Grupos

Ejercicio 1: Definiciones básicas

Demuestra las identidades (i) $e^{-1} = e$; (ii) $a^{-1}a = e$; (iii) $ea = a$ para todo $a \in G$ a partir de los axiomas en la definición de grupo. Demuestra que e y a^{-1} son únicos y que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Ejercicio 2: El grupo S

S es el conjunto de las matrices 2×2 de determinante unidad:

$$A = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \ , \ wz - xy = 1 \ .$$

Demuestra que S con la multiplicación usual de matrices es un grupo. Encuentra los elementos de orden 2. Prueba que un elemento tiene orden 3 si $w + z + 1 = 0$.

Ejercicio 3: Clases de conjugación

Demuestra que cada elemento de un grupo pertenece a una clase y sólo a una, y que la identidad forma una clase de conjugación por sí misma.

Ejercicio 4: Clases y subgrupos invariantes

Enumera los subgrupos y las clases del grupo S_4. Encuentra sus subgrupos invariantes y sus grupos cocientes. ¿Es un grupo simple o semisimple?

Ejercicio 5: Producto directo y grupos cociente

Prueba que $G = H_1 \otimes H_2$ implica que $G/H_1 \simeq H_2$ y $G/H_2 \simeq H_1$.

Ejercicio 6: Grupo diédrico D_4

El grupo diédrico D_4 se compone de las simetrías de un cuadrado (rotaciones centrales y reflexiones respecto a los ejes vertical, horizontal y diagonales). Encuentra los elementos del grupo, las clases, los subgrupos y los subgrupos invariantes. Identifica los grupos cocientes. ¿Es D_4 el grupo producto directo de alguno de sus subgrupos?

Ejercicio 7: Generadores

Encuentra un conjunto mínimo de generadores de S_n.

Ejercicio 8: Ciclos

Demuestra que todo grupo de orden n primo es isomorfo a C_n.