Teoría Clásica de Campos

Ejercicio 1: De sistemas discretos a campos continuos

Considera un sistema formado por un muelle o una cuerda elástica sobre la que se hallan situadas, regularmente espaciadas, un número n de partículas todas ellas de masa m. Toma la constante característica de la cuerda τ/d, con τ la tensión de la cuerda y $d = L/(n+1)$ la distancia entre nodos.

i) Asumiendo oscilaciones pequeñas, calcula la ecuación de movimiento de la partícula j-ésima (a partir de la ecuación de Newton o de la energía potencial).

ii) Escribe el Lagrangiano total del sistema y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, la ecuación de movimiento de la partícula j-ésima. Comprueba que obtienes el mismo resultado que en *(i)*.

iii) El límite del continuo se obtiene haciendo $n \to \infty$, $d \to 0$ y $m \to 0$ con $(n+1)d = L$ y $m/d = \rho$ constantes. Tomar el límite continuo de la solución de las ecuaciones de movimiento, dada por

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \eta_r(t) \sin[jr\pi/(n+1)], \qquad \eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}.$$

iv) Haz el paso al continuo en la ecuación de movimiento para obtener la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}.$$

Comprueba que la solución del apartado anterior satisface la ecuación de onda, usando $\omega_r = \sqrt{\tau/\rho}\, r\pi/L$.

v) Por último toma el límite continuo directamente en el Lagrangiano y calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo correspondiente.

Ejercicio 2: Dimensiones

La acción tiene las mismas dimensiones de masa que $\hbar$ y por tanto es adimensional en nuestras unidades $\hbar = c = 1$. Usando los términos cinéticos como guía, encontrar las dimensiones de masa de campos escalares, espinoriales y campos de gauge en cuatro dimensiones espacio-temporales. Comprobar que los términos de masa tienen dimensión de masa 1. ¿Cómo se generalizan estas dimensiones a un número d arbitrario de dimensiones espacio-temporales?

Ejercicio 3: Invariancia bajo dilataciones (I)

Considera la acción de Klein-Gordon con la masa igual a cero,

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi,$$

y una transformación de dilatación con parámetro α

$$\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu = \mathrm{e}^\alpha x^\mu, \\ \phi(x) &\to \phi'(x') = \phi(x)\mathrm{e}^{-d_\phi\alpha}. \end{aligned}$$

i) Muestra que dicha transformación es una simetría global para el valor apropiado de d_ϕ. Calcula la corriente de Noether asociada y mostrar que se conserva en soluciones de las ecuaciones de movimiento.

ii) Añade los siguientes términos al Lagrangiano

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^4,$$

y muestra que la dilatación del apartado anterior no es una simetría si $m \neq 0$, pero que λ no rompe la simetría. ¿Qué dimensiones tienen m y λ?

Ejercicio 4: Invariancia bajo dilataciones (II)

Considera el Lagrangiano de QED con masa del electrón cero

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu)\psi.$$

i) Demuestra que es invariante bajo dilataciones, $x^\mu \to \mathrm{e}^\alpha x^\mu$, $A_\mu \to \mathrm{e}^{-d_A\alpha}A_\mu$, $\psi \to \mathrm{e}^{-d_\psi\alpha}\psi$, para ciertos valores de d_A y d_ψ.

ii) Calcula la corriente conservada asociada y exprésala en términos del tensor energía-momento. Demuestra que la conservación de la corriente de dilatación es consecuencia de que la traza del tensor energía-momento es cero para la teoría sin masa. (Es encesario añadir o sustraer del tensor energía-momento canónico corrientes conservadas para escribirlo como un objeto invariante gauge.)

iii) Incluye el término de masa del electrón

$$\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi.$$

Calcula la corriente asociada a las dilataciones con el nuevo Lagrangiano, muestra que no es conservada y que su divergencia está relacionada con la traza del tensor energía-momento.

Ejercicio 5: Dimensiones Extra

Considera un espacio-tiempo cinco dimensional, $(t, \vec{x}, y)$, donde $(t, \vec{x})$ son las cuatro dimensiones espacio-temporales usuales e y es una dimensón espacial extra, que suponemos parametriza un círculo de radio R. Considera la ecuación de Klein-Gordon sin interacciones en dicho espacio, $(\partial_t^2 - \partial_{x^i}^2 - \partial_y^2 + m^2)\phi$. Usa el desarrollo en serie de Fourier

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\, \mathrm{e}^{iny/R}, \qquad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy\, \phi(x,y)\, \mathrm{e}^{-iny/R},$$

para mostrar que, desde el punto de vista de un observador cuatridimensional, esta ecuación describe un conjunto infinito de partículas masivas y calcula sus masas. Estas partículas se conocen como modos de Kaluza-Klein. ¿Cuál crees que será el límite experimental en el tamaño de la dimensión extra?
Si en lugar de tener un escalar tuviésemos un bosón de gauge A_M con $M = 0,1,2,3,5$, ¿cómo se verían sus distintas componentes, desde el punto de vista de transformaciones de Lorentz cuatridimensionales?

Ejercicio 6: Propiedades de soluciones de la ecuación de Dirac

i) Escribe la forma explícita de los espinores de Dirac de momento p en la representación de Dirac y en la quiral. Demuestra que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) &= \not{p} - m. \end{aligned}$$

ii) Usando la representación quiral, donde sea necesario, comprueba que son ciertas las siguientes (des)igualdades:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) &= 2m\delta^{rs}, \quad \bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) = -2m\delta^{rs}, \\ u^{(r)\dagger}(p)u^{(s)}(p) &= 2E_p\delta^{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(p)v^{(s)}(p) = 2E_p\delta^{rs}, \\ \bar{u}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) &= 0, \quad u^{(r)\dagger}(p)v^{(s)}(p) \neq 0, \\ u^{(r)\dagger}(p)v^{(s)}(\tilde{p}) &= 0, \quad \tilde{p} = (p^0, -\vec{p}). \end{aligned}$$

Ejercicio 7: Base de bilineales de fermiones

i) Comprueba que las 16 matrices 4×4

$$\Gamma^\alpha = \{I, \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$$

tienen inversa $\Gamma_\beta \equiv (\Gamma^\beta)^{-1} = \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, -\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\}$ y que satisfacen $\mathrm{Tr}(\Gamma^\alpha\Gamma_\beta) = \delta^\alpha_\beta$.

ii) Demuestra que son linealmente independientes y que cualquier matriz 4x4 se puede escribir como combinación lineal de ellas.

iii) Muestra que los productos

$$\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi,$$

definen representaciones de Lorentz, incluida la transformación de paridad.

Ejercicio 8: Campos vectoriales masivos (Problema a entregar)

Considera el Lagrangiano de Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.$$

i) Muestra que la teoría no es invariante gauge y que las ecuaciones de movimiento que se derivan de este Lagrangiano son

$$(\Box + m^2)A^\mu = 0, \qquad \partial_\mu A^\mu = 0.$$

ii) ¿Cuántos grados de libertad contiene el bosón vectorial masivo? Compáralo con un bosón vectorial sin masa (bosón de gauge). Discute la diferencia entre el número de grados de libertad en espinores con y sin masa y escalares con y sin masa. Relaciónalo con las representaciones de estados de una partícula del grupo de Poincaré.