



Los hadrones y el modelo de quarks



Introducción

Conceptos básicos de Teoría de Grupos

El grupo $SU(2)$

El grupo $SU(3)$

El modelo de quarks

Bariones

Mesones

Masas y momentos magnéticos de los hadrones

Los quarks pesados

Introducción

- En la década de 1960 se descubrieron un gran número de **hadrones**. Sus propiedades pudieron entenderse al *postular* que no eran elementales sino compuestos de **quarks** lo que permitió su *clasificación*
- Los **hadrones** forman multipletes de una simetría *aproximada* $SU(m)$ de sabor
 - * Los **bariones** están compuestos por tres quarks
 - * Los **mesones** están compuestos por un quark y un antiquark
- Los **quarks** (**antiquarks**) viven en la representación $\mathbf{m}^*$ de $SU(m)$
- Los quarks son **fermiones** de espín $\frac{1}{2}$ bajo rotaciones $SU(2)$
- Las **interacciones fuertes** no distinguen el sabor: **partículas idénticas**
- Para respetar el **postulado de simetrización** se introduce el grupo $SU(3)$ de color
- Nos centraremos en $m = 3$ sabores: **u, d, s**

Conceptos básicos de Teoría de Grupos

- Grupo

↔
Simetrías

Espaciotemporales:	Continuas	traslaciones, rotaciones, Lorentz, ...
	Discretas	paridad, inversión temporal, ...
Internas:	Globales	conservación de la carga, ...
	Gauge	interacciones fundamentales
Bajo permutaciones:	Intercambio	partículas idénticas, ...

Ejemplo: **Modelo de quarks** ↔ Simetría interna global y bajo permutaciones

- Representaciones (**irreps**):

Transformaciones de simetría ↔ Operadores

Sistema físico ↔ Espacio vectorial (**invariante e irreducible**)

- El grupo $S_n = \{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\}$ [ciclos: $e, (12), (132), \dots$]
- Grupos de Lie (continuos): **Generadores** (J_a) y **álgebra de Lie** $[J_a, J_b] = i f^{abc} J_c$
- El grupo $SU(m) = \{\text{matrices } m \times m \text{ complejas unitarias con det. unidad}\}$

- Representación fundamental de $SU(m)$: $\square = \mathbf{m}$ (sobre V_m)
- Representación **producto directo** (sobre V_m^n) descomponible gráficamente en irreps (tanto de $SU(m)$ como de S_n) mediante **Tableros de Young** de n casillas

$$|i\rangle \in \text{base de } V_m, \quad |\alpha\rangle = |i_1 i_2 \dots i_n\rangle \in \text{base de } V_m^n, \quad i_k = 1, \dots, m$$

- Cada Tablero de Young θ_λ^p tiene asociado una irrep λ de $SU(m)$ de dimensión $\frac{F}{H}$
Al Tablero de Young Normal θ_λ se asocia el **simetrizador irreducible** $[e_\lambda]$

Ejemplo con $n = 3, m = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right. \theta_\lambda : e_\lambda = [e + (12)][e - (13)]$$

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right. \theta_\lambda^p, \quad p = (23)$$

$$\text{Hay } 2 = \frac{n!}{H} \text{ de dimensión } 2 = \frac{F}{H} = \frac{2 \times 3 \times 1}{3 \times 1 \times 1}$$

- Los siguientes **subespacios vectoriales** de V_m^n son **invariantes e irreducibles**

$$[T'_\lambda(a)] = \{pe_\lambda \mid \alpha\rangle; \mid \alpha\rangle \in V_m^n, \, p \in \theta_\lambda^p \text{ fijo}\} \equiv \left\{ \mid \lambda \alpha \alpha \rangle; \alpha = 1, \dots, \frac{F}{H} \right\} \text{ bajo } SU(m)$$

■ El grupo SU(2)

$$\begin{array}{ll} 2^2 - 1 = 3 & \text{generadores} & : & J_i = \frac{1}{2}\sigma_i & i = 1, 2, 3 \\ 2 - 1 = 1 & \text{generador diagonal} & : & J_3 \end{array}$$

Matrices de Pauli σ_i : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Álgebra de SU(2): $[J_a, J_b] = i\epsilon^{abc}J_c$ (ϵ^{abc} = símbolo de Levi-Civita)

$\Rightarrow$ SU(2) es isomorfo a SO(3) = rotaciones en 3D

– Los **vectores base** $|j, j_3\rangle$ de una irrep son propios de $J = \sum_{i=1}^3 J_i^2$ y de J_3

$$J^2 |j, j_3\rangle = j(j+1) |j, j_3\rangle, \quad J_3 = j_3 |j, j_3\rangle$$

$$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}, \quad j_3 \in \{j, j-1, \dots, -j\}$$

Operador escalera $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$: sube/baja j_3 en 1 unidad, ya que $[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$

– Cada irrep se caracteriza por j y tiene dimensión $d = 2j + 1$

– Las irreps de SU(2) son **reales** (equivalentes a sus complejo-conjugadas)

■ El grupo SU(3)

$$3^2 - 1 = 8 \quad \text{generadores} \quad : \quad F_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad i = 1, \dots, 8$$

$$3 - 1 = 2 \quad \text{generadores diagonales} \quad : \quad F_3, F_8 \text{ (conmutan entre sí)}$$

Matrices de Gell-Mann λ_i :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Leftarrow \text{SU}(2) \subset \text{SU}(3) \\ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Álgebra de SU(3): $[F_a, F_b] = i f^{abc} F_c$. Las constantes de estructura no nulas son:

$$f^{123} = 1, f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f^{147} = f^{156} = f^{246} = f^{247} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2} \text{ y perm. cicl.}$$

Los **vectores base** $|I, I_3, Y\rangle$ de una irrep son propios de $I = \sum_{i=1}^3 F_i^2$, $I_3 = F_3$, $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$

Hay tres operadores escalera (tres subgrupos con simetría SU(2)):

$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2$: sube/baja I_3 en 1 unidad y no cambia Y

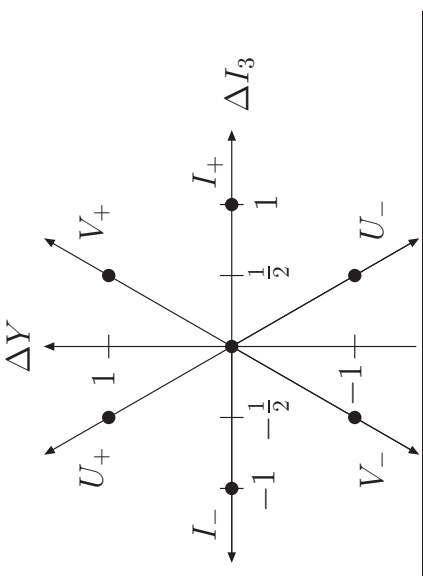
$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7$: baja/sube I_3 en $\frac{1}{2}$ unidad y sube/baja Y en 1 unidad

$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5$: sube/baja I_3 en $\frac{1}{2}$ unidad y sube/baja Y en 1 unidad

$$[I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm} \quad [Y, I_{\pm}] = 0$$

$$[I_3, U_{\pm}] = \mp \frac{1}{2} U_{\pm} \quad [Y, U_{\pm}] = \pm U_{\pm}$$

$$[I_3, V_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} V_{\pm} \quad [Y, V_{\pm}] = \pm V_{\pm}$$



Notación de pesos:

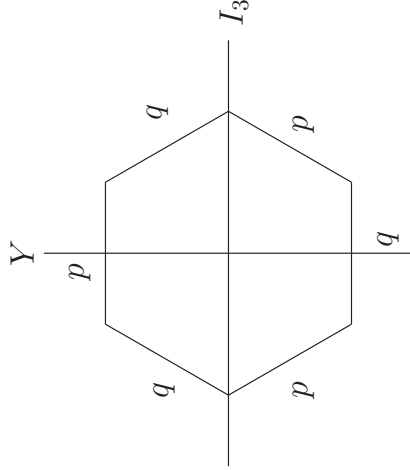
Cada irrep se caracteriza por dos números naturales (p, q)

La dimensión de la irrep es $d = \frac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2}$.

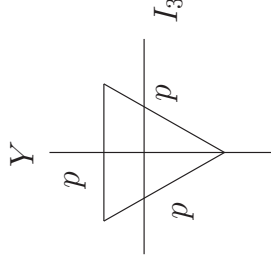
La irrep complejo-conjugada de la (p, q) es la (q, p) y no son equivalentes, en general.

Cada irrep (p, q) está generada por los estados dados por los puntos en el plano

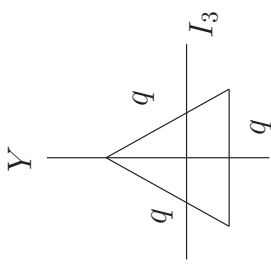
(I_3, Y) cuya frontera son el hexágono o triángulo siguientes:



(p, q)

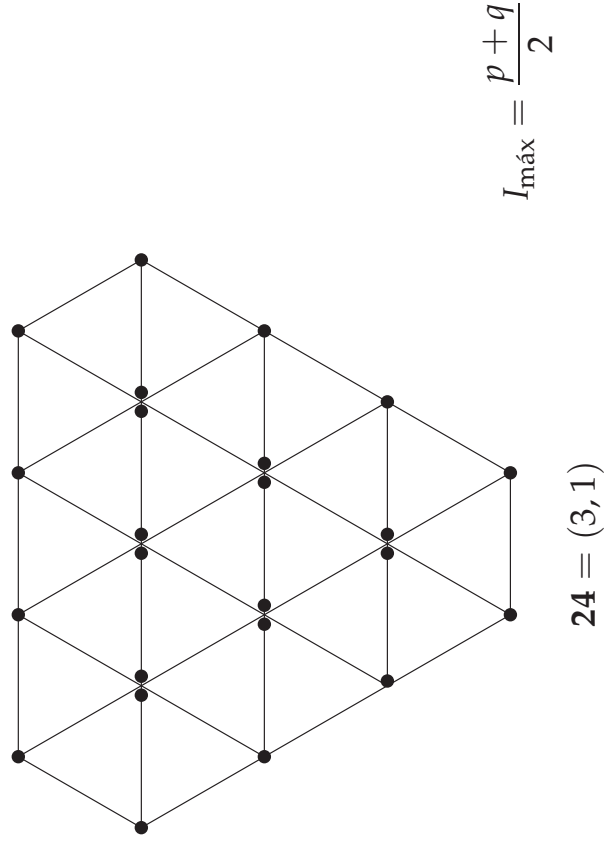


$(p, 0)$

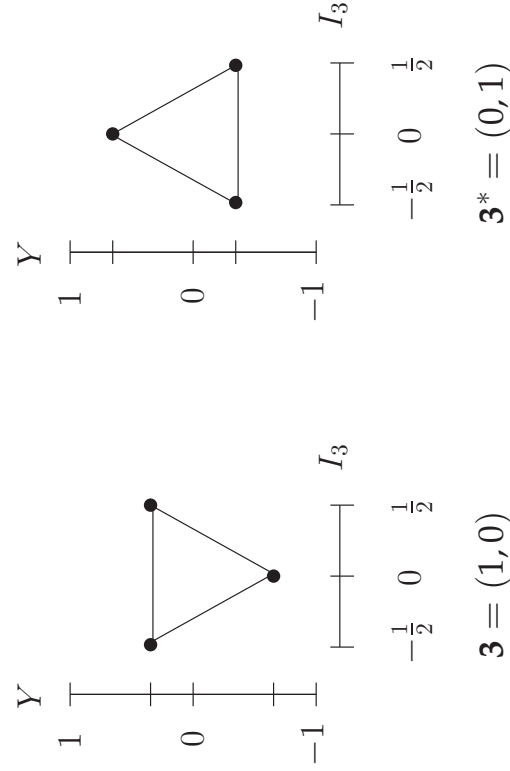


$(0, q)$

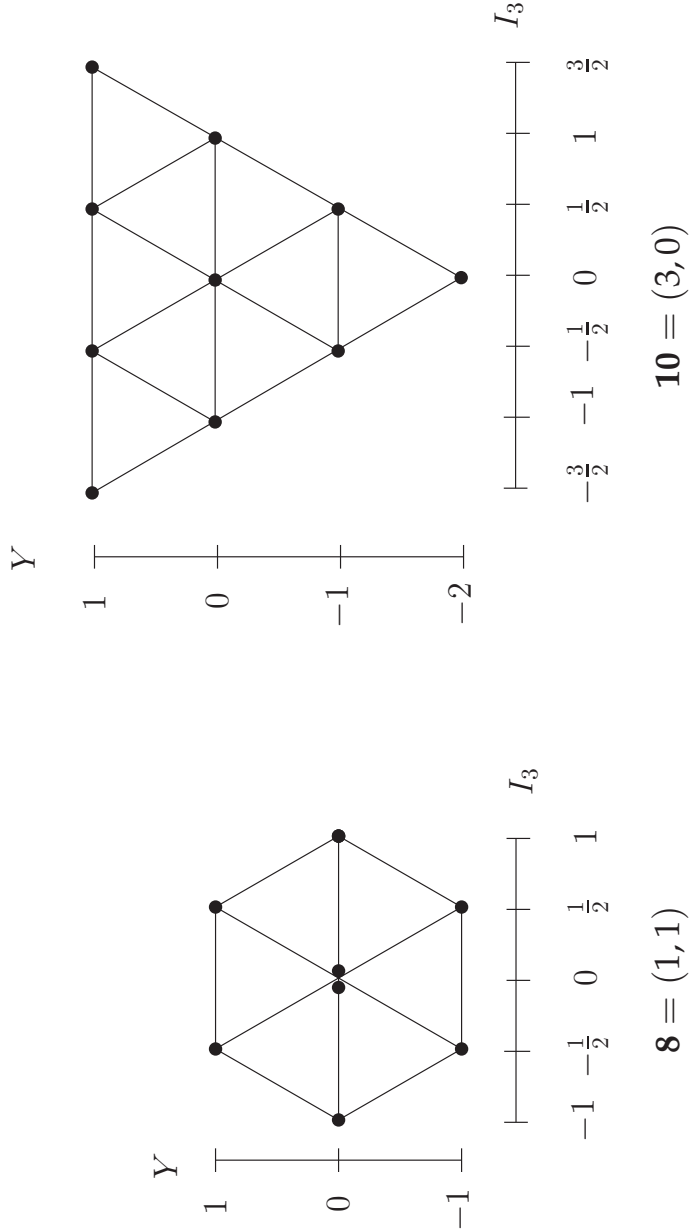
Puede haber más de un estado con los mismos (I_3, Y) (tienen distinto I). Los estados del borde exterior de (p, q) tienen **ocupación** 1, los de la capa siguiente $(p-1, q-1)$ ocupación 2, y así sucesivamente hasta que se alcanza un nivel en el que la ocupación permanece $q+1$ si $p > q$ o $p+1$ si $p < q$:



Ejemplos:



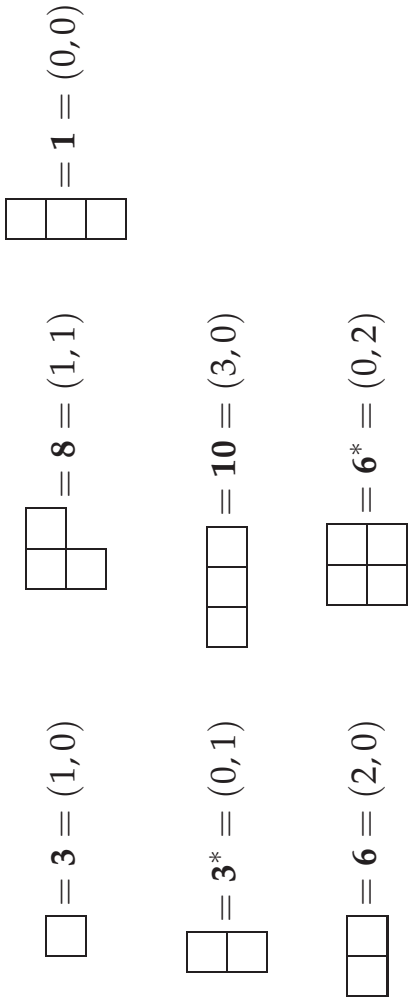
Ejemplos:



Relación entre la notación de pesos (p, q) y los tableros de Young:

p es el número de casillas de la primera fila que sobrepasan a las de la segunda fila y q es el número de casillas de la segunda fila que sobrepasan a las de la tercera fila.

Ejemplos:



El modelo de quarks

[Gell-Mann '62, Neeman '61, Zweig '64]

- Los **quarks** (u, d, s) son base de la representación fundamental de **SU(3)**

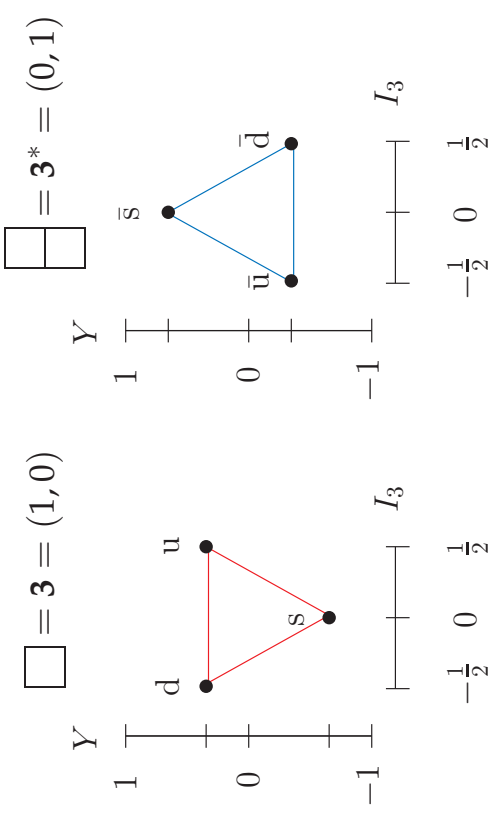
Sus números cuánticos (**isospín** I e **hipercarga** Y) son:

[Se toma: $I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \text{diag}\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$, $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\lambda_8 = \text{diag}\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\}$]

Quark	Q	I	I_3	Y
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
s	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

[Q = carga eléctrica / ($e > 0$)]



Los **antiquarks** ($\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$) tienen todas las cargas opuestas

- Cada quark tiene espín $\frac{1}{2}$ bajo el grupo **SU(2)** de las rotaciones

El modelo de quarks

13

Bariones

SU(2): Tres quarks de espín $\frac{1}{2}$ $\{\uparrow, \downarrow\}$

$$\square \times \square \times \square = \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$

λ	$\{ \lambda\alpha\alpha\rangle\}$	Bases ortonormales	Espín S
 Simétrica	$e_s \uparrow\uparrow\uparrow\rangle$	$\chi_S(+\frac{3}{2}) = \uparrow\uparrow\uparrow\rangle$	$\frac{3}{2}$
	$e_s \uparrow\uparrow\downarrow\rangle$	$\chi_S(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$	
	$e_s \downarrow\downarrow\uparrow\rangle$	$\chi_S(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \uparrow\downarrow\downarrow\rangle)$	
	$e_s \downarrow\downarrow\downarrow\rangle$	$\chi_S(-\frac{3}{2}) = \downarrow\downarrow\downarrow\rangle$	
	$e_m \uparrow\uparrow\downarrow\rangle$	$\chi_{M_S}(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$	$\frac{1}{2}$
 Mixtas	$e_m \downarrow\downarrow\uparrow\rangle$	$\chi_{M_S}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \downarrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$	
	$(23)e_m \uparrow\uparrow\downarrow\rangle$	$\chi_{M_A}(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$	
	$(23)e_m \downarrow\downarrow\uparrow\rangle$	$\chi_{M_A}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\downarrow\rangle)$	

Con $|1\rangle \equiv e_m |\alpha\rangle$ y $|2\rangle \equiv (23)e_m |\alpha\rangle$ se construye el vector unitario $\frac{|2\rangle - \langle 1|2\rangle|1\rangle}{\| |2\rangle - \langle 1|2\rangle|1\rangle \|} \perp |1\rangle$

El modelo de quarks

Bariones en SU(3)

14

SU(3): Tres quarks $q_1 q_2 q_3$ con sabores $q_i \in \{u, d, s\}$

$$\square \times \square \times \square = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A$$

λ	$\{ \lambda aa\rangle\}$	Base ortonormal
$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ Simétrica	$\mathbf{10}_S$	$\psi_S(uuu) = uuu\rangle$ $\psi_S(uud) = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud\rangle + udu\rangle + duu\rangle)$ $\psi_S(duu) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + udd\rangle)$ $\psi_S(ddd) = ddd\rangle$ $\psi_S(uus) = \frac{1}{\sqrt{3}}(uus\rangle + usu\rangle + sus\rangle)$ $\psi_S(uds) = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds\rangle + dus\rangle + sud\rangle + dsu\rangle + dsu\rangle + dsu\rangle)$ $\psi_S(dds) = \frac{1}{\sqrt{3}}(dds\rangle + dsd\rangle + sds\rangle)$ $\psi_S(ssu) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ssu\rangle + sus\rangle + uss\rangle)$ $\psi_S(ssd) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ssd\rangle + sds\rangle + dss\rangle)$ $\psi_S(sss) = sss\rangle$

El modelo de quarks

Bariones en SU(3)

15

λ	$\{ \lambda aa\rangle\}$	Bases ortonormales
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ Mixtas	$e_m uud\rangle$	$\psi_{M_S}(uud) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle - duu\rangle - udu\rangle)$
	$e_m ddu\rangle$	$\psi_{M_S}(ddu) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ddu\rangle - udd\rangle - dud\rangle)$
	$e_m uus\rangle$	$\psi_{M_S}(uus) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 uus\rangle - suu\rangle - usu\rangle)$
	$e_m dds\rangle$	$\psi_{M_S}(dds) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 dds\rangle - sdd\rangle - dsd\rangle)$
	$e_m uds\rangle$	$\psi_{M_S}(uds) = \frac{1}{2}(uds\rangle + dus\rangle - sdu\rangle - dsu\rangle)$
	$e_m usd\rangle$	$\psi_{M_S}^\perp(usd) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 usd\rangle + 2 sud\rangle - uds\rangle)$
	$e_m ssu\rangle$	$\psi_{M_S}(ssu) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssu\rangle - uss\rangle - sus\rangle)$
	$e_m ssd\rangle$	$\psi_{M_S}(ssd) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssd\rangle - dss\rangle - sds\rangle)$
	$(23)e_m uud\rangle$	$\psi_{M_A}(uud) = \frac{1}{\sqrt{2}}(udu\rangle - duu\rangle)$
	$(23)e_m ddu\rangle$	$\psi_{M_A}(ddu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dud\rangle - udd\rangle)$
$\mathbf{8}_{M_A}^\#$	$(23)e_m uus\rangle$	$\psi_{M_A}(uus) = \frac{1}{\sqrt{2}}(usu\rangle - suu\rangle)$
	$(23)e_m dds\rangle$	$\psi_{M_A}(dds) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dsd\rangle - sdd\rangle)$
	$(23)e_m uds\rangle$	$\psi_{M_A}(uds) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 usd\rangle - 2 sud\rangle + uds\rangle - dus\rangle + dsu\rangle - dsu\rangle)$
	$(23)e_m usd\rangle$	$\psi_{M_A}^\perp(usd) = \frac{1}{2}(uds\rangle - dus\rangle + sdu\rangle - dsu\rangle)$
	$(23)e_m ssu\rangle$	$\psi_{M_A}(ssu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(uss\rangle - suu\rangle)$
	$(23)e_m ssd\rangle$	$\psi_{M_A}(ssd) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dss\rangle - duu\rangle)$

El modelo de quarks

Bariones en SU(3)

16

Estados simetrizados

Decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$

$$\psi_S(q_1 q_2 q_3) \chi_S(m_I)$$

$$m_I \in \left\{ +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$$

Barión	Quarks	Función de onda
Δ^{++}	uuu	$ uuu\rangle \chi_S(m_I)$
Δ^+	uud	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud\rangle + udu\rangle + duu\rangle) \chi_S(m_I)$
Δ^0	udd	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + udd\rangle) \chi_S(m_I)$
Δ^-	ddd	$ ddd\rangle \chi_S(m_I)$
Σ^{*+}	uus	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus\rangle + usu\rangle + sus\rangle) \chi_S(m_I)$
Σ^{*0}	uds	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds\rangle + dus\rangle + usd\rangle + sdu\rangle + sud\rangle + dsu\rangle) \chi_S(m_I)$
Σ^{*-}	dds	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds\rangle + dsd\rangle + sds\rangle) \chi_S(m_I)$
Ξ^{*0}	uss	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssu\rangle + sus\rangle + uss\rangle) \chi_S(m_I)$
Ξ^{*-}	dss	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssd\rangle + sds\rangle + dss\rangle) \chi_S(m_I)$
Ω^-	sss	$ sss\rangle \chi_S(m_I)$

El modelo de quarks

Bariones en SU(3)

17

Octete $J^P = \frac{1}{2}^+$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{M_S}(q_1 q_2 q_3) \chi_{M_S}(m_I) + \psi_{M_A}(q_1 q_2 q_3) \chi_{M_A}(m_I) \right]$$

$$m_I \in \left\{ +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

Barión	Quarks	Función de onda ($m_I = +\frac{1}{2}$)
p	uud	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ 2(u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle) \right. \\ \left. - (u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle + u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle) \right. \\ \left. - (u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle) \right\}$
n	udd	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ 2(d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle) \right. \\ \left. - (d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle + d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle) \right. \\ \left. - (d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow\rangle + d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle) \right\}$
Σ^+	uus	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ 2(u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle + s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow\rangle) \right. \\ \left. - (u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle + u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle) \right. \\ \left. - (u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle + s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle) \right\}$
Σ^-	dds	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ 2(d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle + s^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle) \right. \\ \left. - (d^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle + s^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle + d^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle) \right. \\ \left. - (d^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle + d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle + d^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle) \right\}$

El modelo de quarks

Bariones en SU(3)

18

Barión	Quarks	Función de onda ($m_J = +\frac{1}{2}$)
Σ^0	uds	$\frac{1}{6}\{(\text{usd}\rangle + \text{sdu}\rangle)(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle) + (\text{dus}\rangle + \text{usd}\rangle)(2 \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle) + (\text{sdu}\rangle + \text{dus}\rangle)(2 \uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)\}$
Λ^0	uds	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(\text{usd}\rangle - \text{sdu}\rangle)(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle) + (\text{dus}\rangle - \text{usd}\rangle)(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle) + (\text{sdu}\rangle - \text{dus}\rangle)(\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle)\}$
Ξ^0	uss	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\{2(\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{u}^\downarrow\rangle + \text{u}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{u}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle) - (\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{u}^\uparrow\rangle + \text{u}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{u}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle) - (\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{u}^\uparrow\rangle + \text{u}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\downarrow\text{u}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle)\}$
Ξ^-	dss	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\{2(\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{d}^\downarrow\rangle + \text{d}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{d}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle) - (\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{d}^\uparrow\rangle + \text{d}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{d}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle) - (\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{d}^\uparrow\rangle + \text{d}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\downarrow\text{d}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle)\}$

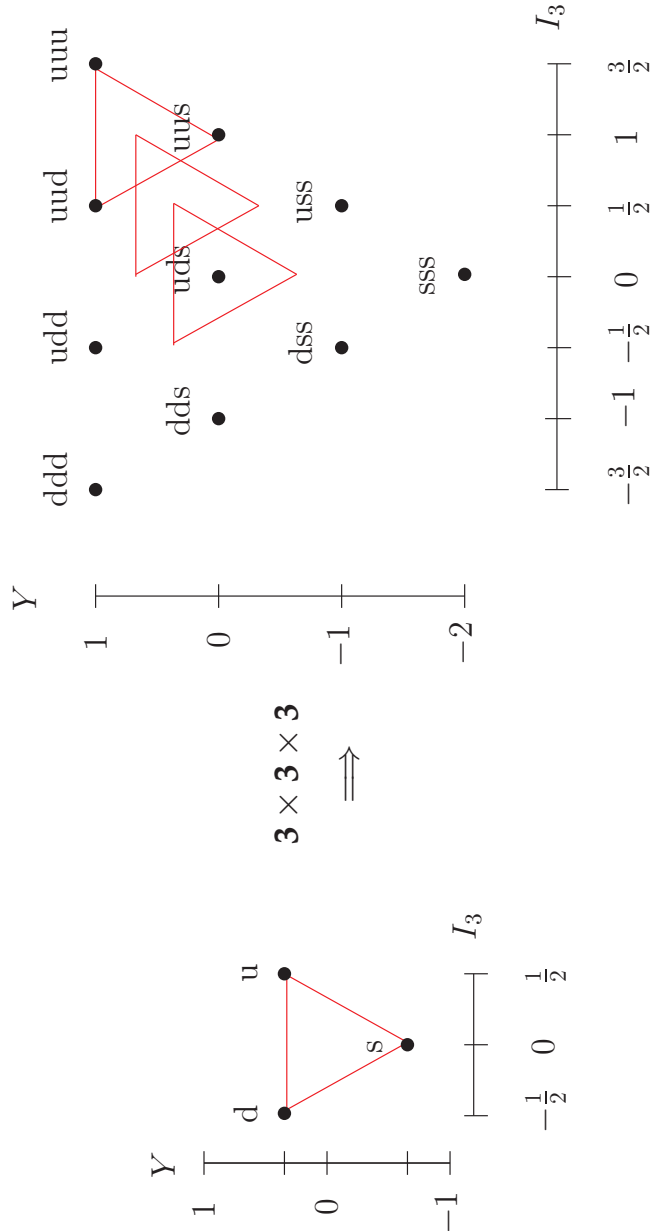
- El **estado fundamental** tiene **momento angular orbital** $L = 0$. Por tanto el momento angular total del barión (su espín) J coincide con la suma vectorial de los espines de los tres quarks S . Su **paridad** es $P = (-1)^L$
 - La total simetría del estado fundamental [espacial] $\times$ [espín] $\times$ [sabor] ocasiona un conflicto con el **postulado de simetrización**: esperamos que bajo el intercambio de **fermiones idénticos** la **función de onda** debe ser **antisimétrica**.
- Para solucionar este problema se supone que los quarks son la representación fundamental de una **simetría SU(3) de color** que, a diferencia de la SU(3) de sabor, es **exacta**: los quarks pueden tener color rojo (**R**), verde (**G**) o azul (**B**). Se postula que **los hadrones son neutros de color**, es decir, pertenecen a la representación singlete de SU(3) de color.

Así los bariones pertenecen a la representación antisimétrica $\mathbf{1}_A$ de SU(3) de color:

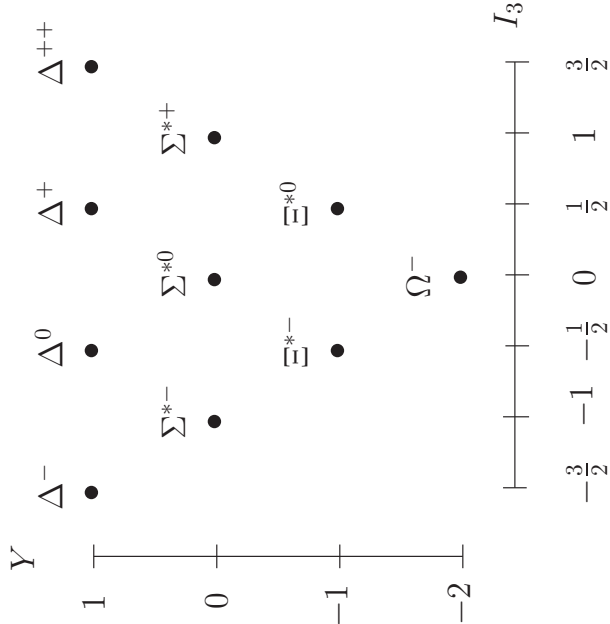
$$e_a |\text{RGB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\text{RGB}\rangle - |\text{GRB}\rangle - |\text{RBG}\rangle - |\text{BGR}\rangle + |\text{BRG}\rangle + |\text{GBR}\rangle)$$

de modo que la función de onda [espacial] $\times$ [espín] $\times$ [sabor] $\times$ [color] es en efecto antisimétrica.

Los números cuánticos de los multipletes de bariones

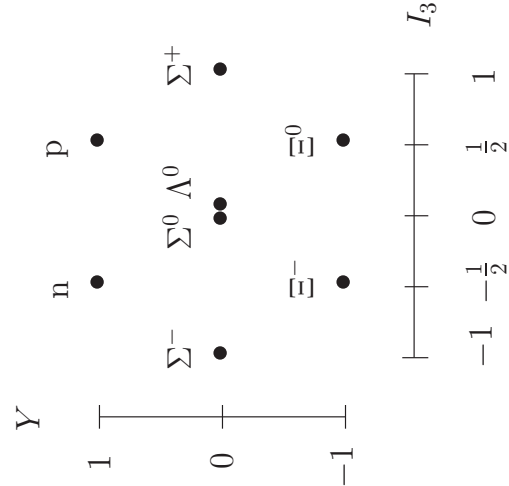


Decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$ ($L = 0, S = \frac{3}{2}$)



	Quarks	I	I_3	Y	M [MeV]
Δ^{++}	uuu	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1232
Δ^{+}	uud	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1232
Δ^0	udd	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1232
Δ^{-}	ddd	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	1232
Σ^{*+}	uus	1	1	0	1383
Σ^{*0}	uds	1	0	0	1384
Σ^{*-}	dds	1	-1	0	1387
Ξ^{*0}	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1530
Ξ^{*-}	dss	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1530
Ω^{-}	sss	0	0	-2	1672

Octete $J^P = \frac{1}{2}^+$ ($L = 0, S = \frac{1}{2}$)



	Quarks	I	I_3	Y	M [MeV]
p	uud	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	938
n	udd	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	939
Λ^0	uds	0	0	0	1115
Σ^+	uus	1	1	0	1189
Σ^0	uds	1	0	0	1192
Σ^-	dds	1	-1	0	1197
Ξ^0	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1314
Ξ^-	dss	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1321

Mesones

SU(2): Un quark y un antiquark, ambos de espín $\frac{1}{2}$

$$\square \times \square = \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$

λ	$\{ \lambda\alpha a\rangle\}$	Base ortonormales	Espín S
Simétrica	$e_s \begin{vmatrix} \uparrow \uparrow \\ \end{vmatrix}$ $e_s \begin{vmatrix} \uparrow \downarrow \\ \end{vmatrix}$ $e_s \begin{vmatrix} \downarrow \downarrow \\ \end{vmatrix}$	$\chi_S(+1) = \begin{vmatrix} \uparrow \uparrow \\ \end{vmatrix}$ $\chi_S(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{vmatrix} \uparrow \downarrow \\ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \downarrow \uparrow \\ \end{vmatrix})$ $\chi_S(-1) = \begin{vmatrix} \downarrow \downarrow \\ \end{vmatrix}$	1
Antisimétrica	$e_a \begin{vmatrix} \uparrow \downarrow \\ \end{vmatrix}$	$\chi_A(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{vmatrix} \uparrow \downarrow \\ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \downarrow \uparrow \\ \end{vmatrix})$	0

SU(3): Un quark q y un antiquark $\bar{q}$ de sabores $q \in \{u, d, s\}, \bar{q} \in \{\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}\}$

$$\square \times \square = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

- Nota: El grupo SU(3) de sabor posee un subgrupo SU(2) de isospín I . Los **multipletes de isospín** de las **antipartículas** deben ser definidos con cuidado (deben transformarse igual y tener I_3 **opuesto**). Así, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_2}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

I	I_3	Estado
1	1	$-\bar{u}\bar{d}$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{u} - \bar{d}\bar{d})$
1	-1	$\bar{d}\bar{u}$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d})$

El modelo de quarks

Mesones en SU(3)

25

	Base ortonormal	I	I_3	Y
1	$ C\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d} + \bar{s}\bar{s})$	0	0	0
	$ B\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d} - 2\bar{s}\bar{s})$	0	0	0
	$ A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{u} - \bar{d}\bar{d})$	1	0	0
	$-\bar{u}\bar{d}$	1	1	0
	$\bar{d}\bar{u}$	1	-1	0
	$\bar{u}\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
8	$\bar{d}\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	$\bar{s}\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
	$\bar{s}\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

(No hay simetría de intercambio)
 $\leftarrow$ Este deber ser el singlete
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}} \right\}$ Ortogonales a $|C\rangle$ con $I_3 = Y = 0$
 $\downarrow$ Los seis estados restantes

- Los estados $|B\rangle$ (octete) y $|C\rangle$ (singlete) no se mezclan bajo transformaciones de SU(3) pero tienen los mismos $I = Y = 0$. **Pueden superponerse**. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} L = 0, S = 0: \quad |\eta\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d} - 2\bar{s}\bar{s}), & |\eta'\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d} + \bar{s}\bar{s}) \\ L = 1, S = 0: \quad |\omega\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d}), & |\phi\rangle &\approx \bar{s}\bar{s} \end{aligned}$$

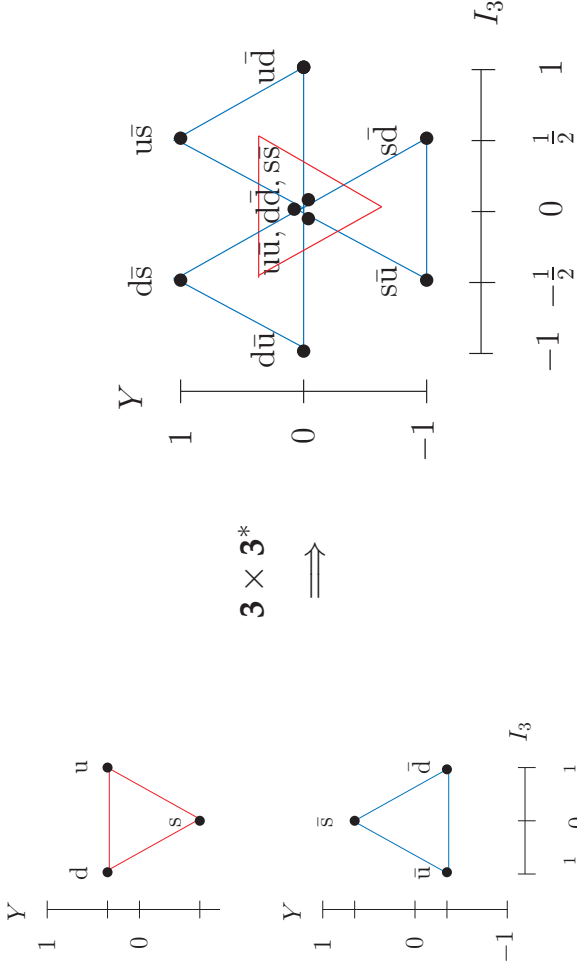
El modelo de quarks

Mesones en SU(3)

26

Los números cuánticos de los multipletes de mesones

- El espín J del mesón es la suma vectorial de L y S del sistema quark-antiquark.
- La paridad es el producto de la paridad intrínseca y la extrínseca $P = -(-1)^L$
- Un mesón **neutro** es autoestado de conjugación de carga con $C = (-1)^{L+S}$



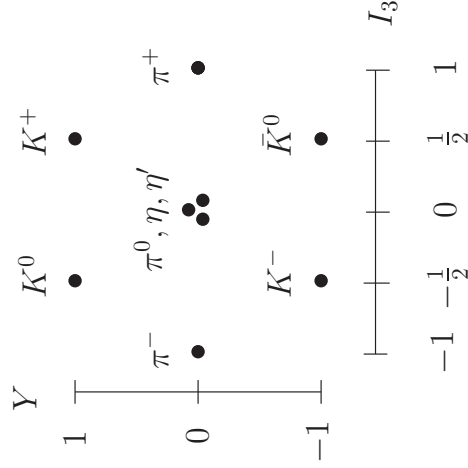
El modelo de quarks

Mesones en SU(3)

27

Nonete $J^P = 0^-$ ($L = 0, S = 0$)

(octete y singlete casi **no se mezclan**)



Nota: π^0, η y η' tienen $J^{PC} = 0^{-+}$

	Función de onda*	I	I_3	Y	M [MeV]
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	1	0	0	135
π^+	$-u\bar{d}$	1	1	0	140
π^-	$d\bar{u}$	1	-1	0	140
η	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	0	0	0	547
K^+	$u\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	493
K^-	$s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	493
K^0	$d\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	498
$\bar{K}^0$	$-s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	498
η'	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	0	0	0	958

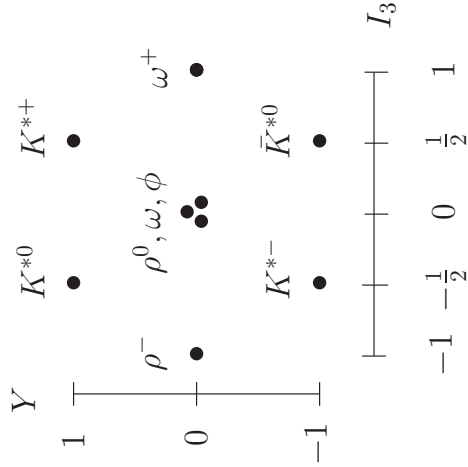
*[multiplicar por $\chi_A(0)$]

El modelo de quarks

Mesones en SU(3)

28

Nonete $J^P = 1^-$ ($L = 1, S = 0$)



Nota: ρ^0, ω y ϕ tienen $J^{PC} = 1^{--}$

(octete y singlete se mezclan)

	Funci3n de onda*	I	I ₃	Y	M [MeV]
ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	1	0	0	775
ρ^+	$-\bar{u}d$	1	1	0	775
ρ^-	$d\bar{u}$	1	-1	0	775
ω	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	0	0	0	782
K^{*+}	$u\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	892
K^{*-}	$s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	892
K^{*0}	$d\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	892
$\bar{K}^{*0}$	$-\bar{s}d$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	892
ϕ	$s\bar{s}$	0	0	0	1020

*[multiplicar por $\chi_S(m_I)$]

Masas y momentos magn3ticos de los hadrones

Diferencias de masa en multipletes de isosp3n

Atribuir las a la interacci3n el3ctrica entre quarks constituyentes y $m_u \neq m_d \neq m_s$.

Por ejemplo, para los hiperones Σ :

$$\Sigma^+(1189) = uus \quad \Sigma^0(1192) = uds \quad \Sigma^-(1197) = dds$$

tendr3amos, suponiendo interacci3n el3ctrica entre pares de quarks,

$$\begin{aligned} M_{\Sigma^+} &= M_0 + m_s + 2m_u + (Q_u^2 + Q_u Q_s + Q_u Q_s)\delta \\ M_{\Sigma^0} &= M_0 + m_s + m_d + m_u + (Q_u Q_d + Q_u Q_s + Q_d Q_s)\delta, \quad \delta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \\ M_{\Sigma^-} &= M_0 + m_s + 2m_d + (Q_d^2 + Q_d Q_s + Q_d Q_s)\delta \end{aligned}$$

de donde

$$m_d - m_u = \frac{1}{3} [M_{\Sigma^-} + M_{\Sigma^0} - 2M_{\Sigma^+}] = 3.7 \text{ MeV}$$

que confirma la similitud entre los quarks del doblete de isosp3n $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$.

■ Masas de los bariones

Las masas de los hadrones de un mismo multiplete no son iguales. Suponer que el hamiltoniano de la interacción fuerte H contiene un término H' que rompe SU(3):

$$H = H_0 + H'$$

donde H' conmuta con los generadores diagonales I_3 e Y . [vid. valores tablas]

Fórmula de Gell-Mann–Okubo (empírica, consistente con lo anterior)

$$\text{para bariones:} \quad M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

$\Rightarrow$ Decuplete de bariones $J^P = \frac{3}{2}^+$, cumplen $Y = 2(I-1)$:

$$M = A + BY \quad [A \approx 1380 \text{ MeV}, \quad B \approx -150 \text{ MeV}]$$

$\Rightarrow$ Octete de bariones $J^P = \frac{1}{2}^+$:

$$3M_{\Lambda^0} + M_{\Sigma^0} = 2M_n + 2M_{\Xi^0} \quad [\text{se cumple con una precisión del 5\%}]$$

■ Masas de los mesones

Suponer que la relación entre masas es cuadrática.

Fórmula de Gell-Mann–Okubo

$$\text{para mesones:} \quad M^2 = M_0^2 + M_1^2 Y + M_2^2 \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

$\Rightarrow$ Octete de mesones pseudoescalares $J^P = 0^-$:

$$3M_\eta^2 + M_{\pi^0}^2 = 2M_{K^0}^2 + 2M_{\bar{K}}^2$$

y como $M_{K^0} = M_{\bar{K}}$ se obtiene finalmente

$$3M_\eta^2 + M_{\pi^0}^2 = 4M_{K^0}^2$$

que se cumple con una precisión del 8%.

■ Momentos magnéticos de los bariones

El operador momento dipolar magnético de un fermión sin estructura, de espín $\frac{1}{2}$, carga Q y masa m es:

$$\vec{\mu} = Q \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \equiv \mu \vec{\sigma}$$

Para un barión constituido por tres quarks $i = 1, 2, 3$ el modelo de quarks predice

$$\vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i \implies \boxed{\mu_{\text{barión}} = \langle \psi | \sum_i \mu_i \sigma_{3_i} | \psi \rangle}$$

donde ψ es su función de onda en el estado de $m_J = J$.

Teniendo en cuenta que sólo se están considerando las contribuciones de los quarks de valencia (quarks constituyentes), el éxito del modelo es bastante bueno, como muestra la siguiente tabla.

	Modelo de quarks	μ / μ_N	Experimento μ / μ_N
p	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$	—	$+2.792\,847\,351 \pm 0.000\,000\,028$
n	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$	—	$-1.913\,042\,7 \pm 0.000\,000\,5$
Λ^0	μ_s	—	-0.613 ± 0.004
Σ^+	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s)$	$+2.67$	$+2.458 \pm 0.010$
Σ^0	$\frac{1}{3}(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)$	$+0.79$	—
Σ^-	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s)$	-1.09	-1.160 ± 0.025
Ξ^0	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u)$	-1.43	-1.250 ± 0.014
Ξ^-	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d)$	-0.49	-0.6507 ± 0.0025
Ω^-	$3\mu_s$	-1.84	-2.02 ± 0.05

donde se ha usado como unidad el magnetón nuclear $\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p}$

Nota: Si suponemos $m_u = m_d$, el modelo de quarks predice $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} \approx -0.667$, bastante de acuerdo con el valor experimental $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -0.685$

Los quarks pesados

El quark c (mesón J/ψ : SLAC y Brookhaven, 1974; $m_c \approx 1.5 \text{ GeV}$)

Se introduce un cuarto sabor, ampliándose la simetría a $SU(4)$.

El quark b (mesón Υ : Fermilab, 1977; $m_c \approx 4.5 \text{ GeV}$)

Se introduce un quinto sabor, ampliándose la simetría (aún más aproximada) a $SU(5)$.

El quark t ($pp \rightarrow t\bar{t} + X$: Fermilab, 1994; $m_t \approx 170 \text{ GeV}$)

Tan pesado que puede decaer débilmente: $t \rightarrow Wb$ antes de hadronizarse.

Números cuánticos (conservados en interacciones fuertes).

Quark	Q	I	I_3	S	C	B	T
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1	0	0
b	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	0
t	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	1

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

$$Y = \mathcal{B} + S + C + B + T$$

$\mathcal{B}$ = número bariónico = $\frac{1}{3}$

S = strangeness

C = charm

B = beauty o bottomness

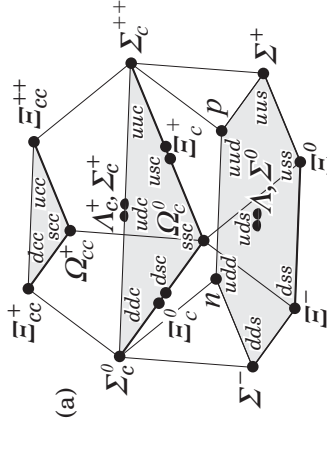
T = topness

Los quarks pesados

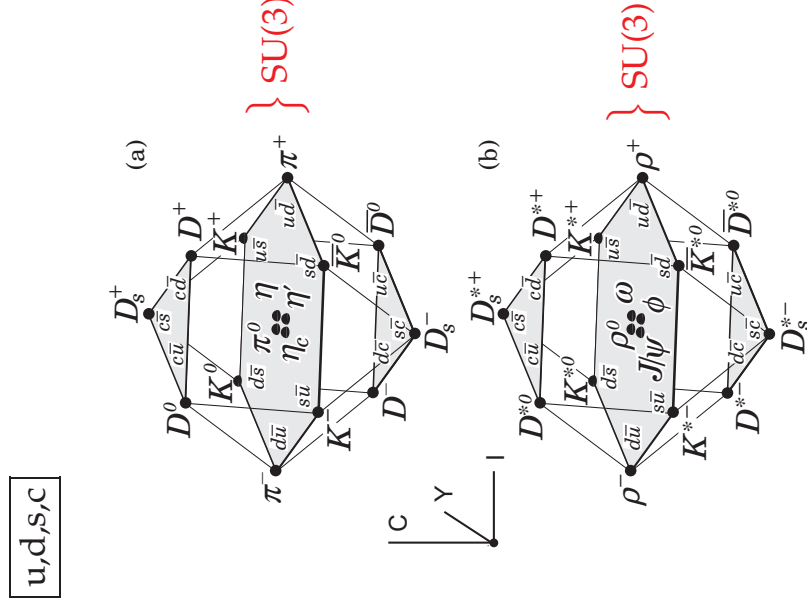
c, b y t

35

SU(4)



SU(3)



SU(3)

Bariones

Mesones

Los quarks pesados

$SU(4)$

36