Bases de la Mecánica Cuántica

Ejercicio 1: El Sol como cuerpo negro

La energía electromagnética radiada por el Sol, como función de la longitud de onda, presenta un máximo a $\lambda_{\text{máx}} \simeq 5 \times 10^3$ Å. Suponiendo que el espectro corresponde al de un cuerpo negro:

i) Determínese la temperatura de la superficie del Sol.

ii) Calcúlese la energía emitida anualmente en forma de radiación electromagnética y la fracción de de masa solar que ésta representa [$R_\odot \simeq 7\times10^8$ m, $M_\odot \simeq 2\times10^{30}$ kg].

iii) Suponiendo que el Sol deja de emitir energía cuando su masa es un 0.7% de la masa actual, calcúlese el tiempo de vida que le queda al Sol.

Ejercicio 2: Radiación de fondo de microondas

Nuestro Universo se encuentra lleno de un fondo de radiación electromagnética, áltamente isótropa, proveniente de la Gran Explosión, y con distribución espectral correspondiente a un cuerpo negro de temperatura $T = 2.7$ K. Determínese la longitud de onda $\lambda_{\text{máx}}$ para la que es máxima la densidad de energía y las longitudes de onda para la que esa densidad es una centésima parte del valor máximo.

Ejercicio 3: Efecto fotoeléctrico

El potencial de detención para el efecto fotoeléctrico con luz monocromática incidente sobre Na es 1.8 V si $\lambda = 3000$ Å y 0.82 V para $\lambda = 4000$ Å. Determínense los valores de la constante de Planck, la función de trabajo del sodio y la longitud de onda umbral para el mismo.

Ejercicio 4: Efecto Compton y cinemática relativista

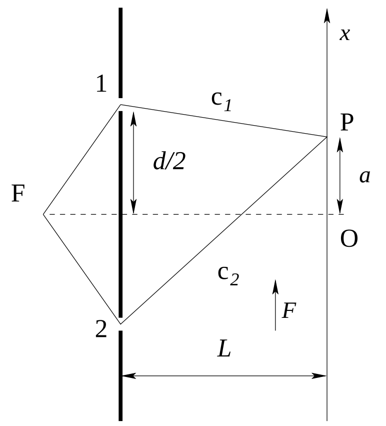
Considérese la colisión Compton de un fotón de longitud de onda λ_0 y un electrón libre moviéndose con momento de módulo p en la misma dirección y sentido que el fotón incidente.

i) Dedúzcase, para este caso, la expresión que relaciona la longitud de onda del fotón saliente con el ángulo de dispersión. ¿Qué ocurre si el electrón se mueve en sentido opuesto al del fotón?

ii) ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar el momento del electrón después de la colisión? Compárese con el electrón en reposo. Calcúlese en este caso la longitud de onda de la radiación incidente si el ángulo de dispersión del fotón es $90°$ y el momento del electrón de retroceso es 100 MeV/c.

Ejercicio 5: Experimento de difracción

Considérese el experimento de difracción esquematizado en la figura, en el que la fuente F emite partículas de momento p_0, masa M, velocidad v y energía E.



i) ¿Qué distancia a hay entre el máximo central y otro adyacente?

ii) Si bajo alguna causa externa, que no rompa la coherencia, se altera la fase de los caminos superiores c_1 en $\delta\phi_1$, y la de los inferiores c_2 en $\delta\phi_2$, pruébese que el máximo central y toda la figura de difracción se desplaza una distancia s dada por

$$s = (\delta\phi_1 - \delta\phi_2)\frac{L}{d}\frac{\hbar}{p_0}.$$

iii) Una forma de conseguir el efecto *(ii)* es suponer la presencia de un campo de fuerzas $\vec{F}$ en la zona entre las rendijas y la pantalla. Supongamos tal campo uniforme y muy débil: $|\vec{F}x| \ll p_0 v$, en la zona de interés. Las trayectorias c_1 y c_2 apenas sufrirán cambio, pero las amplitudes $\phi_1 = \langle P|1\rangle$, $\phi_2 = \langle P|2\rangle$ sufrirán unos defasajes $\delta\phi_1$, $\delta\phi_2$. Teniendo en cuenta que, cuando $\vec{F} = 0$,

$$\phi_j \propto \exp\{ip_0|\vec{r}(P) - \vec{r}(j)|/\hbar\}$$

y que cuando $\vec{F} \neq 0$,

$$\phi_j \propto \exp\left\{i\int_{c_j} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{p}(\vec{r})/\hbar\right\}, \quad p(\vec{r}) = \sqrt{2M(E - V(r))}, \quad \vec{F} = -\nabla V,$$

probar que, bajo la acción del campo de fuerzas,

$$\delta\phi_1 - \delta\phi_2 \simeq \frac{d}{2}\frac{LF}{\hbar v}.$$

(Tener en cuenta que la distancia vertical media entre c_1 y c_2 es $d/2$.) Asimismo, demostrar que la imagen de difracción se desplaza hacia arriba en $T^2F/2M$, donde $T = L/v$ es el tiempo clásico para que la partícula llegue de las rendijas a la pantalla. Discutir este resultado.

Ejercicio 6: Efecto isotópico

Al iluminar una masa de H que contiene una cierta cantidad de ^{2}H y ^{3}H (deuterio y tritio), se observa que, en el espectro de absorción, las rayas correspondientes al H han sufrido desdoblamiento (efecto isotópico). Discútanse el origen y el valor de estos desplazamientos.

Ejercicio 7: Principio de correspondencia

Según el principio de correspondencia, la diferencia entre niveles energéticos adyacentes, para grandes números cuánticos, coincide con $\hbar\omega$, siendo ω la pulsación de la oscilación clásica. Estímense mediante este principio los niveles energéticos de una partícula en los siguientes casos:

i) pozo unidimensional infinito,

ii) oscilador armónico,

iii) campo coulombiano atractivo.

Ejercicio 8: Efectos cuánticos

Por ser $\hbar$ muy pequeña, los efectos cuánticos no son perceptibles en nuestra vida normal. Si el valor de $\hbar$ fuera macroscópico, tales efectos serían patentes.

i) Estimar $\hbar$ para que los incrementos mínimos permitidos en la velocidad de una rueda de bicicleta fuesen de 10 km/h [tomar $M = 2$ kg, $R = 0.5$ m]. ¿Qué sería más fácil, conducir una bicicleta de ruedas grandes o pequeñas, pesadas o ligeras?

ii) Una partícula vibra con una energía de vibración $E = 70$ eV. Estimar el valor de la frecuencia de vibración ω para que los efectos cuánticos sean importantes ($\sim 1\%$). ¿En qué región está confinada la partícula?

iii) Calcúlese la longitud de onda λ asociada a una partícula de masa M y energía cinética K. Especialícese después al caso de electrones y protones.

Ejercicio 9: Paquete de ondas

Un paquete de ondas tiene una expresión general

$$\Psi(\vec{r},t) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3k\ \hat{\phi}(\vec{k}-\vec{k}_0)\ \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$

en la que la amplitud $\hat{\phi}(\vec{q})$ está concentrada en torno a $\vec{q}=0$. Supongamos que la ley de dispersión

$$\omega(\vec{k}) = \hbar^{-1}\sqrt{M^2c^4+\hbar^2c^2k^2}$$

es la relativista libre y que $\vec{k}_0$ está según el eje Oz. Desarrollando ω en serie de potencias de $\vec{k}-\vec{k}_0$ en torno a $\vec{k}_0$:

i) Probar que para tiempos suficientemente pequeños,

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r},t) &= \exp[i(\vec{k}_0\cdot\vec{r}-\omega t)]\ \phi(\vec{r}-\vec{v}_g t) \\ &\times\left\{1+i\hbar t\frac{c^2}{2E_0a^2}\left[\frac{x^2+y^2}{a^2}-2+\left(\frac{Mc^2}{E_0}\right)^2\left(\frac{(z-v_gt)^2}{a^2}-1\right)\right]+\dots\right\}\end{aligned}$$

siendo

$$\vec{v}_g \equiv \nabla_k\omega(\vec{k}_0), \qquad E_0\equiv\hbar\omega_0\equiv\hbar\omega(\vec{k}_0),$$
$$\phi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3\vec{q}\ \hat{\phi}(\vec{q})\ \exp(i\vec{q}\cdot\vec{r}) \propto \exp(-r^2/2a^2).$$

ii) Calcular el límite no-relativista de la expresión anterior.

iii) Cuando la partícula es muy relativista, probar que el paquete se ensancha más rápidamente según las direcciones transversales a las del movimiento del paquete.

iv) La distorsión del paquete en el tiempo es pequeña mientras se cumpla la desigualdad $\epsilon\equiv(L/a)(\hbar/2p_0a)\ll 1$ entre el espacio L recorrido por el centro del paquete, la anchura inicial a, y el momento central p_0. ¿Por qué?

Ejercicio 10: Relaciones de incertidumbre

Mediante las relaciones de incertidumbre de Heisenberg estimar el orden de magnitud del radio de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental, así como su energía.