Momento angular

Ejercicio 1: Reglas de conmutación del momento angular orbital

Encuéntrense las reglas de conmutación de $\vec{L}$, $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$, a partir de las de $\vec{x}$ y $\vec{p}$.

Ejercicio 2: El momento angular orbital en coordenadas esféricas

i) Escríbanse los operadores $\vec{L}$, L_+, L_- y L^2 en coordenadas esféricas.

ii) Encuéntrese la relación entre L^2 y la parte angular del operador laplaciano, ∇^2, comprobando primero la identidad $L^2 = x^2p^2 - (\vec{x}\cdot\vec{p})^2 + i\hbar\vec{x}\cdot\vec{p}$.

Ejercicio 3: Parametrizaciones de las rotaciones: eje-ángulo y ángulos de Euler

i) Demuéstrese que una rotación finita activa de ángulo ϕ en torno al eje determinado por el vector unitario $\hat{n}(\theta,\varphi)$, en el espacio tridimensional, viene dada por

$$[R_{\hat{n}}(\phi)]_{ij} = \delta_{ij}\cos\phi + (1-\cos\phi)\hat{n}_i\hat{n}_j - \sin\phi\,\epsilon_{ijk}\hat{n}_k.$$

Para ello, utilícese la completitud del sistema de vectores $\{\hat{n}, \vec{x}, \hat{n}\times\vec{x}\}$.

ii) Compárense las rotaciones respecto a un eje, $R_{\hat{n}}(\phi)$, con las rotaciones de Euler:

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\beta,\gamma) &\equiv R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(\gamma)\\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}$$

para demostrar que

$$\varphi = \frac{\pi+\alpha-\gamma}{2}, \quad \tan\theta = \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \quad \cos\phi = 2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2} - 1.$$

iii) Muéstrese que $R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{\hat{z}'}(\gamma)R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}}(\alpha)$, donde las rotaciones son respecto a *ejes solidarios con el vector rotado*.

Ejercicio 4: Representaciones del operador rotación: Matrices de rotación

i) Encuéntrense las generadores de las rotaciones de la representación con $j = 2$.

ii) Escríbase las matriz de las rotaciones entorno al eje $\hat{z}$.

iii) ¿Qué ángulo hay que rotar un objeto con momento angular j en torno a un eje cualquiera para que éste recupere su posición original?

Ejercicio 5: El grupo de rotaciones: SU(2) frente a SO(3)

i) Encuéntrense los generadores del grupo de rotaciones en las representaciones con $j = \frac{1}{2}$ y $j = 1$.

ii) Empleando la parametrización de ángulos de Euler, escríbase la forma de los elementos del grupo en dichas representaciones (matrices de rotación).

Recordemos que SO(3) es el grupo de las matrices ortogonales 3×3 con determinante unidad y SU(2) es el grupo de las matrices unitarias 2×2 con determinante unidad. Tanto SO(3) como SU(2) tienen tres generadores que obedecen las mismas reglas de conmutación que el momento angular. Sin embargo, por cada *elemento* R de SO(3) existen dos elementos U de SU(2), pues $R(\alpha) = R(\alpha + 2\pi)$ mientras que $U(\alpha) = -U(\alpha + 2\pi)$. Es decir, para cada R el correspondiente U es *bivaluado*. Se dice que ambos grupos son localmente isomorfos.

iii) Muéstrese que las *representaciones* de SO(3) son univaluadas para j entero y bivaluadas para j semiimpar.

Ejercicio 6: Generador de las rotaciones en torno a un eje arbitrario

i) Consideremos el estado $|+\rangle \equiv \left|j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\right\rangle$. Escríbase el estado rotado $|+\rangle_{\hat{n}}$ que se obtiene a partir de dos rotaciones sucesivas respecto a los ejes cartesianos $\hat{y}$ y $\hat{z}$,

$$|+\rangle_{\hat{n}} \equiv R_{\hat{z}}(\varphi) R_{\hat{y}}(\theta) |+\rangle\,, \quad R_{\hat{k}}(\alpha) = \exp\left(-iJ_k\alpha/\hbar\right), \quad J_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k.$$

ii) Muéstrese que $\vec{J}\cdot\hat{n}$ es el generador de las rotaciones entorno al eje $\hat{n}(\theta, \varphi)$, probando que deja invariante al estado polarizado en la dirección $\hat{n}$:

$$\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\,|+\rangle_{\hat{n}} = \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle_{\hat{n}}$$

Ejercicio 7: Representaciones bidimensionales del operador rotación

El número mínimo, N, de dimensiones en las que pueden realizarse las reglas de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ es $N = 2$. Consideremos la secuencia de rotaciones de Euler:

$$\begin{aligned} U(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ \mathrm{e}^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & \mathrm{e}^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta secuencia de rotaciones debe ser equivalente a una única rotación de ángulo ϕ en torno a algún eje $\hat{n}(\theta,\varphi)$. Encuéntrense ϕ,θ,φ en función de α,β,γ . *
Ayuda: Demuéstrese primero que $\exp\left(\frac{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi}{2}\right) = \mathbb{1}\cos\frac{\phi}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\phi}{2}$.

Ejercicio 8: Rotaciones y autoestados del operador posición

Consideremos el autoestado del operador posición $|\vec{x}\rangle$ al que se le aplica una rotación

$$|\vec{x}\rangle \to \exp\left(-i\hat{n}\cdot\vec{L}\theta/\hbar\right)|\vec{x}\rangle\,.$$

Analícese si el estado resultante es propio del operador posición basándose exclusivamente en las relaciones de conmutación canónicas entre posiciones y momentos.

Ejercicio 9: Autoestados de momento angular en la representación de posiciones

i) Sea $|\psi\rangle$ un estado de simetría esférica para una partícula. Demuéstrese que

$$(x_1 + ix_2)^l\,|\psi\rangle$$

es propio de L^2 y L_z con valores propios $\hbar^2 l(l+1)$ y $\hbar l$, respectivamente.

ii) Determínese si la función $f(\theta,\varphi) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\varphi}}{\sin\theta}$ es propia de L^2, L_z. ¿Es normalizable?

Ejercicio 10: Autoestados de momento angular: armónicos esféricos

i) Consideremos una partícula sin espín representada por la función de onda

$$\psi(\vec{x}) = K(x+y+2z)\mathrm{e}^{-\alpha r},$$

donde K y α son constantes y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Escríbase $\psi(\vec{x})$ en la base de armónicos esféricos.

*Nótese que la relación entre ϕ, $\hat{n}$ y los ángulos de Euler α, β y γ debe coincidir con la que habíamos deducido en el ejercicio 3, pues es independiente de la representación elegida.

ii) ¿Cuál es el momento angular total de la partícula?

iii) ¿Cuál es el valor esperado de la componente z del momento angular?

iv) Si medimos L_z, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea $L_z = \hbar$?

v) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en un ángulo śolido dΩ?

Ayuda: Las expresiones de los primeros armónicos esféricos son:

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \mathrm{e}^{\pm i\varphi}.$$

Ejercicio 11: Hamiltoniano dependiente de espín

Diagonalícese $H = S_1^2 + S_2^2 + g\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, siendo $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ dos operadores de espín.

Ejercicio 12: Suma de momentos angulares: coeficientes de Clebsch-Gordan

i) Recordando que $J_\pm |JM\rangle = [J(J+1) - M(M\pm 1)]^{1/2} |JM \pm 1\rangle$, calcúlense los coeficientes de Clebsh-Gordan para la suma de $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$. (Unidades $\hbar = 1$.)

ii) Consideremos un sistema de dos partículas, una de espín $S_1 = 0$ y la otra de espín $S_2 = 1/2$. Supongamos que se encuentran en onda p ($L = 1$).

(a) ¿Cuáles son los valores posibles del momento angular total J?

(b) Para cada valor posible de L_z y S_z, ¿cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en un estado de momento angular J y tercera componente J_z?

Ejercicio 13: Tensores esféricos irreducibles

Sean A_k las componentes de un tensor irreducible de rango 1. Pruébese que

$$[J_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k.$$

Ejercicio 14: Teorema de Wigner-Eckart

Recordando el teorema de Wigner-Eckart,

$$\langle j'm'|T_M^J|jm\rangle = \langle j'||T^J||j\rangle \langle jm; JM|j'm'\rangle$$

demuéstrese que $\quad \langle j'||\vec{J}||j\rangle = \hbar\delta_{jj'}\sqrt{j(j+1)}$.

Ayuda: El coeficiente de Clebsh-Gordan $\langle jm+1|jm;11\rangle = -\left(\frac{j(j+1) - m(m+1)}{2j(j+1)}\right)^{1/2}$.