{R+h}$$

- Dilatación gravitatoria:

$$\Delta t|_{\text{grav}} = t_0\frac{gh}{c^2}\frac{R}{R+h}$$

- Ambos efectos tienen signo contrario:
  - Si $h = h_\star = \dfrac{R}{2} = 3185$ km se cancelan
  - Si $h < h_\star$ domina efecto cinemático (retrasan)
  - Si $h > h_\star$ domina efecto gravitatorio (adelantan)

Relojes en órbita

ISS Estación Espacial Internacional

Orbita a $h = 340$ km $< h_\star \Rightarrow v = 7.7$ km/s $= 27\,700$ km/h

$$\begin{aligned}\Delta t|_{\mathsf{cin}} &= -28.5\ \mu\text{s/día}\\ \Delta t|_{\mathsf{grav}} &= 3.2\ \mu\text{s/día}\\ \Delta t|_{\mathsf{tot}} &= -25.3\ \mu\text{s/día (retrasan)}\end{aligned}$$

GPS

Orbitan a $h = 20\,000$ km $> h_\star \Rightarrow v = 3.9$ km/s $= 14\,000$ km/h

$$\begin{aligned}\Delta t|_{\mathsf{cin}} &= -7.2\ \mu\text{s/día}\\ \Delta t|_{\mathsf{grav}} &= 45.4\ \mu\text{s/día}\\ \Delta t|_{\mathsf{tot}} &= 38.2\ \mu\text{s/día (adelantan)}\end{aligned}$$