Sistemas de partículas idénticas

Ejercicio 1: Simetrización y momento angular de dos partículas idénticas

El principio de simetrización exige que la función de onda Ψ que describe el estado de dos partículas idénticas sea simétrica (antisimétrica) ante el intercambio de ambas partículas, si se trata de bosones (fermiones).
En el sistema centro de masas, Ψ puede descomponerse en una parte espacial $\Psi^{\vec{L}}$, dada por el momento angular orbital $\vec{L}$, y otra interna $\Psi^{\vec{S}}$, etiquetada por el espín total $\vec{S}$,

$$\Psi = \Psi^{\vec{L}} \otimes \Psi^{\vec{S}}.$$

i) Pruébese que la parte espacial es simétrica si L es par y antisimétrica si L es impar. ¿Qué relación hay entre este resultado y la paridad del armónico esférico $Y_L^M(\theta, \varphi)$?

ii) Encuéntrese qué simetría tiene la parte de espín en función del espín total S, distinguiendo si se trata de fermiones o bosones idénticos.

iii) Muéstrese que $L + S$ es par,* ya se trate de fermiones o bosones idénticos.

Ejercicio 2: Simetrización y conservación de paridad

Neutrones lentos son capturados en onda s por ^{7}Be. Sabiendo que las interacciones fuertes conservan paridad, determínese si puede darse la reacción fuerte:

$$n + {}^7\text{Be} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}.$$

Ayuda: El espín y la paridad de cada estado son $J^P(n) = \frac{1}{2}^+$, $J^P({}^7\text{Be}) = \frac{1}{2}^-$, $J^P({}^4\text{He}) = 0^+$.

Ejercicio 3: Estados de espín de dos partículas idénticas

i) Encuéntrense los estados posibles de un sistema de dos partículas idénticas de espín 1/2 que son estados propios simultáneos de los operadores S^2 y S_z, donde $\vec{S}$ es el operador espín total del sistema, y discútanse las simetrías de intercambio.

ii) El mismo problema anterior para dos partículas idénticas de espín 1.

*No confundir $L + S$ con J, el momento angular total.

Ejercicio 4: El isoespín del deuterón

Recordemos que un *nucleón* es un estado de isoespín $T = 1/2$, que corresponde a un protón (neutrón) cuando $T_3 = +1/2$ ($T_3 = -1/2$). Las interacciones fuertes conservan isoespín, de modo que, para ellas, el protón y el neutrón son dos partículas idénticas.

i) Encuéntrense los autovalores y autovectores del operador isoespín para un sistema de dos nucleones.

ii) Sabiendo que el estado fundamental de un *deuterón* (núcleo de deuterio, estado ligado de un protón y un neutrón) es una combinación de los estados ${}^3S_1$ y ${}^3D_1$,† dedúzcase que el isoespín del deuterón es 0.

Ejercicio 5: Simetrización de tres partículas idénticas de espín 1/2

Consideremos tres partículas idénticas de espín 1/2 en movimiento unidimensional con hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) - \frac{g^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}.$$

Determínese la energía, la degeneración y la función de onda del estado fundamental. *Ayuda*: Úsese que los niveles más bajos y funciones de onda correspondientes para un átomo hidrogenoide, definiendo $a \equiv \dfrac{\hbar^2}{Mg^2}$ y $r \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, son

$$E_0 = -\frac{Mg^4}{2\hbar^2}, \quad \text{degeneración } 1, \qquad \xi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}$$

$$E_1 = -\frac{Mg^4}{8\hbar^2}, \quad \text{degeneración } 4, \qquad \begin{cases} \phi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(1 - r/2a)\,\mathrm{e}^{-r/2a}}{\sqrt{8\pi a^3}} \\ \psi_i(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_i \mathrm{e}^{-r/2a}}{\sqrt{32\pi a^5}}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ejercicio 6: Estados de espín total de tres partículas idénticas de espín 1

Consideremos un sistema de tres partículas idénticas de espín 1. Definamos la notación $|+\rangle\,|0\rangle\,|-\rangle$ para la partícula 1 en $m_s = +1$, la partícula 2 en $m_s = 0$ y la partícula 3 en $m_s = -1$, y análogamente para las otras combinaciones de las terceras componentes.

†En notación espectroscópica, ${}^{2S+1}L_J$ indica un estado de espín S, momento angular orbital L y momento angular total J. Para $L = 0, 1, 2$, etc. se escribe S, P, D, etc.

i) Supongamos que se conoce que la parte espacial del sistema es simétrica ante el intercambio de cualquier par. Constrúyanse los estados normalizados de espín en los siguientes casos:

(a) Las tres partículas en $|+\rangle$.

(b) Dos de ellas en $|+\rangle$ y una en $|0\rangle$.

(c) Todas en diferentes estados de espín.

¿Cuál es el espín total en cada caso?

ii) El mismo problema anterior pero suponiendo ahora que la parte espacial es antisimétrica ante el intercambio de cualquier par.

Ejercicio 7: Normalización de estados de n partículas

Normalícese el estado $(a^\dagger)^n |0\rangle$ haciendo uso de $a|0\rangle = 0$ y la regla de conmutación $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$.

Ejercicio 8: Estados coherentes

Para bosones se define un *estado coherente* como un estado propio del operador de aniquilación a, es decir, $a|z\rangle = z|z\rangle$, donde z es un número complejo.

i) Hállese el estado normalizado $|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, siendo $|n\rangle \equiv \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$.

ii) Calcúlese el valor esperado del operador número en un estado coherente normalizado y su dispersión cuadrática media, $(\Delta N)^2 = \langle z|N^2|z\rangle - \langle z|N|z\rangle^2$.

Ejercicio 9: Momento angular en función de operadores de creación y aniquilación

Sea un bosón con dos estados posibles $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Demuéstrese que los operadores

$$J_3 = \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-), \quad J_\pm = a_\pm^\dagger a_\mp$$

satisfacen el álgebra de momento angular, siendo $a_\pm$ los operadores de aniquilación de $|\pm\rangle$, respectivamente.

i) Escríbase J^2 en función el operador número $N = N_+ + N_-$.

ii) Escríbase el estado normalizado $|j\ m\rangle$ en función de los números de ocupación $n_\pm$ de $|\pm\rangle$, respectivamente.

Ejercicio 10: Hamiltoniano en el formalismo de operadores de creación y aniquilación

Consideremos el hamiltoniano[‡]

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} + \lambda(a^\dagger a^\dagger + aa) \ ,$$

con $|\lambda| < 1/2$, siendo a y $a^\dagger$ los operadores usuales de creación y aniquilación.
Determínese su espectro y funciones propias asociadas.
Ayuda: Resulta conveniente introducir un par de operadores η y $\eta^\dagger$, como combinación lineal de a y $a^\dagger$, con $[\eta, \eta^\dagger] = I$, que permitan escribir H de una forma sencilla:

$$a = \alpha\eta + \beta\eta^\dagger, \quad a^\dagger = \alpha\eta^\dagger + \beta\eta, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ tales que } \alpha^2 - \beta^2 = 1,$$

lo que se conoce como *transformación de Bogolyubov*. Elíjanse en particular unos valores para α y β tales que H tenga la misma forma que el hamiltoniano del oscilador armónico:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(\eta^\dagger\eta + \eta\eta^\dagger) = \hbar\omega(\eta^\dagger\eta + 1/2),$$

cuyas soluciones ya conocemos.

[‡]Este hamiltoniano es análogo al que describe un sistema de átomos de ^{4}He a temperaturas cercanas al cero absoluto, con el que Bogolyubov explicó microscópicamente el fenómeno de la *superfluidez* en 1957, previamente descubierto por Kapitza en 1938. Para más información, véase el libro de Galindo y Pascual.