Cuantización de campos libres

Ejercicio 1: Simetrías discretas C, P y T

i) Comprueba que los espinores de Dirac escritos en la base de Weyl como

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{(s)} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{(-s)} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^{(-s)} \end{pmatrix},$$

donde hemos definido la base de bi-espinores

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y $\xi^{(-s)} = -\mathrm{i}\sigma^2(\xi^{(s)})^*$ (nota que en particular $\xi^{-(-s)} = -\xi^{(s)}$) cumplen

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\vec{p}) &= \gamma^0 u^{(s)}(-\vec{p}), \quad v^{(s)}(\vec{p}) = -\gamma^0 v^{(s)}(-\vec{p}), \\ u^{-(s)}(-\vec{p}) &= -\gamma^1\gamma^3\big[u^{(s)}(\vec{p})\big]^*, \quad v^{-(s)}(-\vec{p}) = -\gamma^1\gamma^3\big[v^{(s)}(\vec{p})\big]^*, \\ u^{(s)}(\vec{p}) &= -\mathrm{i}\gamma^2\big[v^{(s)}(\vec{p})\big]^*, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = -\mathrm{i}\gamma^2\big[u^{(s)}(\vec{p})\big]^*. \end{aligned}$$

Usando estas propiedades se pueden estudiar las propiedades de transformación bajo C, P y T del operador $\psi(x)$ (tal como se ha hecho en clase)

$$\begin{aligned} P\psi(t,\vec{x})P &= \eta_a\gamma^0\psi(t,-\vec{x}), \\ T\psi(t,\vec{x})T &= \gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}), \\ C\psi(t,\vec{x})P &= -\mathrm{i}\eta_C\gamma^2\big[\psi(t,\vec{x})\big]^*. \end{aligned}$$

ii) Usando las propiedades de transformación bajo C, P y T del operador $\psi(x)$, calcular la transformación bajo C, P y T de bilineales fermiónicos arbitrarios. Usando las transformaciones bajo C, P y T de campos vectoriales y escalares, discutir la invariancia bajo CPT de Lagrangianos escalares (bajo transformaciones de Lorentz) hermíticos.

Ejercicio 2: Propiedades bajo C, P de sistemas ligados, reglas de suma (Problema a entregar)

i) El positronio se puede considerar un estado ligado no relativista de e^- y e^+. Muestra que un positronio con momento angular orbital L es autoestado de paridad con autovalor $P = (-1)^{L+1}$. Discute cuál sería el resultado si fuese un estado ligado de partícula-antipartícula escalar.

ii) El operador conjugación de carga intercambia electrón y positrón, el positronio debe pues ser un autoestado de $\hat{C}$. Muestra que si el momento angular orbital y el espín total del positronio son, L y S, respectivamente, el autovalor bajo conjugación de carga es $C = (-1)^{L+S}$.

iii) Usando que QED es invariante bajo C y P, discute los posibles decaimientos de estados de positronio a un número arbitrario de fotones. En particular, muestra que el estado fundamental del para-positronio (espín total 0) puede decaer en dos fotones pero el orto-positronio (espín total 1) no puede hacerlo, pero puede decaer en tres fotones.

Ejercicio 3: Cuantización en el gauge de radiación y covariancia Lorentz

i) Usando el teorema de Noether, calcula la expresión de los generadores del álgebra de Poincaré en términos del campo electromagético en el gauge de radiación.

ii) Usando las expresiones anteriores, ordenadas normalmente, calcula explícitamente el operador hamiltoniano, momento y espín en términos de operadores creación y destrucción para el campo electromagnético cuantizado en el gauge de radiación. Comprueba que satisfacen las propiedades de conmutación que corresponden al álgebra de Poincaré.