

## Representaciones

### *Ejercicio 1: Representación bidimensional de $D_3$*

Considera las seis transformaciones asociadas al grupo diédrico  $D_3$ . Si  $V$  es el espacio euclídeo 2-dim generado por  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ , encuentra la representación de los elementos de  $D_3$  en  $V$  con respecto a esa base.

### *Ejercicio 2: Representación bidimensional de las rotaciones*

Demuestra que la representación 2-dim de las rotaciones en el plano con respecto a la base  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$  puede ser descompuesta en dos representaciones 1-dim.

### *Ejercicio 3: Representación irreducible de $S_3$*

Encuentra la irrep (unitaria) 2-dim de  $S_3$ .

### *Ejercicio 4: Reducción de representaciones*

Determina la transformación de semejanza que reduce la representación 2-dim de  $C_2$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a la forma diagonal.

### *Ejercicio 5: Representación polinómica de $D_3$*

[Problema para entregar]

Considera el espacio 6-dim  $V$  de funciones polinómicas de grado 2 de dos variables  $(x, y)$ :

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h$$

donde  $a, b, \dots$  son constantes complejas. Si  $(x, y)$  transforman bajo el grupo diédrico  $D_3$  como si fueran las coordenadas de un vector (ver Ejercicio 1) se induce una representación 6-dim de  $D_3$  en  $V$ . Identifica los subespacios invariantes de  $V$  bajo  $D_3$  y encuentra las irreps contenidas en la representación 6-dim.

### *Ejercicio 6: Producto directo de representaciones*

Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  las coordenadas de dos vectores 2-dim que transforman independientemente bajo transformaciones de  $D_3$  como se especifica en los Ejercicios 1 y 5. Considera el espacio de funciones generado por los monomios  $x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2$ . Demuestra que la representación de  $D_3$  en este espacio 4-dim es el producto directo de la representación del Ejercicio 1 por sí misma.

*Ejercicio 7: Coeficientes de Clebsch-Gordan*

Reduce la representación 4-dim de  $D_3$  obtenida en el ejercicio anterior a sus componentes irreducibles. Encuentra los coeficientes de Clebsch-Gordan.

*Ejercicio 8: Irreps del grupo tetraédrico*

El grupo tetraédrico  $T$  está formado por todas las rotaciones que dejan invariante un tetraedro regular. Contiene 4 ejes triples y 3 ejes dobles. Enumera los elementos del grupo, las clases y los grupos invariantes. Encuentra las irreps y construye la tabla de caracteres.

*Ejercicio 9: Caracteres de  $S_4$*

Construye la tabla de caracteres de  $S_4$ .

*Ejercicio 10: Caracteres de  $D_4$*

Enumera las irreps del grupo diédrico  $D_4$ . Encuentra la tabla de caracteres para esas representaciones.