Transformaciones de simetría

Ejercicio 1: Transformaciones de Galileo

Las traslaciones espaciales y las rotaciones forman el *grupo euclídeo*, que es un subgrupo del *grupo de Galileo*. Dicho grupo consta de las transformaciones:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\stackrel{g}{\to} \mathcal{R}\vec{r} + \vec{v}t + \vec{a}, \\ t &\stackrel{g}{\to} t + \tau, \end{aligned}$$

donde $\vec{a}$ es el vector de traslación espacial, $\vec{v}$ la velocidad relativa de los dos sistemas inerciales considerados, $\mathcal{R}$ una rotación y τ un desplazamiento en el origen de tiempos. Simbolizando la transformación $g \equiv (\mathcal{R},\ \vec{v},\ \vec{a},\ \tau)$, dedúzcase la ley del producto:

$$(\mathcal{R}_2,\ \vec{v}_2,\ \vec{a}_2,\ \tau_2)(\mathcal{R}_1,\ \vec{v}_1,\ \vec{a}_1,\ \tau_1) = (\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1,\ \vec{v}_2 + \mathcal{R}_2\vec{v}_1,\ \vec{a}_2 + \mathcal{R}_2\vec{a}_1 + \tau_1\vec{v}_2,\ \tau_1 + \tau_2).$$

Ejercicio 2: Conservación del momento angular: distribuciones angulares de desintegraciones

Consideremos una partícula de espín $\frac{1}{2}$ que se desintegra en otras dos de espines 0 y $\frac{3}{2}$, respectivamente.

i) ¿Qué valores puede tomar el momento angular relativo (orbital) entre las dos partículas del estado final?

ii) Hállese y dibújese la distribución angular del estado final en los siguientes casos:

(a) La partícula inicial está polarizada según la dirección positiva del eje $\hat{z}$, es decir, el estado inicial es el estado $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$.

(b) No conocemos la polarización de la partícula inicial, es decir, el estado inicial es *mezcla* de $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ y $\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$ en igual proporción.

Ejercicio 3: Determinación experimental del espín de la partícula Λ

Para determinar el espín de la partícula Λ se hace incidir un haz de piones negativos sobre un blanco de protones no polarizados, observándose la cadena de reacciones:

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\to K^0 + \Lambda, \\ \Lambda &\to \pi^- + p, \end{aligned}$$

y se consideran sólo las Λ producidas en la dirección del haz incidente. Demuéstrese que el análisis de la distribución angular de los productos de desintegración de la Λ

permite determinar el espín de esta partícula, conocidos los espines de las restantes ($S_\pi = S_K = 0$, $S_p = \frac{1}{2}$).
Nota: Los datos experimentales favorecen una distribución isótropa.
Ayuda: Utilícese que los armónicos esféricos pueden escribirse, para M positivo:

$$Y_L^M(\theta,\varphi) = \left[\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}\right]^{1/2} P_L^M(\cos\theta)\, \mathrm{e}^{iM\varphi}, \qquad Y_L^{-M}(\theta,\varphi) = (-1)^M Y_L^M(\theta,\varphi),$$

donde $P_L^M(\cos\theta)$ son las funciones asociadas de Legendre. Algunas de ellas: $P_0^0(x) = 1$, $P_1^0(x) = x,\ P_2^0(x) = (3x^2-1)/2,\ P_0^1(x) = 0,\ P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2},\ P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$.
Los siguientes coeficientes de Clebsch-Gordan se necesitan también:

$$\left\langle J-\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2} \middle| J, \mp\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4J}} \quad , \quad \left\langle J-\frac{1}{2}, \pm 1; \frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2} \middle| J, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2J-1}{4J}} \, ,$$

$$\left\langle J+\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2} \middle| J, \mp\frac{1}{2}\right\rangle = \mp\sqrt{\frac{2J+1}{4(J+1)}} \quad , \quad \left\langle J+\frac{1}{2}, \pm 1; \frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2} \middle| J, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \mp\sqrt{\frac{2J+3}{4(J+1)}} \, .$$

Ejercicio 4: Las interacciones débiles violan paridad

El mesón K^+ es una partícula de espín cero que se puede desintegrar, mediante interacciones débiles, en los canales:

$$\begin{aligned} K^+ &\to \pi^+\pi^0, \\ K^+ &\to \pi^+\pi^+\pi^-. \end{aligned}$$

Sabiendo que el pión tiene $J^P(\pi) = 0^-$, muéstrese que la paridad no se conserva en las interacciones débiles.

Ejercicio 5: Las interacciones débiles no conservan isoespín

Los bariones $\Sigma^\pm$ se desintegran dominantemente, mediante interacciones débiles, en los procesos no-leptónicos:

$$\Sigma^+ \to p + \pi^0, \quad \Sigma^+ \to n + \pi^+, \quad \Sigma^- \to n + \pi^-.$$

Supongamos que el operador que causa estas transiciones es componente de un tensor con isoespín $T = \frac{1}{2}$, es decir, la amplitud $\mathcal{A}(i \to f) \propto \langle f|T_M^{1/2}|i\rangle$.

i) Encuéntrese la relación que liga las amplitudes de estos tres procesos.

ii) Recordando que cada anchura de desintegración es proporcional al cuadrado del módulo de la amplitud correspondiente, ¿qué relación hay entre las anchuras?

Téngase en cuenta que los estados de las distintas partículas se relacionan con los estados $|T\ T_3\rangle$ de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
|p\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle, & |n\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle, & \\
|\pi^+\rangle = -\,|1\ 1\rangle\,, & |\pi^0\rangle = |1\ 0\rangle\,, & |\pi^-\rangle = |1\ -1\rangle \\
|\Sigma^+\rangle = -\,|1\ 1\rangle\,, & |\Sigma^0\rangle = |1\ 0\rangle\,, & |\Sigma^-\rangle = |1\ -1\rangle\,.
\end{array}
$$

Nota: El isoespín es un número cuántico interno, conservado en las interacciones fuertes, similar al espín, generado por el grupo SU(2)$_T$.
Ayuda: Aplíquese el teorema de Wigner-Eckart, escribiendo los elementos de matriz que describen a cada una de las tres transiciones en función de los elementos de matriz reducidos $A_{2T} \equiv \langle T||T^{1/2}||1\rangle$, $T = 1/2,\ 3/2$.

Ejercicio 6: Inversión temporal y degeneración de Kramers

Supongamos que el hamiltoniano H que describe un cierto sistema conmuta con el operador inversión temporal Θ, y sea $|n\rangle$ un autovalor de la energía. Es evidente que $|n\rangle$ y $\Theta\,|n\rangle$ tienen el mismo valor E_n de la energía, pues

$$[H,\Theta] = 0 \Rightarrow H\Theta\,|n\rangle = \Theta H\,|n\rangle = E_n\Theta\,|n\rangle\,.$$

i) ¿Representan $|n\rangle$ y $\Theta\,|n\rangle$ el mismo estado?

ii) Compruébese que para sistemas de *espín semiimpar* tales estados no coinciden, lo que se conoce como *degeneración de Kramers*.

iii) Tal degeneración se da por ejemplo en un cristal con un número impar de electrones. Muéstrese que la degeneración desaparece al aplicar un campo magnético externo $\vec{B}$.

Ayuda: En presencia de $\vec{B}$, el hamiltoniano contiene un término proporcional a $\vec{S}\cdot\vec{B}$, donde $\vec{B}$, al ser externo, no cambia bajo inversión temporal.