Postulados de la Mecánica Cuántica

Ejercicio 1: Experimentos de Stern-Gerlach

Un dispositivo de Stern-Gerlach (**SG**) es capaz de separar partículas según la tercera componente de su momento angular. Considérense partículas de espín $\frac{1}{2}$ y sin momento angular orbital. Llamemos *filtro positivo* a un **SG** que sólo deja pasar las partículas con componente $+\frac{\hbar}{2}$ y *medidor* a un **SG** que mide la componente de espín. Realicemos los siguientes experimentos:

i) Un filtro según el eje z (**SG**$\hat{z}$) seguido de un medidor según el mismo eje (**SG**$\hat{z}$).

ii) Un filtro según el eje z (**SG**$\hat{z}$) seguido de un medidor según el eje x (**SG**$\hat{x}$).

iii) Un filtro según el eje z (**SG**$\hat{z}$) seguido de un filtro según el eje x (**SG**$\hat{x}$) seguido de un medidor según el eje z (**SG**$\hat{z}$).

Razónese cuál será el resultado de las medidas en cada caso.
¿Son iguales las respuestas de *(i)* y *(iii)*? ¿Por qué?

Ejercicio 2: Conmutación y diagonalización simultánea de operadores

Probar que dos operadores que conmutan pueden diagonalizarse simultáneamente.
¿Qué pasa si anticonmutan, es decir, si $\{A, B\} \equiv AB + BA = 0$?

Ejercicio 3: Relaciones de incertidumbre

i) Sean A y B dos observables. Demuéstrese la relación de incertidumbre

$$\Delta_\psi A \; \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle\psi|[A, B]|\psi\rangle|,$$

donde $\langle A\rangle_\psi \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle$ es el valor esperado de A en el estado ψ y su *incertidumbre* (dispersión cuadrática media) es $\Delta_\psi A \equiv [\langle\psi|(A - \langle A\rangle_\psi)^2|\psi\rangle]^{1/2} = [\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2]^{1/2}$.

ii) Utilícese la relación de conmutación canónica $[X, P] = i\hbar I$ y la relación *(i)* para demostrar el famosa *relación de incertidumbre posición–momento* de Heisenberg,

$$\Delta_\psi X \; \Delta_\psi P \geq \frac{\hbar}{2}$$

iii) A partir de la ecuación de la evolución temporal del valor esperado de cualquier observable A que no dependa explícitamente del tiempo y la relación *(i)*, encuéntrese la *relación de incertidumbre energía–tiempo*

$$\tau_\psi \; \Delta_\psi H \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \tau_\psi \equiv \frac{\Delta_\psi A}{\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle\right|}$$

donde τ_ψ es el tiempo característico de evolución del observable A, que puede considerarse como un tiempo característico de evolución del sistema, y $\Delta_\psi H$ es la incertidumbre de la energía.

Ejercicio 4: Autovalores, autovectores, valores esperados y matriz densidad

El operador hamiltoniano H de un cierto sistema físico viene dado por la matriz

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y otros dos observables A y B por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix},$$

siendo λ y μ números reales distintos de cero.

i) Encuéntrense los autovalores y autovectores de H, A y B.

ii) Supongamos que el sistema está en un estado descrito por el vector

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuéntrese la relación entre las constantes c_1, c_2 y c_3 para que ψ esté normalizado a la unidad.

(b) ¿Qué observables son compatibles? ¿Constituyen un conjunto completo? Hallar su base de autoestados simultáneos, la expresión de los operadores H, A y B en esta nueva base y la matriz de cambio de base.

(c) ¿Qué valores de la energía se pueden obtener al hacer una medida? ¿Con qué probabilidad se encuentran estos valores? ¿En qué estado queda el sistema tras obtener cada uno de esos valores?

(d) Encuéntrense los valores esperados de H, A y B en el estado ψ.

(e) ¿Cuál es la incertidumbre ΔE en la energía del estado ψ?

iii) Consideremos una colectividad de sistemas físicos, todos ellos descritos por el mismo estado ψ.

(a) ¿Qué matriz densidad la describe?

(b) ¿Qué matriz densidad describe a la colectividad *tras la medida* de la energía?

Ejercicio 5: Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff y reglas de cuantización

Sean A y B dos operadores que verifican $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ y f una función desarrollable en serie de potencias.

i) Probar que $[A, f(B)] = [A,B]\dfrac{\mathrm{d}f(B)}{\mathrm{d}B}$.

ii) Sea $G(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$, donde t una variable real. Aplíquese el resultado anterior a la expresión de $\dfrac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t}$ para demostrar la relación

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{A+B+[A,B]/2}.$$

Éste es un caso particular de la *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*.

iii) Consideremos las *reglas de cuantización en la forma de Weyl*

$$U_\alpha V_\beta = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\delta_{rs}\alpha\beta} V_\beta U_\alpha, \quad \text{donde} \quad U_\alpha \equiv \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha X_r},\ V_\beta \equiv \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\beta P_s},$$

con α, β reales, X_r las coordenadas cartesianas de posición y P_r los momentos conjugados correspondientes. Utilizando el resultado *(ii)*, demostrar que la forma infinitesimal de estas reglas conducen a las *reglas de cuantización canónica*

$$[X_r, P_s] = i\hbar\delta_{rs} I.$$

Ejercicio 6: Oscilaciones de neutrinos

Consideremos dos tipos de neutrinos de masa muy pequeña pero no nula. Supongamos que los estados que se generan en interacciones débiles, ν_e y ν_μ, no coinciden con los autoestados de masa, ν_1 y ν_2, sino que son una combinación de ellos dada por

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Si en el instante $t=0$ se produce un neutrino ν_e con energía E (en el Sol, por ejemplo), $|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle$, *i)* Resolver la ecuación de Schrödinger para el estado estacionario $|\psi(t)\rangle$, siendo los estados de masa bien definida los correspondientes a partículas libres relativistas

$$E_i = \sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4} \simeq pc\left(1 + \frac{m_i^2c^2}{2p^2}\right).$$

ii) ¿Cuál es la probabiblidad de observar un neutrino ν_e a una distancia L de la fuente?, ¿y de observar un neutrino ν_μ?

iii) ¿Cuáles son las condiciones para que se produzcan las *oscilaciones* de neutrinos?

Ejercicio 7: El sistema de kaones neutros

Despreciando violación de CP, los estados de interacción de kaones neutros, K^0 y $\bar{K}^0$, pueden expresarse en función de los autoestados de masa y vida media bien definida, K_S y K_L, mediante

$$\begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\ \ |K_S\rangle + |K_L\rangle), \\ |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|K_S\rangle + |K_L\rangle). \end{aligned}$$

El hamiltoniano *efectivo* que describe estos estados metastables no es hermítico y sus autovalores son complejos:

$$E_S = m_Sc^2 - \frac{i}{2}\hbar\Gamma_S, \quad E_L = m_Lc^2 - \frac{i}{2}\hbar\Gamma_L,$$

donde $m_{S,L}$ son las masas y $\Gamma_{S,L} = 1/\tau_{S,L}$ son las anchuras de desintegración (inversas de las vidas medias) del $K_{S,L}$, respectivamente.
Si en el instante $t = 0$ se produce un mesón en el estado $|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle$,

i) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en el mismo estado K^0 al cabo de un tiempo t?, ¿y de que haya cambiado al estado $\bar{K}^0$?

ii) ¿Se conserva la probabilidad con el tiempo?

iii) Discútanse las similitudes y diferencias entre el sistema de kaones y el de dos neutrinos del ejercicio anterior.