Álgebra de un grupo. Representaciones de $\mathbf{S_n}$. Clases de simetría de tensores

Ejercicio 1: Tableros de Young estándar de S_4

Encuentra los tableros de Young estándar de S_4. Deduce el número de irreps no equivalentes y su dimensión.

Ejercicio 2: Tableros de Young estándar de S_5

Repite lo anterior para el grupo S_5.

Ejercicio 3: Idempotente primitivo

Verifica mediante un cálculo explícito que $e_2 = \frac{1}{3}[e + (12) - (31) - (321)]$ del álgebra $\tilde{S}_3$ es un idempotente primitivo.

Ejercicio 4: Simetrizadores

Demuestra que si $\lambda \neq \mu$, entonces $e_\lambda^p e_\mu^q = 0$ para todo $p, q \in S_n$.

Ejercicio 5: Representaciones tensoriales

Prueba que

$$D(p)^{\{j\}}_{\{i\}} = \delta^{j_1}_{i_{p_1^{-1}}} \cdot \ldots \cdot \delta^{j_n}_{i_{p_n^{-1}}} = \delta^{j_{p_1}}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{j_{p_n}}_{i_n}$$

define una representación de S_n.

Ejercicio 6: Clases de simetría de tensores

Demuestra que en un espacio m–dim no existe ningún tensor de rango $n > m$ totalmente antisimétrico.

Ejercicio 7: Tensores de simetría mixta

Comprueba que los tensores de simetría mixta $\{|m, \alpha, a\rangle, \quad a = 1, 2, \quad \alpha = |++-\rangle\}$ generan un subespacio $T_m(1)$ de V_2^3 invariante bajo S_3.

Ejercicio 8: Tensores invariantes

Prueba que los dos tensores

$$|m, 1, 1\rangle \equiv e_m|++-\rangle \ \text{ y } \ |m, 2, 1\rangle \equiv e_m|--+\rangle$$

generan un subespacio $T'_m(1) \subset V_2^3$ invariante e irreducible bajo G_2.