

Representaciones

Ejercicio 1: Representación bidimensional de D_3

Considera las seis transformaciones asociadas al grupo diédrico D_3 . Si V es el espacio euclídeo 2-dim generado por $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, encuentra la representación de los elementos de D_3 en V con respecto a esa base.

Ejercicio 2: Representación bidimensional de las rotaciones

Demuestra que la representación 2-dim de las rotaciones en el plano con respecto a la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ puede ser descompuesta en dos representaciones 1-dim.

Ejercicio 3: Representación irreducible de S_3

Encuentra la irrep (unitaria) 2-dim de S_3 .

Ejercicio 4: Reducción de representaciones

Determina la transformación de semejanza que reduce la representación 2-dim de C_2

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a forma diagonal.

Ejercicio 5: Representación polinómica de D_3

[Problema para entregar]

Considera el espacio 6-dim V de funciones polinómicas de grado 2 de dos variables (x, y) :

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h$$

donde a, b, \dots son constantes complejas. Si (x, y) transforman bajo el grupo diédrico D_3 como si fueran las coordenadas de un vector (ver Ejercicio 1) se induce una representación 6-dim de D_3 en V . Identifica los subespacios invariantes de V bajo D_3 y encuentra las irreps contenidas en la representación 6-dim.

Ejercicio 6: Producto directo de representaciones

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas de dos vectores 2-dim que transforman independientemente bajo transformaciones de D_3 como se especifica en los Ejercicios 1 y 5. Considera el espacio de funciones generado por los monomios $x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2$. Demuestra que la representación de D_3 en este espacio 4-dim es el producto directo de la representación del Ejercicio 1 por sí misma.

Ejercicio 7: Coeficientes de Clebsch-Gordan

Reduce la representación 4-dim de D_3 obtenida en el ejercicio anterior a sus componentes irreducibles. Encuentra los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Ejercicio 8: Irreps del grupo tetraédrico

El grupo tetraédrico T está formado por todas las rotaciones que dejan invariante un tetraedro regular. Contiene 4 ejes triples y 3 ejes dobles. Enumera los elementos del grupo, las clases y los grupos invariantes. Encuentra las irreps y construye la tabla de caracteres.

Ejercicio 9: Caracteres de S_4

Construye la tabla de caracteres de S_4 .

Ejercicio 10: Caracteres de D_4

Enumera las irreps del grupo diédrico D_4 . Encuentra la tabla de caracteres para esas representaciones.