Rotaciones en un espacio 3-dimensional: SO(3)

Ejercicio 1: Ángulos de Euler

Demuestra que

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{pmatrix}.$$

y que se puede expresar en términos de rotaciones eje-ángulo de dos formas distintas:

$$\begin{aligned} R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(\gamma) \quad \text{(ejes fijos)} \\ R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_{\hat{z}'}(\gamma)R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}}(\alpha) \quad \text{(ejes solidarios con el vector rotado).} \end{aligned}$$

Ejercicio 2: Relación entre las parametrizaciones de Euler y de eje-ángulo

Deriva la relación entre los ángulos de Euler (α,β,γ) y los parámetros (ψ,θ,ϕ).

Ejercicio 3: Álgebra de SO(3)

Un modo alternativo de escribir el álgebra de SO(3) puede obtenerse definiendo $J^{kl}=\epsilon^{klm}J_m$ como generador para las rotaciones en el plano $k-l$ (nota que $J^{12}=J_3$, etc). Muestra que

$$[J^{kl},J^{mn}]=i(\delta^{km}J^{ln}-\delta^{kn}J^{lm}-\delta^{lm}J^{kn}+\delta^{ln}J^{km})\ .$$

Aunque esta forma puede parecer menos compacta, se generaliza con más facilidad a $3+n$ dimensiones.

Ejercicio 4: Casimir

Verifica que $[J^2,J_l]=0$ para $l=1,2,3$ usando el álgebra de SO(3).

Ejercicio 5: Generadores y matrices de rotación

Halla los generadores y las matrices de rotación de las irreps con $j=\frac{1}{2}$ y $j=1$.

Ejercicio 6: Representación con $j=1$

Demuestra que las matrices

$$J_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix};\quad J_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix};\quad J_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

están relacionadas con

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

mediante una transformación de semejanza.