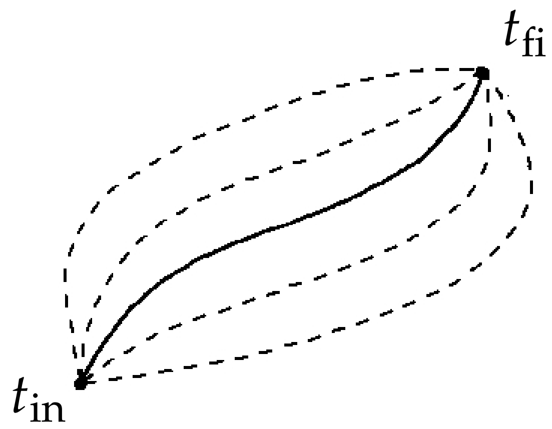
2. Teoría Clásica de Campos

Ecuaciones de Euler-Lagrange | Sistema de N partículas

- Vamos a repasar primero el principio básico de la mecánica clásica para un sistema de N partículas en el formalismo lagrangiano. Este sistema tiene $3N$ grados de libertad descritos por un conjunto de coordenadas $q_i(t), i = 1, 2, \ldots, 3N$.
- El lagrangiano L es una función de las q_i y de sus derivadas respecto del tiempo $\dot{q}_i$, $L = L(q, \dot{q})$. Generalmente, $L(q, \dot{q}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q)$ (término cinético menos potencial). Supondremos que el sistema es conservativo, de modo que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. La acción S se define como

$$S = \int \mathrm{d}t\ L(q, \dot{q}). \tag{1}$$



- El principio de mínima acción establece que la trayectoria del sistema entre un estado inicial $q_{\text{in}} = q(t_{\text{in}})$ y otro final $q_{\text{fi}} = q(t_{\text{fi}})$ fijos es un extremo (generalmente un mínimo) de la acción:

$$\delta S = \delta \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\; L(q,\dot{q}) = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\; \delta L(q,\dot{q}) = 0. \tag{2}$$

Podemos desarrollar

$$\delta L = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right] = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i\right], \tag{3}$$

donde se ha usado que

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\right)\delta\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i \tag{4}$$

siendo α un conjunto discreto de parámetros tal que $q_i = q_i(\alpha, t)$ es suficientemente suave de modo que las derivadas respecto a α y respecto a t conmutan, pues podemos discretizar ambas variaciones.

- Por otro lado, integrando por partes:[a]

$$\int_{t_\text{in}}^{t_\text{fi}} \mathrm{d}t \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i = \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right]_{t_\text{in}}^{t_\text{fi}}} - \int_{t_\text{in}}^{t_\text{fi}} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i. \tag{5}$$

Por tanto,

$$\delta S = \int_{t_\text{in}}^{t_\text{fi}} \mathrm{d}t \, \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] \delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i \tag{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad \text{(Ecuaciones de Euler-Lagrange)} \tag{7}$$

---

[a]En efecto: $\int_a^b \mathrm{d}t \, u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = [uv]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}t \, v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Ecuaciones de Euler-Lagrange | Sistema de N partículas

- Recordemos también que en el formalismo hamiltoniano el objeto básico es

$$H(p,q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{8}$$

- Diferenciando esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_i \left\{ \dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) \right\} && (9) \\ &= \sum_i \{ \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \} && (10) \end{aligned}$$

donde se han usado las ecuaciones de Euler-Lagrange (7) y la definición de momento en (8). Esto demuestra que el hamiltoniano H es una función de p y q. La expresión anterior conduce a:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad \text{(ecuaciones de Hamilton)} \tag{11}$$

- Definiendo ahora el corchete de Poisson de dos variables dinámicas cualesquiera f_1 y f_2

$$[f_1, f_2]_P = \sum_i \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right\} \tag{12}$$

es fácil comprobar que

$$[q_r, p_s]_P = \delta_{rs} \tag{13}$$

y las ecuaciones de Hamilton pueden reescribirse como

$$\dot{q}_r = [q_r, H]_P \ , \quad \dot{p}_r = [p_r, H]_P \tag{14}$$

y en general para cualquier variable dinámica f se tiene

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H]_P + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{15}$$

donde $\partial f/\partial t$ aparece si f depende explícitamente del tiempo.

- Supongamos ahora que, en vez de un sistema con un número finito de grados de libertad, tenemos un medio continuo. Entonces el sistema viene descrito por un campo $\phi(x)$,

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t,\vec{x}) = \phi(x) \tag{16}$$

y su dinámica por un lagrangiano,

$$L = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{17}$$

- En adelante, llamaremos lagrangiano a la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$. La acción es entonces

$$S = \int \mathrm{d}t \, L = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{18}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange | Medio continuo

- El principio de mínima acción se escribe:

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right] = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi = 0, \tag{19}$$

donde la condición de contorno ahora no es que $q_i(t_{\text{in}})$ y $q_i(t_{\text{fi}})$ fijos sino que los campos permanecen constantes en el infinito, pues

$$\int \mathrm{d}^4x \,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = \cancel{\int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]} - \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \tag{20}$$

y se ha usado el teorema de Stokes,

$$\int_V \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] = \int_\Sigma \mathrm{d}A\, n_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \tag{21}$$

(n^μ es el vector normal a la superficie) y la mencionada condición de contorno

$$\delta\phi|_\Sigma = 0. \tag{22}$$

- Así que tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0} \quad \text{(Ecuación de Euler-Lagrange para el campo } \phi\text{)}. \tag{23}$$

▷ Nótese que si se añade al lagrangiano un término de la forma (derivada total)

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu(\phi) \tag{24}$$

las ecuaciones de movimiento no cambian debido a la condición de contorno de que los campos sean constantes en el infinito, pues usando de nuevo el teorema de Stokes,

$$\int_V \mathrm{d}^4 x\, \partial_\mu K^\mu = \int_\Sigma \mathrm{d}A\, n_\mu K^\mu, \tag{25}$$

se añade una constante a la acción y la ecuación $\delta S = 0$ queda inalterada.

Ecuaciones de Euler-Lagrange | Medio continuo

- En el formalismo hamiltoniano definimos el momento conjugado del campo ϕ,

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \tag{26}$$

y la densidad hamiltoniana (o simplemente hamiltoniano),

$$\mathcal{H}(x) = \Pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x) \tag{27}$$

siendo,

$$H = \int \mathrm{d}^3x \ \mathcal{H}(x). \tag{28}$$

Teorema de Noether

- Vamos a discutir la relación existente entre simetrías continuas y leyes de conservación en teoría clásica de campos.

  Una transformación infinitesimal global, i.e. con $|\epsilon^a| \ll 1$ independiente de las coordenadas, de los campos ϕ_i de lo que depende la acción $S(\phi)$ se escribe

$$\phi_i(x) \mapsto \phi_i'(x') \equiv \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \tag{29}$$

  y para las coordenadas

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x), \tag{30}$$

  donde "a" puede ser un índice, dos, … o ninguno.

- Decimos que esta transformación es una simetría si deja invariantes las ecuaciones del movimiento, i.e. si la acción no varía:

$$S(\phi) \mapsto S(\phi') = S(\phi). \tag{31}$$

Teorema de Noether

- Entonces, a primer orden en δx,

$$0 = S(\phi') - S(\phi) = \int \mathrm{d}^4x' \; \mathcal{L}'(x') - \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(x) = \int \mathrm{d}^4x \left[\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x)\right] \tag{32}$$

donde se ha usado

$$\mathrm{d}^4x' = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| \mathrm{d}^4x, \qquad \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} & \dfrac{\partial \delta x^0}{\partial x^1} & \dots \\ \dfrac{\partial \delta x^1}{\partial x^0} & 1 + \dfrac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x)^2. \tag{33}$$

Ahora bien, como

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \mathcal{O}(\delta x)^2 \tag{34}$$

y $\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$, la ecuación (32) queda

$$0 = \int \mathrm{d}^4x \left\{\delta\mathcal{L}(x) + \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L}(x)\right]\right\}. \tag{35}$$

Teorema de Noether

- Por otro lado,

$$\delta\mathcal{L}(x) = \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right]$$
$$= \sum_i \left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right]\delta\phi_i + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right]\right\} \quad (36)$$

y a partir de

$$\phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x'^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} \quad (37)$$

tenemos

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x) - \epsilon^a A_a^\mu \partial_\mu\phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} \quad (38)$$

de modo que

$$\delta\phi_i(x) = \phi_i'(x) - \phi_i(x) = -\epsilon^a[A_a^\mu\partial_\mu\phi_i(x) - F_{i,a}] \quad (39)$$

Teorema de Noether

- Por tanto $\boxed{\text{si } \phi = \phi_{\text{cl}} \text{ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange}}$ (35) queda

$$0 = \int \mathrm{d}^4x\ \partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i + \delta x^\mu \mathcal{L}(x) \right] \tag{40}$$

y sustituyendo δx^μ de (30) y $\delta\phi$ de (39) tenemos

$$0 = \epsilon^a \int \mathrm{d}^4x\ \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\text{cl}}), \tag{41}$$

donde

$$\boxed{j_a^\mu(\phi) \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x)} \tag{42}$$

Teorema de Noether

- Supongamos por un momento que hacemos una transformación local, $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$, sobre esta acción invariante solo bajo transformaciones globales. Entonces no quedará invariante sino que

$$S(\phi') = S(\phi) + \int \mathrm{d}^4x [\epsilon^a(x) K_a(\phi) - (\partial_\mu \epsilon^a) j_a^\mu(\phi)] + \mathcal{O}(\partial\partial\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{43}$$

donde el coeficiente $K_a(\phi)$ es cero, porque en el caso particular de ϵ^a constantes la invariancia global implica $\int \mathrm{d}^4x\, K_a(\phi) = 0$, para cualquier ϕ. Veamos por qué hemos llamado precisamente $-j_a^\mu(\phi)$ al otro coeficiente. Si los $\epsilon^a(x)$ van suficientemente rápido a cero en el infinito, podemos deducir del teorema de Stokes que

$$\int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu \left(\epsilon^a j_a^\mu(\phi) \right) = 0 \Rightarrow -\int \mathrm{d}^4x\, (\partial_\mu \epsilon^a) j_a^\mu(\phi) = \int \mathrm{d}^4x\, \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi) \tag{44}$$

de donde

$$S(\phi') - S(\phi) = \int \mathrm{d}^4x\, \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi). \tag{45}$$

Teorema de Noether

- Ahora bien, si tomamos en particular $\phi = \phi_{\rm cl}$, una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que es un extremo de la acción, la ecuación anterior expresa una variación lineal de la acción en torno a ese extremo y por tanto se anula. Es decir,

$$0 = \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^a(x)\partial_\mu j^\mu_a(\phi_{\rm cl}). \tag{46}$$

Como esto ocurre para cualquier $\epsilon^a(x)$, tenemos que

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu_a(\phi_{\rm cl}) = 0} \tag{47}$$

es decir, $j^\mu_a(\phi_{\rm cl})$ son corrientes conservadas. Así que (41) no solo implica que la integral se anula, sino también el integrando.

Teorema de Noether

- Si definimos la carga

$$Q_a \equiv \int \mathrm{d}^3x \, j_a^0(t,\vec{x}) \tag{48}$$

vemos que la conservación de la corriente $j_a^\mu(x)$ implica que cada carga Q_a se conserva, i.e. es independiente del tiempo, pues

$$\boxed{\partial_t Q_a = \int \mathrm{d}^3x \, \partial_0 j_a^0(t,\vec{x}) = -\int \mathrm{d}^3x \, \partial_i j_a^i(t,\vec{x}) = 0} \tag{49}$$

ya que los campos decrecen suficientemente rápido en el infinito (de nuevo el teorema de Stokes).

▷ Las simetrías pueden ser internas, si no cambian las coordenadas, i.e. $A_a^\mu(x) = 0$, o espaciotemporales si $A_a^\mu(x) \neq 0$.

La conservación de la carga eléctrica, el isoespín, el número bariónico, etc., son consecuencias de las primeras. Veamos ahora todos los ejemplos de las segundas: invariancias bajo traslaciones espaciotemporales, rotaciones y *boosts*.

Teorema de Noether | Traslaciones espaciotemporales

- Vienen dadas por las siguientes transformaciones de coordenadas y campos (cualquier componente, si tienen alguna):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \Rightarrow \epsilon^a = \epsilon^\nu, \quad A^\mu_a(x) = \delta^\mu_\nu \tag{50}$$

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x') = \phi_i(x) \Rightarrow F_{i,a}(\phi, \partial\phi) = 0. \tag{51}$$

Por tanto, hay 4 corrientes conservadas que forman el tensor energía-momento,

$$\theta^\mu{}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \quad \partial_\mu \theta^\mu{}_\nu = 0 \tag{52}$$

y 4 "cargas" que son constantes, la energía y las 3 componentes del momento,

$$P_\nu = \int \mathrm{d}^3 x \; \theta^0{}_\nu = \int \mathrm{d}^3 x \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta^0_\nu \mathcal{L} \right] . \tag{53}$$

Es decir, la invariancia bajo traslaciones espaciotemporales implica conservación del cuadrimomento,

$$\partial_t P^\nu = 0 \, , \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \, . \tag{54}$$

Nótese que el P_0 definido en (54) coincide con el Hamiltoniamo, definido en (28).

- Consideremos por simplicidad un campo escalar. Las transformaciones de Lorentz son de la forma

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)x_\nu \;\Rightarrow \begin{cases} \epsilon^a = \omega^{\rho\sigma} & = -\omega^{\sigma\rho}, \\ A^\mu_a(x) & = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)x_\nu \end{cases} \tag{55}$$

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow \quad F_a(\phi) = 0. \tag{56}$$

- Por tanto,

$$\begin{aligned} j^\mu{}_{\rho\sigma} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{1}{2}(\delta^\nu_\rho x_\sigma - \delta^\nu_\sigma x_\rho)\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi x_\sigma - \partial_\sigma\phi x_\rho) - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta^\mu{}_\rho x_\sigma - \theta^\mu{}_\sigma x_\rho\right), \quad \partial_\mu j^\mu{}_{\rho\sigma} = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

- Es decir, el siguiente tensor contiene 6 corrientes conservadas:

$$T^{\mu\rho\sigma} \equiv -(\theta^{\mu\rho} x^\sigma - \theta^{\mu\sigma} x^\rho), \quad \partial_\mu T^{\mu\nu\rho} = 0 \tag{58}$$

y hay 6 cargas o constantes del movimiento,

$$M^{\rho\sigma} = \int \mathrm{d}^3x \; T^{0\rho\sigma} = \int \mathrm{d}^3x \; (x^\rho \theta^{0\sigma} - x^\sigma \theta^{0\rho}), \quad \partial_t M^{\rho\sigma} = 0. \tag{59}$$

de las cuales M^{ij} (momento angular) se deben a la invariancia bajo rotaciones y M^{0i} a la invariancia bajo *boosts*.

- Conviene ahora hacer dos comentarios:

  1. Nótese que la ecuación (58) implica que el tensor energía-momento debe ser simétrico, pues $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ y

  $$0 = \partial_\mu (x^\rho \theta^{\mu\sigma} - x^\sigma \theta^{\mu\rho}) = x^\rho \partial_\mu \theta^{\mu\sigma} - x^\sigma \partial_\mu \theta^{\mu\rho} + \theta^{\mu\sigma}\delta^\rho_\mu - \theta^{\mu\rho}\delta^\sigma_\mu = \theta^{\rho\sigma} - \theta^{\sigma\rho}. \quad (60)$$

  Como el $\theta^{\mu\nu}$ definido en (52) no es necesariamente simétrico, hay que añadirle una derivada total de la forma $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$, con $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, para que

  $$\widetilde{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad \partial_\mu \widetilde{\theta}^{\mu\nu} = \partial_\mu \theta^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \quad (61)$$

  y como

  $$\int \mathrm{d}^3x\, \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\, \partial_i f^{i0\nu} = 0 \Rightarrow P^\nu = \int \mathrm{d}^3x\, \widetilde{\theta}^{0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\, \theta^{0\nu}, \quad (62)$$

  las cargas conservadas son las mismas, siempre que los campos, de los que depende f, se anulen suficientemente rápido en el infinito.

- Y el segundo comentario:

  2. Estamos acostumbrados a la conservación del momento angular ($\partial_t M^{ij} = 0$) pero no a la conservación de cantidades asociadas a los *boosts* ($\partial_t M^{0i} = 0$). En efecto, en mecánica cuántica,

$$K^k = M^{0k} = P^k t - \int \mathrm{d}^3x\ x^k \theta^{00} = M^{0k}(t) \quad \text{(imagen de Heisenberg)} \tag{63}$$

  y recordemos que $\partial_t M^{0k} \equiv \mathrm{d}M^{0k}/\mathrm{d}t = \mathrm{i}[H, K^k] + \partial K^k/\partial t = \mathrm{i}^2 P^k + P^k = 0$. Sin embargo, a diferencia de energía, momento y momento angular, estas cantidades conservadas no sirven para etiquetar estados, ya que los operadores que representan a los generadores de los *boosts* no siempre son hermíticos y además no conmutan con el hamiltoniano.

▷ Nótese que estos K^k son la representación de los generadores en el espacio infinitodimensional de campos escalares y que, a diferencia de los operadores matriciales 4×4 introducidos en el primer tema, dependen de las coordenadas espaciotemporales.

Campos escalares | Ecuación de Klein-Gordon

- Consideremos para empezar un campo escalar real, $\phi(x) = \phi^*(x)$. Una acción que describa una dinámica no trivial del campo debe contener derivadas, $\partial_\mu \phi$. Los índices Lorentz deben estar contraídos, pues la acción es un escalar. La acción más sencilla es[a]

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(x). \tag{64}$$

- La ecuación de Euler-Lagrange para ϕ es entonces la ecuación de Klein-Gordon,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \Rightarrow (\Box + m^2)\phi(x) = 0, \quad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \tag{65}$$

  Sus soluciones son ondas planas,

$$\phi \propto \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} px}, \text{ con } px \equiv p_\mu x^\mu \text{ y } p^2 \equiv p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

  El parámetro m es la masa, que por definición tomaremos $m > 0$.

---

[a] Un término de la forma $\phi \Box \phi = \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi$ equivale a $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ salvo por una derivada total $\partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi)$. Un término lineal $c^3 \phi$ es equivalente a reparametrizar $\phi \to \phi - c^3/m^2$, que conduce a la misma dinámica.

- La solución más general de la ecuación de Klein-Gordon es por tanto,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^*_{\vec{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} \equiv + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \tag{66}$$

  La normalización de los campos se ha elegido por conveniencia. Vemos que entre las soluciones hay modos de energía positiva ($\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$) y modos de energía negativa ($\mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}$), [a] cuya interpretación surgirá solo al cuantizar el campo.

- El signo de la acción se ha elegido para tener un hamiltoniano definido positivo:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \Rightarrow \mathcal{H} = \Pi_\phi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] > 0. \tag{67}$$

  El tensor energía-momento es directamente simétrico,

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \text{y, en efecto,} \quad \mathcal{H} = \theta^{00}. \tag{68}$$

[a]Porque interpretándolo como una función de onda, el campo $\phi \sim \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} p^0 t}$ con $p^0 > 0$ satisface la ecuación de Schrödinger $\mathrm{i}\partial_t \phi = \pm E \phi$ con energía $\pm E = \pm p^0$.

- En cuanto a las cargas conservadas asociadas a las rotaciones,

$$M^{ij} = \int d^3x \, (x^i\theta^{0j} - x^j\theta^{0i}) = \frac{i}{2}\int d^3x \, (\phi L^{ij}\partial_0\phi - \partial_0\phi L^{ij}\phi), \tag{69}$$

donde se ha usado la definición de $L^{ij} = i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)$ y se ha integrado por partes con $i \neq j$,

$$\int d^3x \, \partial^j[\phi x^i\partial_0\phi] = 0 \Rightarrow \int d^3x \, \partial^j\phi x^i\partial_0\phi = -\int d^3x \, \phi x^i\partial^j\partial_0\phi, \tag{70}$$

$$\int d^3x \, \partial^j[\partial_0\phi x^i\phi] = 0 \Rightarrow \int d^3x \, \partial^j\partial_0\phi x^i\phi = -\int d^3x \, \partial_0\phi x^i\partial^j\phi. \tag{71}$$

- Si definimos el producto escalar de dos campos reales como

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle \equiv \frac{i}{2}\int d^3x \, \phi_1\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_2, \quad f\overleftrightarrow{\partial}g \equiv f\partial g - \partial f g, \tag{72}$$

tenemos que

$$\boxed{M^{ij} = \langle\phi|\, L^{ij}\,|\phi\rangle} \tag{73}$$

que es lo que uno esperaría, pues L^{ij} es la representación del operador J^{ij} sobre el espacio vectorial de los campos.

- Veamos que $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$ es independiente del tiempo si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, lo que está de acuerdo con que M^{ij} es una cantidad conservada. En efecto,

$$\begin{aligned}
\partial_0\langle\phi_1|\phi_2\rangle &= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3x\ \partial_0[\phi_1\partial_0\phi_2 - \partial_0\phi_1\phi_2] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3x\ \left\{\partial_0\phi_1\partial_0\phi_2 + \phi_1\partial_0^2\phi_2 - \partial_0^2\phi_1\phi_2 - \partial_0\phi_1\partial_0\phi_2\right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3x\ \left\{\phi_1\nabla^2\phi_2 - \nabla^2\phi_1\phi_2 - m^2\phi_1\phi_2 + m^2\phi_1\phi_2\right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3x\ \{-\nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2 + \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2\} = 0,
\end{aligned} \tag{74}$$

donde se ha usado

$$(\Box + m^2)\phi_{1,2} = 0 \Rightarrow \partial_0^2\phi_{1,2} = \nabla^2\phi_{1,2} - m^2\phi_{1,2}$$

$$\int d^3x\ \nabla\cdot(\phi_{1,2}\nabla\phi_{2,1}) = 0 \Rightarrow \int d^3x\ \phi_{1,2}\nabla^2\phi_{2,1} = -\int d^3x\ \nabla\phi_{1,2}\cdot\nabla\phi_{2,1}. \tag{75}$$

- Análogamente, podemos escribir

$$\boxed{P^\mu = \int d^3x\ \theta^{0\mu} = \langle\phi|\, i\partial^\mu\, |\phi\rangle} \tag{76}$$

▷ En efecto, usando de nuevo la ecuación de Klein-Gordon e integrando por partes,

$$\begin{aligned} P^0 = \langle\phi|\, i\partial^0\, |\phi\rangle = \langle\phi|\, i\partial_0\, |\phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int d^3x\ [\phi\partial_0^2\phi - (\partial_0\phi)^2] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^3x\ [\phi\nabla^2\phi - m^2\phi^2 - (\partial_0\phi)^2] \\ &= \ \ \frac{1}{2}\int d^3x\ [(\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + (\partial_0\phi)^2] = \int d^3x\ \theta^{00}, \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} P^i = \langle\phi|\, \mathrm{i}\partial^i \,|\phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [\phi\partial^i\partial_0\phi - \partial_0\phi\partial^i\phi] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\ \partial^i\phi\partial_0\phi = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{i0} = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{0i}. \end{aligned} \tag{78}$$

- Y también,

$$\boxed{M^{0i} = \langle\phi|\, L^{0i} \,|\phi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\ (x^0\theta^{0i} - x^i\theta^{00})} \tag{79}$$

▷ En efecto,

$$\begin{aligned} M^{0i} = \langle\phi|\, L^{0i} \,|\phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [\phi(x^0\partial^i - x^i\partial^0)\partial_0\phi - \partial_0\phi(x^0\partial^i - x^i\partial^0)\phi] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\ \left\{x^0\partial_0\phi\partial^i\phi + \frac{x^i}{2}[\phi\partial_0^2\phi - (\partial_0\phi)^2]\right\} \\ &= \int \mathrm{d}^3x\ \left\{x^0\partial_0\phi\partial^i\phi - \frac{x^i}{2}[(\partial_0\phi)^2 - \phi\nabla^2\phi + m^2\phi^2]\right\}. \end{aligned} \tag{80}$$

- Nótese que, como habíamos anticipado, $L^{\mu\nu}$ y $\mathrm{i}\partial^\mu$ son operadores hermíticos, por lo que tenemos una representación unitaria de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Así que $M^{\mu\nu}$ y P^μ son cantidades reales.

- Finalmente, podemos generalizar la acción de Klein-Gordon para incluir interacciones del campo escalar introduciendo un potencial $V(\phi)$,

$$S = \int \mathrm{d}^4x \, \left\{ \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right] - V(\phi) \right\}. \tag{81}$$

  Términos proporcionales a $\phi^3, \phi^4, \ldots$ en el potencial dan lugar a contribuciones no lineales en las ecuaciones de movimiento, que corresponden a auto-interacciones del campo:

$$(\Box + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \tag{82}$$

- Supongamos ahora un campo escalar complejo,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \tag{83}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son dos campos reales con la misma masa m. Entonces

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}^4x \, (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2) + \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, (\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(x). \end{aligned} \tag{84}$$

Está claro que la ecuación de Klein-Gordon para ϕ es la misma que (65), pues tanto la parte real como la imaginaria la satisfacen. La solución más general es

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^*_{\vec{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \Bigg|_{p^0 = E_{\vec{p}} \equiv + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \tag{85}$$

- La acción de este campo complejo es invariante bajo las transformaciones globales de simetría del grupo U(1),

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi(x), \quad \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\phi^*(x) \tag{86}$$

lo que significa que existe una corriente conservada asociada (tomar $\phi_i = (\phi, \phi^*)$):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu \Rightarrow A_a^\mu(x) = 0 \tag{87}$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(x) \mapsto \phi'(x) = \phi(x) - \mathrm{i}\theta\phi(x) \\ \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) = \phi^*(x) + \mathrm{i}\theta\phi^*(x) \end{array}\right. \Rightarrow \epsilon^a = \theta, \quad \begin{array}{ll} F_{\phi,a} & = -\mathrm{i}\phi \\ F_{\phi^*,a} & = \ \ \mathrm{i}\phi^* \end{array} \tag{88}$$

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}F_{\phi,a} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}F_{\phi^*,a} = \mathrm{i}(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) = \mathrm{i}\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi. \tag{89}$$

- La carga conservada es

$$Q = \int \mathrm{d}^3x \; j^0 = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x \; \phi^* \overleftrightarrow{\partial_0} \phi = \langle \phi | \phi \rangle \,, \quad \partial_t Q = 0, \tag{90}$$

consistente con que el generador de las simetrías $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ es el operador identidad y definiendo el producto escalar de dos campos complejos ϕ_A y ϕ_B como

$$\langle \phi_A | \phi_B \rangle \equiv \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x \; \phi_A^* \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_B. \tag{91}$$

- Consideremos espinores de Weyl ψ_R y ψ_L. Entonces

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L \tag{92}$$

con $\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma})$, $\overline{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$, son cuadrivectores Lorentz.

▷ Para demostrar esto recordemos que

$$\psi_R \mapsto \exp\left\{(-\mathrm{i}\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right\} \psi_R. \tag{93}$$

Consideremos, por ejemplo, un boost infinitesimal de rapidity η en la dirección x,

$$\begin{gathered}
\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^1}{2} \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^1}{2} \psi_R \\
\Rightarrow \quad \begin{array}{lcl}
\psi_R^\dagger \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\
\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R + \eta \delta^{i1} \psi_R^\dagger \psi_R,
\end{array}
\end{gathered} \tag{94}$$

pues $\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij}$.

Vemos que $\psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R$ se transforma bajo ese boost igual que un cuadrivector v^μ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} . \tag{95}$$

Consideremos ahora una rotación infinitesimal θ alrededor del eje z,

$$\psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R \mapsto \psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R + \mathrm{i}\theta\psi_R^\dagger\frac{\sigma^3}{2}\sigma^\mu\psi_R - \mathrm{i}\theta\psi_R^\dagger\sigma^\mu\frac{\sigma^3}{2}\psi_R$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \psi_R^\dagger\psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger\psi_R \\ \psi_R^\dagger\sigma^1\psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger\sigma^1\psi_R - \theta\psi_R^\dagger\sigma^2\psi_R \\ \psi_R^\dagger\sigma^2\psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger\sigma^2\psi_R + \theta\psi_R^\dagger\sigma^1\psi_R \\ \psi_R^\dagger\sigma^3\psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger\sigma^3\psi_R , \end{array} \tag{96}$$

pues $\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2\mathrm{i}\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo esa rotación igual que un cuadrivector v^μ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} . \tag{97}$$

Y análogamente para $\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L$.

- Concentrémonos en ψ_L. Podemos construir la acción más sencilla para estos campos,[a]

$$S = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x\, \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x). \tag{98}$$

El factor i se introduce para que el lagrangiano sea hermítico. Hallemos sus ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando ψ_L y ψ_L^* como campos independientes:

$$\begin{array}{ll} [\psi_L^*]: & \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \\ [\psi_L]: & -\mathrm{i}\partial_\mu \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu = 0 \end{array} \Rightarrow \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \Rightarrow (\partial_0 - \sigma^i \partial_i)\psi_L = 0. \tag{99}$$

(ecuación de Weyl para ψ_L)

[a] Acabamos de probar que $\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L \mapsto \Lambda^\mu{}_\rho \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\rho \psi_L = \psi_L^\dagger \Lambda^\mu{}_\rho \overline{\sigma}^\rho \psi_L$, pues Λ y $\overline{\sigma}$ actúan en distintos espacios. Por otro lado, $\partial_\mu \mapsto \Lambda_\mu{}^\sigma \partial_\sigma$. Entonces, el siguiente término es un escalar Lorentz pues usando:

$$\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \mapsto \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\rho \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\rho g_\rho^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L.$$

- La ecuación de Weyl para ψ_L es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon sin masa para sus dos componentes,

$$\partial_0\psi_L = \sigma^i\partial_i\psi_L \Rightarrow \partial_0^2\psi_L = \nabla^2\psi_L \Rightarrow \Box\psi_L = 0 \tag{100}$$

y además aporta información sobre la helicidad de los distintos modos del campo.

▷ Si tomamos un modo de energía positiva (negativa) de ψ_L,

$$\psi_L(x) = u_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \; (u_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}) \tag{101}$$

con $u_L(\vec{p})$ un espinor constante y $p^\mu = (E, \vec{p})$ donde $E = |\vec{p}|$ (masa cero), y recordamos que

$$\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow (\hat{p}\cdot\vec{J})\, u_L = \frac{1}{2}\hat{p}\cdot\vec{\sigma}\, u_L \equiv h u_L \tag{102}$$

vemos que

$$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = (\partial_0 - \sigma^i\partial_i)u_L\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}px} = \mp\mathrm{i}(E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_L\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}px} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\; u_L = -u_L, \tag{103}$$

lo que significa que los modos de ψ_L son todos de helicidad negativa $h = -\frac{1}{2}$.

- Por otro lado, el tensor energía-momento es

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_L)}\partial^\nu\psi_L - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_L^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial^\nu\psi_L, \tag{104}$$

donde se ha usado que para los campos que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange (99) el lagrangiano $\mathcal{L} = 0$. El hamiltoniano es $\mathcal{H} = \theta^{00} = \mathrm{i}\psi_L^\dagger\partial^0\psi_L$.

- Además la acción es invariante bajo transformaciones globales de simetría del grupo U(1),

$$\psi_L \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\psi_L, \tag{105}$$

así que existe una corriente conservada

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_L)}\mathrm{i}\psi_L = \psi_L^\dagger\overline{\sigma}^\mu\psi_L, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{106}$$

y una carga conservada

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\; j^0 = \int \mathrm{d}^3x\; \psi_L^\dagger\psi_L, \quad \partial_t Q = 0. \tag{107}$$

- Análogamente puede verse que la ecuación de Weyl para ψ_R es

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0 \Rightarrow (\partial_0 + \sigma^i \partial_i)\psi_R = 0, \tag{108}$$

que es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon sin masa para sus dos componentes,

$$\partial_0 \psi_R = -\sigma^i \partial_i \psi_R \Rightarrow \partial_0^2 \psi_R = \nabla^2 \psi_R \Rightarrow \Box \psi_R = 0. \tag{109}$$

Los modos de ψ_R tienen helicidad positiva $h = \frac{1}{2}$. El tensor energía-momento, la corriente y la carga conservada correspondientes son, respectivamente,

$$\theta^{\mu\nu} = \mathrm{i}\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial^\nu \psi_R, \quad j^\mu = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad Q = \int \mathrm{d}^3x\ \psi_R^\dagger \psi_R. \tag{110}$$

- Nótese que, bajo una transformación de Lorentz,

$$\psi_L \mapsto \Lambda_L \psi_L, \quad \psi_R \mapsto \Lambda_R \psi_R, \quad \text{y } \Lambda_L^\dagger \Lambda_R = \Lambda_R^\dagger \Lambda_L = \mathbb{1}. \tag{111}$$

Por tanto, $\psi_L^\dagger \psi_R$ y $\psi_R^\dagger \psi_L$ son escalares Lorentz.

▷ Bajo paridad ($\psi_L \leftrightarrow \psi_R$) las siguientes combinaciones hermíticas se transforman:

$$\begin{aligned} (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto \quad (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad \text{(escalar)} \\ \mathrm{i}(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto -\mathrm{i}(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) \quad \text{(pseudoescalar)} \end{aligned} \tag{112}$$

Así que el lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L}_D = \mathrm{i}\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + \mathrm{i}\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \tag{113}$$

es invariante bajo paridad. El lagrangiano de Weyl no lo es.

- Hallemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} [\psi_L^*]: &\quad \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R = 0 \\ [\psi_L]: &\quad -\mathrm{i}\partial_\mu\psi_L^\dagger\overline{\sigma}^\mu - m\psi_R^\dagger = 0 \\ [\psi_R^*]: &\quad \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L = 0 \\ [\psi_R]: &\quad -\mathrm{i}\partial_\mu\psi_R^\dagger\sigma^\mu - m\psi_L^\dagger = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = m\psi_R \\ \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R = m\psi_L, \end{aligned} \tag{114}$$

que es la ecuación de Dirac en términos de espinores de Weyl.

▷ Nótese que ψ_L y ψ_R ya no son autoestados de helicidad y que las 2 componentes de ψ_L y las de ψ_R satisfacen una ecuación de Klein-Gordon de masa m, pues

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = m\psi_R \Rightarrow (\mathrm{i}\sigma^\nu\partial_\nu)\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = m\mathrm{i}\sigma^\nu\partial_\nu\psi_R \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)\partial_\mu\partial_\nu\psi_L = m^2\psi_L \Rightarrow (\Box + m^2)\psi_L = 0, \end{aligned} \tag{115}$$

donde se ha usado (108) y la identidad $\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Lo mismo para ψ_R,

$$(\Box + m^2)\psi_R = 0. \tag{116}$$

- Es conveniente introducir el campo de Dirac, de 4 componentes,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad \text{(representación quiral)} \tag{117}$$

y definir las matrices gamma de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(representación quiral)}, \tag{118}$$

que satisfacen el álgebra de Clifford,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{119}$$

▷ La ecuación de Dirac queda entonces

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad \not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu. \tag{120}$$

- Podemos escribir el lagrangiano de Dirac de forma compacta introduciendo

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad \text{(espinor adjunto)}. \tag{121}$$

En la representación quiral, $\overline{\psi} = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$ y

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi. \tag{122}$$

- También se define la matriz $\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ que es

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(representación quiral)} \tag{123}$$

Por tanto, los operadores $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$, $\quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ son proyectores sobre los espinores de Weyl ψ_L y ψ_R, respectivamente,

$$P_L\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{124}$$

- Pueden elegirse otras representaciones,

$$\psi'(x) = U\psi(x), \quad \gamma'^{\mu} = U\gamma^{\mu}U^{\dagger}, \quad \overline{\psi}'(x) = \psi'^{\dagger}(x)\gamma'^{0}, \tag{125}$$

donde U es una matriz unitaria constante.

▷ De este modo,

$$\mathcal{L}_D = \psi'^{\dagger}U\gamma^{0}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)U^{\dagger}\psi' = \overline{\psi}'(\mathrm{i}\gamma'^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi', \tag{126}$$

tiene la misma forma que el lagrangiano original.

▷ Además el álgebra de Clifford permanece invariante, $\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$.

- Una representación que se usa con frecuencia es la representación estándar o representación de Dirac, que se obtiene a partir de la quiral mediante

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{127}$$

▷ El campo y las matrices de Dirac quedan

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \\ \psi_R - \psi_L \end{pmatrix} , \tag{128}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{129}$$

▷ La representación de Dirac resulta cómoda en el límite no relativista, mientras que la quiral es más conveniente en el límite ultrarrelativista.

- La solución general de la ecuación de Dirac es una superposición de ondas planas,

$$\psi(x) \equiv u(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \text{ (modos de energía positiva } E > 0\text{)}, \tag{130}$$

$$\psi(x) \equiv v(\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \text{ (modos de energía negativa } -E < 0\text{)}, \quad E = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \tag{131}$$

Aplicando (120) a estas soluciones tenemos

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0. \tag{132}$$

- Hallemos ahora la forma explícita de estas soluciones en la representación quiral:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_L(\vec{p}) \\ u_R(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} v_L(\vec{p}) \\ v_R(\vec{p}) \end{pmatrix}. \tag{133}$$

▷ Tomemos primero el caso $m \neq 0$. Entonces, en el sistema de referencia en reposo,

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

$$(\not{p} - m)u(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 - 1)u(0) = 0 \Rightarrow u_L(0) = u_R(0), \tag{134}$$

$$(\not{p} + m)v(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 + 1)v(0) = 0 \Rightarrow v_L(0) = -v_R(0). \tag{135}$$

Entonces, centrándonos en el espinor de energía positiva $u(\vec{p})$, podemos elegir

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m}\, \xi^{(s)}, \quad s \in \{1, 2\}, \quad \xi^{(r)\dagger}\xi^{(s)} = \delta_{rs},$$

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{136}$$

- Las soluciones para $\vec{p}$ arbitrario se hallan mediante boost en dirección $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$,

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} u_L^{(s)}(0) \\ e^{+\frac{1}{2}\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix}. \tag{137}$$

Desarrollando las exponenciales,

$$e^{\pm\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\eta^{2k} \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\eta^{2k+1}$$

$$= \cosh\eta \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma}\sinh\eta = \frac{1}{m}(E \pm \vec{p}\cdot\vec{\sigma}), \tag{138}$$

con

$$\cosh\eta = \gamma = \frac{E}{m}, \quad \sinh\eta = \gamma\beta = \frac{|\vec{p}|}{m} \tag{139}$$

$$(p\sigma) = p_\mu\sigma^\mu = E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}, \quad (p\bar{\sigma}) = p_\mu\bar{\sigma}^\mu = E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}, \tag{140}$$

$$\Rightarrow u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\; u_L^{(s)}(0) \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})}\; u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\; \xi^{(s)} \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})}\; \xi^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{141}$$

- Otra forma de escribir estas soluciones es

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\xi^{(s)} \\ \left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\xi^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{142}$$

donde se ha usado,

$$\mathrm{e}^{\pm\frac{\eta}{2}\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh\frac{\eta}{2} \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} = \mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}}\left(\frac{1\pm\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}}\left(\frac{1\mp\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) \tag{143}$$

$$\mathrm{e}^{\pm\frac{\eta}{2}} = \sqrt{\cosh\eta \pm \sinh\eta} = \sqrt{\gamma\pm\gamma\beta} = \sqrt{\frac{E\pm|\vec{p}|}{m}}. \tag{144}$$

- Si hacemos el límite ultrarrelativista ($E \gg m$), $p^\mu \to (E, 0, 0, E)$,

$$
\begin{aligned}
u^{(1)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\xi^{(1)} \\ (1+\sigma^3)\xi^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{(1)} \end{pmatrix} \\
u^{(2)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\xi^{(2)} \\ (1+\sigma^3)\xi^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{145}
$$

vemos que $u^{(1)}$ solo tiene componente right-handed y $u^{(2)}$ solo tiene componente left-handed, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida (quiralidad), como corresponde a campos de masa nula.

- Si repetimos el procedimiento para el espinor de energía negativa $v(\vec{p})$ obtenemos

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\, v_L^{(s)}(0) \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})}\, v_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\, \eta^{(s)} \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})}\, \eta^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \eta^{(r)\dagger}\eta^{(s)} = \delta_{rs}, \tag{146}$$

o bien

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\eta^{(s)} \\ -\left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\eta^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{147}$$

- Veremos que resulta conveniente elegir

$$\eta^{(s)} = -\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*} \Rightarrow \eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{148}$$

Entonces, en el límite ultrarrelativista ($E \gg m$), $p^\mu \to (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\eta^{(1)} \\ -(1+\sigma^3)\eta^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^{(2)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\eta^{(2)} \\ -(1+\sigma^3)\eta^{(2)} \end{pmatrix} = -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{149}$$

lo que significa que $v^{(1)}$ solo tiene componente left-handed y $v^{(2)}$ solo tiene componente right-handed, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida y masa nula.

- Introduciendo ahora los correspondientes espinores adjuntos,[a]

$$\overline{u} = u^\dagger \gamma^0, \quad \overline{v} = v^\dagger \gamma^0, \tag{150}$$

que satisfacen las ecuaciones de Dirac,

$$\overline{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0, \quad \overline{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0, \tag{151}$$

pueden demostrarse las siguientes relaciones de ortonormalidad,

$$\overline{u}^{(r)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2m\delta_{rs}, \quad \overline{v}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = -2m\delta_{rs} \tag{152}$$

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\delta_{rs}, \tag{153}$$

$$\overline{u}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = \overline{v}^{(r)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 0 \tag{154}$$

y las relaciones de completitud,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p})\overline{u}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(\vec{p})\overline{v}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} - m. \tag{155}$$

[a] Úsese la identidad $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

- Es importante notar que las 16 matrices,

$$\mathbb{1},\ \gamma_5,\ \gamma^\mu,\ \gamma^\mu\gamma_5,\ \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{156}$$

son linealmente independientes y forman una base para las matrices 4×4. Así que se pueden definir los siguientes bilineales fermiónicos con propiedades de transformación bien definidas (covariantes) bajo transformaciones de Lorentz,

$$\overline{\psi}\psi,\ \overline{\psi}\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \tag{157}$$

- Puede comprobarse también que las transformaciones de Lorentz del campo de Dirac ψ pueden escribirse, en cualquier representación de las matrices gamma, de la forma

$$\psi \mapsto \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right\}\psi, \quad \text{i.e. } J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \tag{158}$$

(Basta comprobar que $J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ satisface el álgebra de Lorentz.)

- Una simetría global interesante que posee el lagrangiano de Dirac sin masa es la simetría quiral,

$$\psi_L \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_L}\psi_L, \quad \psi_R \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_R}\psi_R \quad (\theta_L \text{ y } \theta_R \text{ independientes}), \tag{159}$$

que, en términos del espinor de Dirac, puede escribirse

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi, \quad \psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi \quad (\alpha \text{ y } \beta \text{ independientes}). \tag{160}$$

En efecto, haciendo transformaciones infinitesimales,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi = \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}\alpha)\psi_L \\ (1-\mathrm{i}\alpha)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_R = \theta_L \equiv \alpha \tag{161}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi = \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i}\beta)\psi_L \\ (1-\mathrm{i}\beta)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_R = -\theta_L \equiv \beta. \tag{162}$$

- Como

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha}\psi \Rightarrow \overline{\psi} \mapsto \overline{\psi}e^{i\alpha} \tag{163}$$

$$\psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5}\psi \Rightarrow \overline{\psi} \mapsto \psi^\dagger e^{i\beta\gamma_5}\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 e^{-i\beta\gamma_5} = \overline{\psi}e^{-i\beta\gamma_5}, \tag{164}$$

$$\text{pues } \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \tag{165}$$

la invariancia del lagrangiano bajo ambas transformaciones independientes es clara:

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha}\psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi \mapsto i\overline{\psi}e^{i\alpha}\partial\!\!\!/ e^{-i\alpha}\psi = i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi = \mathcal{L} \tag{166}$$

$$\psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5}\psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi \mapsto i\overline{\psi}e^{-i\beta\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu e^{-i\beta\gamma_5}\psi = i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi = \mathcal{L}. \tag{167}$$

- Hay por tanto dos corrientes conservadas,

$$j_V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{corriente vectorial}), \quad j_A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad (\text{corriente axial}). \tag{168}$$

- Si $m \neq 0$ solo la corriente vectorial se conserva. Basta usar la ecuación de Dirac para comprobarlo:

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi \\ -\mathrm{i}\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu = m\overline{\psi}, \quad \text{pues } \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu \end{array} \tag{169}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \partial_\mu j_V^\mu = \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \mathrm{i}m\overline{\psi}\psi - \mathrm{i}m\overline{\psi}\psi = 0 \\ \partial_\mu j_A^\mu = \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi = \mathrm{i}m\overline{\psi}\gamma_5\psi + \mathrm{i}m\overline{\psi}\gamma_5\psi = 2\mathrm{i}m\overline{\psi}\gamma_5\psi. \end{array} \tag{170}$$

▷ Esto es porque el término de masa $m\overline{\psi}\psi$ solo es invariante si $\theta_R = \theta_L$ pues:

$$\overline{\psi}\psi = \psi_R^\dagger\psi_L + \psi_L^\dagger\psi_R. \tag{171}$$

- Un campo de Majorana es un campo de Dirac autoconjugado,

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \zeta \mathrm{i}\sigma^2 \psi_L^*, \quad |\zeta|^2 = 1. \tag{172}$$

▷ Es evidente que ψ_M puede tener masa a pesar de estar generado por un solo espinor de Weyl. Basta con escribir

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi_M = 0 \Rightarrow \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R = \mathrm{i}\zeta m \sigma^2 \psi_L^* \tag{173}$$

que conduce a una ecuación de Klein-Gordon con masa para ψ_L,

$$(\Box + m^2)\psi_L = 0 \tag{174}$$

independientemente de que ψ_R venga o no dado por ψ_L.

- No escribiremos el lagrangiano clásico para ψ_M porque su término de masa sería proporcional a

$$\overline{\psi}_M \psi_M = (\psi_L^\dagger, -\mathrm{i}\zeta^* \psi_L^\mathrm{T} \sigma^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \mathrm{i}\zeta\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{i}\zeta\psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^* - \mathrm{i}\zeta^*\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2\psi_L = -\mathrm{i}\zeta^*\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2\psi_L + \text{h.c.} \tag{175}$$

que es nulo a no ser que las componentes de ψ_M sean tratadas como cantidades anticonmutantes (variables de Grassmann) pues

$$\mathrm{i}\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2\psi_L = \psi_L^1\psi_L^2 - \psi_L^2\psi_L^1. \tag{176}$$

- Pero lo más interesante es que, si bien el lagrangiano de Dirac es invariante bajo el grupo U(1) de transformaciones globales

$$\psi_L \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi_L, \quad \psi_R \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi_R, \tag{177}$$

  esta simetría no pueden tenerla los campos de Majorana pues las componentes left y right están conjugadas según (172).

▷ Esto significa que un campo de Majorana no puede tener cargas U(1), como la carga eléctrica, el número bariónico o el número leptónico.

▷ ¿Es el neutrino un fermión de Majorana?

- El campo electromagnético viene descrito por el cuadrivector A^μ.

  Definiendo el tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$,
  el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$ son

$$E^i = -F^{0i} = -\partial_t A^i - \nabla^i A^0, \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F^{jk} = (\nabla \times \vec{A})^i, \tag{178}$$

  de donde $F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k$, pues $\epsilon^{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta^{j\ell}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{k\ell}$.

  Es decir:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} .$$

- Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \tag{179}$$

que también puede escribirse $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)$, obtenemos las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Maxwell en el vacío)

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E}} \tag{180}$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell se obtienen a partir del tensor dual $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, cuya cuadridivergencia es nula, pues $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = 0$,

$$\boxed{\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}} \tag{181}$$

Campo electromagnético | Simetría gauge

- El lagrangiano de Maxwell es invariante bajo transformaciones locales $\theta = \theta(x)$ de la forma

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad \text{(transformación de gauge U(1))}. \tag{182}$$

La existencia de esta simetría local implica que $A_\mu(x)$ hace una descripción redundante del campo electromagnético, pues podemos usar la libertad de elección de gauge para restringir $A_\mu(x)$.

▷ Solemos llamar “simetría” a una transformación que deja invariante el lagrangiano (o más bien la acción), pero aunque la invariancia gauge implica la existencia de una simetría global, con consecuencias físicas como la conservación de la carga (teorema de Noether), la invariancia gauge no es una simetría del sistema físico (los estados no se transforman).

▷ Recordemos que la invariancia gauge es necesaria para poder describir partículas sin masa de espín 1 (dos grados de libertad) mediante campos vectoriales de cuatro componentes (dos de ellas son espúreas). La simetría gauge es en realidad una libertad gauge.

Campo electromagnético | Simetría gauge

- Podemos tomar $A_0(x) = 0$ eligiendo

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int^t \mathrm{d}t' \; A_0(t', \vec{x}), \tag{183}$$

pues así $A'_0(x) = A_0(x) - A_0(x) = 0$.

- Podemos también hacer otra transformación, que no cambia la componente A_0,

$$A'_\mu(x) \mapsto A''_\mu(x) = A'_\mu(x) - \partial_\mu \theta(\vec{x}), \quad \theta(\vec{x}) \equiv -\int \frac{\mathrm{d}^3 y}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial A'^i(t, \vec{y})}{\partial y^i}. \tag{184}$$

Aunque no lo parezca, esta θ no depende de t, pues

$$E^i = -F^{0i} = -\partial^0 A'^i + \cancel{\partial^i A'^0} = -\partial^0 A'^i \tag{185}$$

y como $\nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 0$ en ausencia de fuentes tenemos que $\partial_0 \partial_i A'^i = 0$ y por tanto $\partial_0 \theta = 0$. Así que también $A''_0(x) = 0$.

▷ Veamos qué consecuencias tiene la transformación de gauge anterior:

$$\nabla^2\theta(\vec{x}) = -\int \mathrm{d}^3y \, \frac{\partial A'^i(t,\vec{y})}{\partial y^i} \nabla_x^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \right) = \frac{\partial A'^i(x)}{\partial x^i} = \nabla \cdot \vec{A}', \tag{186}$$

donde se ha usado que

$$\nabla_x^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \right) = -\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{187}$$

así que

$$\partial^\mu A''_\mu(x) = \partial^\mu A'_\mu(x) - \partial^\mu\partial_\mu\theta(\vec{x}) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A}'' = \nabla \cdot \vec{A}' - \nabla^2\theta = 0. \tag{188}$$

Es decir podemos tomar también $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. A esta elección,

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{189}$$

que solamente es posible en ausencia de fuentes, se le llama gauge de radiación.

- Otra elección, que puede hacerse siempre, es

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta, \quad \partial_\mu \partial^\mu \theta \equiv \partial_\mu A^\mu \tag{190}$$

de modo que podemos tomar

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{191}$$

Es el llamado gauge de Lorenz.[a] Entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu = 0. \tag{192}$$

Es decir, cada componente de A^μ satisface una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Sus soluciones son de la forma (A^μ es un campo real de masa cero)

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \epsilon^*_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad k^2 = 0. \tag{193}$$

[a]No debe confundirse a L.V. Lorenz (físico y matemático danés), autor del gauge de Lorenz, con H.A. Lorentz (físico holandés, premio Nobel en 1902), que propuso las transformaciones de Lorentz. Tampoco con E.N. Lorenz (matemático y meteorólogo norteamericano), fundador de la teoría del caos, que acuñó el “efecto mariposa” y propuso el atractor de Lorenz.

▷ La condición (191) implica que el vector de polarización $\epsilon^\mu(k)$ satisface

$$k\epsilon = 0. \tag{194}$$

- En el gauge de radiación, compatible con el gauge de Lorenz, el campo es transverso pues la polarización $\epsilon^0 = 0$ y $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$.

- Aclaración: A diferencia de la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, que solo puede imponerse en ausencia de fuentes, la condición $A^0 = 0$ puede usarse siempre, aunque no suele hacerse cuando hay fuentes.

▷ Por ejemplo, consideremos un observador frente a una carga e en reposo a una distancia r. En ese caso se suele tomar

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) = \left(\frac{e}{4\pi r}, 0\right), \tag{195}$$

que conduce al campo electromagnético

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla\phi = \frac{e}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0. \tag{196}$$

Sin embargo, podríamos haber elegido un gauge en el que

$$A'^\mu = (\phi', \vec{A}') = \left(0, -\frac{et}{4\pi r^2}\hat{r}\right), \tag{197}$$

que conduce al mismo campo electromagnético,

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}' - \nabla\phi' = \frac{e}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = 0. \tag{198}$$

Ambas elecciones están conectadas mediante la transformación de gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad \theta(x) = \frac{et}{4\pi r}. \tag{199}$$

- Hallemos ahora el tensor energía-momento. Aplicando el teorema de Noether:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2, \quad F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{200}$$

que no es invariante gauge ni tampoco simétrico!

▷ Podemos simetrizarlo añadiéndole $\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$, que cumple $\partial_\mu\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu) = 0$ y además lo convierte en invariante gauge,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2 + \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu) \\ &= F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2\,, \quad \text{cuando } \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0\,. \end{aligned} \tag{201}$$

▷ Las cargas conservadas bajo transformaciones espaciotemporales son por tanto

$$E = \int \mathrm{d}^3x\ T^{00} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad \text{(energía)} \tag{202}$$

$$\mathbb{P}^i = \int \mathrm{d}^3x\ T^{0i} = \int \mathrm{d}^3x\ (\vec{E}\times\vec{B})^i \quad \text{(vector de Poynting).} \tag{203}$$

- En presencia de fuentes del campo electromagnético (cargas y corrientes) las ecuaciones de Maxwell son

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \rho, \quad \nabla\times\vec{B} = \partial_t\vec{E} + \vec{j}} \qquad j^\mu \equiv (\rho, \vec{j}) \tag{204}$$

$$\boxed{\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}} \tag{205}$$

▷ Nótese que las dos últimas son las mismas que en ausencia de fuentes, debido a que $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = 0$ en cualquier caso. Estas ecuaciones se obtienen al minimizar la acción

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right) = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(x) \, . \tag{206}$$

- La acción es invariante gauge solo si j^μ es una corriente conservada, $\partial_\mu j^\mu = 0$, pues

$$j^\mu A_\mu \mapsto j^\mu A_\mu - j^\mu \partial_\mu \theta \tag{207}$$

y, como $\int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu(\theta j^\mu) = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}^4x\, j^\mu \partial_\mu \theta = -\int \mathrm{d}^4x\, \theta \partial_\mu j^\mu = 0$, tenemos que

$$\int \mathrm{d}^4x\, j^\mu A_\mu \mapsto \int \mathrm{d}^4x\, j^\mu A_\mu \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{208}$$

▷ La invariancia gauge es el principio que guía cómo deben ser las interacciones.

- Veamos cómo funciona el método aplicándolo al lagrangiano de Dirac en presencia de un campo electromagnético. El lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi \tag{209}$$

no es invariante bajo transformaciones de gauge U(1) (transformaciones de fase locales),

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\psi, \quad \overline{\psi} \mapsto \overline{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta(x)}. \tag{210}$$

Sin embargo, el lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{211}$$

sí es invariante bajo la transformación de gauge

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \tag{212}$$

▷ Podemos conseguir un lagrangiano total invariante gauge si cambiamos la derivada ∂_μ por la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu \tag{213}$$

pues entonces

$$\begin{aligned} D_\mu\psi = (\partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu)\psi \mapsto & (\partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu + \mathrm{i}q\partial_\mu\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\psi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}(-\mathrm{i}q\partial_\mu\theta + \partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu + \mathrm{i}q\partial_\mu\theta)\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}D_\mu\psi \end{aligned} \tag{214}$$

y el lagrangiano resultante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eqA_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{215}$$

es invariante gauge.

- De esta forma, hemos introducido una interacción de la forma $j^\mu A_\mu$ (acoplamiento mínimo) entre la corriente fermiónica,

$$j^\mu = eq\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{216}$$

y el campo electromagnético, que nos permite restaurar la simetría local.

▷ Nótese que j^μ es una corriente conservada debida a la invariancia global de $\mathcal{L}_D$ bajo transformaciones de fase U(1). Por tanto, la carga conservada es:

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0(x) = eq\int \mathrm{d}^3x\, \overline{\psi}\gamma^0\psi = eq\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger\psi \quad \text{(carga eléctrica).} \tag{217}$$

▷ Otras interacciones invariantes gauge son posibles, pero involucran términos de interacción con dimensión canónica mayor que cuatro, que deben ir multiplicados por constantes con dimensiones de masa elevada a una potencia negativa.

Por ejemplo, la interacción dipolar magnética: $\mathcal{L} = a\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$, $[a] = M^{-1}$.

Tales acoplamientos surgirán de forma natural al cuantizar la teoría y son correcciones al acoplamiento mínimo de siguiente orden en TP.

- En general si $\{T^a\}$ son los generadores del grupo de simetrías gauge, $\{W^a_\mu(x)\}$ los bosones de gauge asociados a cada generador y $\{\theta^a(x)\}$ los parámetros de la transformación, es fácil comprobar que si los campos se transforman

$$\text{(irrep fundamental)} \qquad \Psi \mapsto U\Psi, \quad U = \exp\{-\mathrm{i}T^a\theta^a(x)\} \tag{218}$$

$$\text{(irrep adjunta)} \qquad \widetilde{W}_\mu \mapsto U\widetilde{W}_\mu U^\dagger - \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \quad \widetilde{W}_\mu \equiv T^a W^a_\mu, \tag{219}$$

(Ψ es un multiplete de campos fermiónicos) introduciendo la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\widetilde{W}_\mu \tag{220}$$

se tiene que

$$D_\mu\Psi \mapsto UD_\mu\Psi \tag{221}$$

y el lagrangiano resultante

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\Psi \tag{222}$$

queda invariante.

▷ Para un grupo de simetrías no abeliano, el lagrangiano invariante de los campos de gauge (211) debe generalizarse e incluye, además de los términos cinéticos, autointeracciones cúbicas y cuárticas fijadas por las constantes de estructura:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2}\text{tr}\left(\widetilde{W}_{\mu\nu}\widetilde{W}^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a,\mu\nu} \tag{223}$$

donde $\mathcal{L}_{\text{YM}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{cubic}} + \mathcal{L}_{\text{quartic}}$ es el lagrangiano de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu)(\partial^\mu W^{a,\nu} - \partial^\nu W^{a,\mu}) \tag{224}$$

$$\mathcal{L}_{\text{cubic}} = -\frac{1}{2}g f^{abc}\,(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu)W^{b,\mu}W^{c,\nu} \tag{225}$$

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4}g^2 f^{abe} f^{cde}\,W^a_\mu W^b_\nu W^{c,\mu}W^{d,\nu} \tag{226}$$

con

$$\widetilde{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\widetilde{W}_\mu - \partial_\nu\widetilde{W}_\mu - \text{i}g[\widetilde{W}_\mu,\widetilde{W}_\nu] \mapsto U\widetilde{W}_{\mu\nu}U^\dagger \tag{227}$$

$$\Rightarrow W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\,f^{abc}W^b_\mu W^c_\nu. \tag{228}$$

Campo electromagnético | Acoplamiento mínimo con la materia

▷ En el caso del grupo U(1) del electromagnetismo el único generador es un múltiplo de la identidad:

$$T = q \text{ (la carga del campo en unidades del acoplamiento } g = e\text{).}$$

En adelante la llamaremos Q_f, pues será la carga eléctrica (en unidades de e) del fermión f que aniquila el campo cuántico ψ.