

Lista

- | | |
|--|--|
| 1. Arcos Ciorraga, María Cruz | 17. Paradas del Arca, Rafael |
| 2. Becerra Esteban, Antonio | 18. Pastor Quintana, Alejandro |
| 3. de César Salinas, Manuel | 19. Pedrosa Rivera, María |
| 4. Díaz-Peñalver Muñoz, Gabriel | 20. Peñas Jiménez, Juan de Dios |
| 5. Fabián González, Francisco | 21. Pertínez Ruiz, María Ester |
| 6. Freire Fernández, Francisco | 22. Piña Mellado, Alejandro Fco. Diego |
| 7. Goll, Raphael | 23. Ramírez Carmona, José Carlos |
| 8. Jiménez García, Carlos Manuel | 24. Ramos Vázquez, María |
| 9. Jiménez Morales, Manuel Alejandro | 25. Rincón Galván, Jesús Eduardo |
| 10. López López, Ezequiel | 26. Rodríguez Sánchez, Miriam |
| 11. López Martín, Miguel | 27. Ruiz Franco, José Manuel |
| 12. Martínez Consentino, Víctor Leopoldo | 28. Sánchez López, Alejandro |
| 13. Mesa Ortega, Patricia | 29. Soler Rocha, Sergio |
| 14. Millán Vidal, Ana Paula | 30. Trigo Soriano, Diego |
| 15. Muñoz Bruque, Álvaro | 31. Uceda Guerrero, Lola |
| 16. Muñoz Mármol, Rafael | |

	Trabajo	Asignado a:	
T1	Funciones singulares en teorías de campos	8	9
T2	Diracología	3	5
T3	Identidades de Fierz		
T4	Reglas de Feynman de la electrodinámica escalar	25	26
T5	Potencial de Yukawa y potencial de Coulomb	29	31
T6	Fórmula de reducción LSZ para fermiones	2	
T7	Estructura de helicidad de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	24	27
T8	Scattering de Rutherford	4	23
T9	Scattering de Bhabha y scattering de Møller	16	17
T10	Scattering de Compton y aniquilación de pares	11	19
T11	Desintegración del muón	12	28
T12	Identidad de Ward-Takahashi en QED	13	15
T13	Bremsstrahlung	14	21
T14	Momento magnético anómalo ($g - 2$) del electrón	1	7
T15	Polarización del vacío	6	10

Trabajo 1: Funciones singulares en teorías de campos

Discute las funciones de Green del operador de Klein-Gordon $(\square + m^2)$ y sus condiciones de contorno según la convención empleada para sortear los polos.

Trabajo 2: Diracología

La definición de las matrices gamma en d dimensiones espacio-temporales es

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, d-1.$$

Calcula las siguientes trazas y contracciones en d dimensiones:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\# \text{ impar de } \gamma's], \\ \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}], \quad n = 0, \dots, 4, \\ \gamma^\mu \gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_n} \gamma_\mu, \quad n = 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

En el primer caso podemos introducir como *prescripción*: $\gamma_5^2 \equiv \mathbf{1}_{4 \times 4}$, $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} \equiv 0$.

Calcula asimismo las siguientes trazas en 4 dimensiones que involucran $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}], \quad n = 0, \dots, 4.$$

Nótese que, excepto para $n = 4$, basta con usar las *propiedades*: $\gamma_5^2 = \mathbf{1}_{4 \times 4}$, $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$.

Demuestra también que:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(p) \bar{u}^{(1)}(p) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m), \\ u^{(2)}(p) \bar{u}^{(2)}(p) &= \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m), \\ v^{(1)}(p) \bar{v}^{(1)}(p) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m), \\ v^{(2)}(p) \bar{v}^{(2)}(p) &= \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m) \end{aligned}$$

donde $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ en el sistema de referencia en el que $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. En general,

$$\begin{aligned} u(p, n) \bar{u}(p, n) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m), \\ v(p, n) \bar{v}(p, n) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m) \end{aligned}$$

proyectan sobre polarizaciones bien definidas a lo largo de una dirección n^μ , que cumple $n^2 = -1$ y $p \cdot n = 0$.

Si elegimos, por simplicidad, el eje z como dirección del movimiento, $p^\mu = (E, 0, 0, |\mathbf{p}|)$, los operadores anteriores proyectan sobre los dos estados de helicidad de partícula y antipartícula, respectivamente, si tomamos $n^\mu = \pm(|\mathbf{p}|/m, 0, 0, E/m)$. Encuentra que en el

límite ultrarrelativista ($E \gg m$) los proyectores sobre quiralidades *right* y *left* de partícula y antipartícula son:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(p)\bar{u}^{(1)}(p) &= \frac{1+\gamma_5\not{p}}{2}(\not{p}+m) \rightarrow u_R(p)\bar{u}_R(p) = \frac{1+\gamma_5}{2}(\not{p}+m), \\ u^{(2)}(p)\bar{u}^{(2)}(p) &= \frac{1-\gamma_5\not{p}}{2}(\not{p}+m) \rightarrow u_L(p)\bar{u}_L(p) = \frac{1-\gamma_5}{2}(\not{p}+m), \\ v^{(1)}(p)\bar{v}^{(1)}(p) &= \frac{1+\gamma_5\not{p}}{2}(\not{p}-m) \rightarrow v_L(p)\bar{v}_L(p) = \frac{1-\gamma_5}{2}(\not{p}-m), \\ v^{(2)}(p)\bar{v}^{(2)}(p) &= \frac{1-\gamma_5\not{p}}{2}(\not{p}-m) \rightarrow v_R(p)\bar{v}_R(p) = \frac{1+\gamma_5}{2}(\not{p}-m). \end{aligned}$$

Finalmente, muestra que:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p,n)\Gamma u(p,n) &= \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1+\gamma_5\not{p}}{2}(\not{p}+m) \right], \\ \bar{v}(p,n)\Gamma v(p,n) &= \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1+\gamma_5\not{p}}{2}(\not{p}-m) \right], \end{aligned}$$

donde Γ es una matriz 4×4 arbitraria.

Trabajo 3: Identidades de Fierz

Se define la siguiente base de 16 matrices 4×4 (Γ^A) y sus duales (Γ_A):

$$\Gamma^A = \{1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}, \quad \Gamma_A = \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\} \quad (\mu < \nu).$$

Demuestra las identidades de Fierz:

$$\Gamma_{ij}^A \Gamma_{kl}^B = \frac{1}{16} \sum_{CD} \text{Tr}[\Gamma^A \Gamma_D \Gamma^B \Gamma_C] \Gamma_{il}^C \Gamma_{kj}^D.$$

Como aplicación comprobar que

$$(\bar{u}_{1L}\gamma^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\gamma_\mu u_{4L}) = -(\bar{u}_{1L}\gamma^\mu u_{4L})(\bar{u}_{3L}\gamma_\mu u_{2L})$$

y

$$(\bar{u}_{1L}u_{2R})(\bar{u}_{3R}u_{4L}) = \frac{1}{2}(\bar{u}_{1L}\gamma^\mu u_{4L})(\bar{u}_{3R}\gamma_\mu u_{2R}),$$

$$\text{donde } u_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}u.$$

Trabajo 4: Reglas de Feynman de la electrodinámica escalar

Calcula las reglas de Feynman asociadas al siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{g}{4}(\phi^\dagger\phi)^2,$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ es la derivada covariante.

Trabajo 5: Potencial de Yukawa y potencial de Coulomb

Calcula los potenciales de Yukawa y de Coulomb, tomando el límite no relativista de la interacción entre dos partículas distinguibles. El potencial creado por una de las dos partículas se puede calcular usando

$$iT_{fi}(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{p}' | iT | \mathbf{p} \rangle^{(NR)} = -i \int d^3x e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \Rightarrow V(\mathbf{x}) = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} T_{fi}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}},$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ y el elemento de matriz está calculado en el límite y con la normalización no relativistas. Discute si la interacción es atractiva o repulsiva, distinguiendo si tenemos partícula-partícula o partícula-anti-partícula.

Trabajo 6: Fórmula de reducción LSZ para fermiones

Escribir explícitamente la fórmula LSZ para un número arbitrario de fermiones y antifermiones en los estados inicial y final.

Trabajo 7: Estructura de helicidad de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Estudia en QED el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ en el caso de estados inicial y final polarizados. Discute las distintas amplitudes de helicidad en el límite ultrarrelativista (despreciando las masas).

Trabajo 8: Scattering de Rutherford

Calcula la sección eficaz para *scattering* de un electrón por el campo de Coulomb de un núcleo, a orden más bajo. Deriva el límite no relativista (fórmula de Rutherford) y la expresión relativista (fórmula de Mott). Encuentra también la fórmula de Mott a partir del *scattering* electrón-muón en el sistema de referencia del muón en reposo tomando $m_\mu \rightarrow \infty$.

Trabajo 9: Scattering de Bhabha y scattering de Møller

Dibuja los diagramas de Feynman y calcula las secciones eficaces diferenciales para los *scatterings* de Bhabha ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) y de Møller ($e^-e^- \rightarrow e^-e^-$) en el sistema centro de masas, a orden más bajo. Discute la simetría de *crossing* así como los límites no relativista y ultrarrelativista. ¿Cuánto valen las secciones eficaces totales? Interpreta los resultados.

Trabajo 10: Scattering de Compton y aniquilación de pares

Dibuja los diagramas de Feynman y calcula la sección eficaz diferencial para el *scattering* de Compton ($e\gamma \rightarrow e\gamma$) de un electrón en reposo, con fotones iniciales y finales polarizados, a orden más bajo (fórmula de Klein-Nishina), así como su límite de baja energía (fórmula de Thomson). Encuentra asimismo las expresiones para fotones no polarizados y las correspondientes secciones eficaces totales. Calcula también la sección eficaz para la aniquilación

de pares ($e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$) en el sistema centro de masas, a orden más bajo. Discute la simetría de *crossing*. Finalmente, discute la producción de pares ($\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$).

Trabajo 11: Desintegración del muón

Calcula la vida media del muón, hallando la anchura de desintegración del proceso

$$\mu \rightarrow e\nu_\mu\bar{\nu}_e$$

a partir de la amplitud de scattering que se deriva directamente del lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_\mu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\mu][\bar{e}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e]$$

donde la constante de Fermi es $G_F = 1.166\,378\,7(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

Trabajo 12: Identidad de Ward-Takahashi en QED

Demuestra y discute la identidad de Ward-Takahashi en QED,

$$S(p+k) [-iek_\mu\Gamma^\mu(p+k,p)] S(p) = e(S(p) - S(p+k))$$

donde

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}$$

es el propagador de Dirac y Γ^μ es el vértice (función de Green amputada de tres puntos). Demuestra que si $\mathcal{M} = \epsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu$ es la amplitud de algún proceso de QED que involucre un fotón externo de momento k^μ , se cumple que

$$k_\mu\mathcal{M}^\mu = 0.$$

Trabajo 13: Bremsstrahlung

El *bremsstrahlung* (radiación de frenado) es el proceso de emisión de radiación que se produce cuando un electrón pasa cerca de un núcleo. Calcula la sección eficaz diferencial para fotones no polarizados a orden más bajo (fórmula de Bethe-Heitler). Estudia el límite en el que la energía de los fotones tiende a cero (*soft bremsstrahlung*), que es divergente. De hecho, aquí se observó por vez primera una *divergencia infrarroja*. Este resultado no tiene sentido y el problema se resuelve cuando se incluyen las correcciones radiativas del vértice electrón-fotón a un *loop*. Investiga estas correcciones y comprueba que las divergencias infrarrojas se cancelan. Explica el significado de sumar, en el límite *soft*, estos dos procesos físicos diferentes: la emisión real de radiación y la dispersión elástica de un electrón por un núcleo.

Trabajo 14: Momento magnético anómalo ($g - 2$) del electrón

Muestra que la estructura Lorentz más general del vértice electrón-fotón (para electrones *on-shell*) se parametriza con dos términos independientes (*factores de forma*), teniendo en cuenta la conservación de C y P . Prueba que esos factores de forma, $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$, son funciones del cuadrimomento al cuadrado del fotón y se corresponden, en el límite $q^2 = 0$, con la carga eléctrica y el momento dipolar magnético *anómalo* del electrón, respectivamente. A nivel árbol, en unidades de e , el primero tiene valor unidad y el segundo es cero. Comprueba que el momento dipolar magnético del electrón $\mu = ge/(2m_e)$ tiene *razón giro-magnética* $g = 2$ a nivel árbol. Encuentra que el momento dipolar magnético anómalo a un *loop* es

$$F_2(0) = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

donde $\alpha = e^2/(4\pi)$ es la constante de estructura fina.

¿Es también finita la corrección cuántica de la carga a un *loop*? ¿Por qué?

Trabajo 15: Polarización del vacío

Encuentra la expresión de la polarización del vacío (autoenergía del fotón) a un *loop*, calcula la integral usando regularización dimensional y comprueba que es divergente en el ultravioleta. ¿Podía anticiparse que es divergente? Discute la forma de reabsorber este infinito y su relación con la renormalización de la carga.