Preliminares

Ejercicio 1: Cinemática relativista

i) Dada una velocidad $\beta \in (-1, 1)$ se define la *rapidity* como

$$\eta = \text{arctanh}\beta.$$

Considera una partícula masiva moviéndose con η_A respecto a un observador $\mathcal{O}$. Muestra que para un observador $\mathcal{O}'$ que se mueva a su vez con *rapidity* η en la dirección opuesta a la partícula se tiene que

$$\eta'_A = \eta_A + \eta.$$

Es decir, la *rapidity* es aditiva bajo *boosts*.

ii) Escribe la velocidad y la *rapidity* de una partícula de masa m en movimiento en términos de su energía y momento.

Ejercicio 2: Transformación de Lorentz del campo electromagnético

i) Calcula la forma explícita de la variación infinitesimal bajo el grupo de Lorentz del tensor antismétrico $F^{\mu\nu}$.

ii) Usando que

$$F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k,$$

calcula la variación de E^i y B^i bajo una transformación de Lorentz infinitesimal.

Teoría clásica de campos

Ejercicio 3: De sistemas discretos a campos continuos

Considera un sistema formado por un muelle o una cuerda elástica sobre la que se hallan situadas, regularmente espaciadas, un número n de partículas, todas ellas de masa m. Toma la constante característica de la cuerda τ/d, con τ la tensión de la cuerda y $d = L/(n+1)$ la distancia entre nodos.

i) Asumiendo oscilaciones pequeñas, calcula la ecuación de movimiento de la partícula j-ésima (a partir de la ecuación de Newton o de la energía potencial).

ii) Escribe el Lagrangiano total del sistema y, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, la ecuación de movimiento de la partícula j-ésima. Comprueba que obtienes el mismo resultado que en *(i)*.

iii) El límite continuo se obtiene haciendo $n \to \infty$, $d \to 0$ y $m \to 0$ con $(n+1)d = L$ y $m/d = \rho$ constantes. Toma el límite continuo de la solución de las ecuaciones de movimiento, dada por

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \eta_r(t) \sin[j\pi r/(n+1)], \qquad \eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}.$$

iv) Haz el paso al continuo en la ecuación de movimiento para obtener la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}.$$

Comprueba que la solución del apartado anterior satisface la ecuación de onda, usando $\omega_r = \sqrt{\tau/\rho}\, \pi r/L$.

v) Por último, toma el límite continuo directamente en el Lagrangiano y calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo correspondiente.

Ejercicio 4: Dimensiones

i) La acción tiene las mismas dimensiones de masa que $\hbar$ y por tanto es adimensional en unidades naturales $\hbar = c = 1$. Usando los términos cinéticos como guía, encuentra las dimensiones de masa de campos escalares, espinoriales y campos de gauge en cuatro dimensiones espacio-temporales.

ii) ¿Cómo se generalizan estas dimensiones a un número d arbitrario de dimensiones espacio-temporales?

Ejercicio 5: Propiedades de soluciones de la ecuación de Dirac

i) Escribe la forma explícita de los espinores de Dirac de cuadrimomento $p = (E, \boldsymbol{p})$ con $E = +\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$ en la representación quiral y en la de Dirac.

ii) Demuestra que

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \not{p} + m,$$
$$\sum_{s=1,2} v^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \not{p} - m.$$

iii) Usando la representación quiral, donde sea necesario, comprueba que son ciertas las siguientes (des)igualdades:

$$\overline{u}^{(r)}(\boldsymbol{p})u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 2m\delta_{rs}, \quad \overline{v}^{(r)}(\boldsymbol{p})v^{(s)}(p) = -2m\delta_{rs},$$
$$u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p})u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 2E\delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p})v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 2E\delta_{rs},$$
$$\overline{u}^{(r)}(\boldsymbol{p})v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 0, \quad u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p})v^{(s)}(\boldsymbol{p}) \neq 0, \quad u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p})v^{(s)}(-\boldsymbol{p}) = 0.$$

Ejercicio 6: Base de bilineales covariantes de espinores de Dirac

i) Comprueba que las 16 matrices 4×4

$$\Gamma^\alpha = \{1, \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$$

tienen inversa $\Gamma_\beta \equiv (\Gamma^\beta)^{-1} = \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, -\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\}$ y que satisfacen $\mathrm{Tr}(\Gamma^\alpha\Gamma_\beta) = \delta^\alpha_\beta$.

ii) Demuestra que son linealmente independientes y que cualquier matriz 4×4 se puede escribir como combinación lineal de ellas.

iii) Muestra que los productos

$$\overline{\psi}\psi,\ \overline{\psi}\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$$

definen representaciones de Lorentz, incluida la transformación de paridad.

Ejercicio 7: Campos vectoriales masivos (Problema a entregar)

Considera el Lagrangiano de Proca,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.$$

i) Muestra que esta teoría no es invariante gauge y que las ecuaciones de movimiento que se derivan de este Lagrangiano son

$$(\Box + m^2)A^\mu = 0, \qquad \partial_\mu A^\mu = 0.$$

ii) ¿Cuántos grados de libertad contiene el campo vectorial masivo? Compáralo con un campo vectorial sin masa (campo de gauge). Discute la diferencia entre el número de grados de libertad en espinores con y sin masa y escalares con y sin masa. Relaciónalo con las representaciones de estados de una partícula del grupo de Poincaré.

Cuantización de campos libres

Ejercicio 8: Simetrías discretas C, P y T

i) Comprueba que los espinores de Dirac escritos en la base de Weyl como

$$u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{(s)} \\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\,\xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{(-s)} \\ -\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\,\xi^{(-s)} \end{pmatrix},$$

$$\text{con } \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(-s)} = -\mathrm{i}\sigma^2(\xi^{(s)})^*$$

(nótese que $-\mathrm{i}\sigma^2(\xi^{(-s)})^* = -\xi^{(s)}$) cumplen

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\boldsymbol{p}) &= \gamma^0 u^{(s)}(-\boldsymbol{p}), \quad v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = -\gamma^0 v^{(s)}(-\boldsymbol{p}), \\ u^{(-s)}(-\boldsymbol{p}) &= -\gamma^1\gamma^3\left[u^{(s)}(\boldsymbol{p})\right]^*, \quad v^{(-s)}(-\boldsymbol{p}) = -\gamma^1\gamma^3\left[v^{(s)}(\boldsymbol{p})\right]^*, \\ u^{(s)}(\boldsymbol{p}) &= -\mathrm{i}\gamma^2\left[v^{(s)}(\boldsymbol{p})\right]^*, \quad v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = -\mathrm{i}\gamma^2\left[u^{(s)}(\boldsymbol{p})\right]^*. \end{aligned}$$

ii) Usando estas propiedades, estudia las propiedades de transformación bajo C, P y T del operador $\psi(x)$ (véanse apuntes de la asignatura),

$$\begin{aligned} C\psi(t,\boldsymbol{x})C &= -\mathrm{i}\eta_C,\gamma^2\left[\psi(t,\boldsymbol{x})\right]^*. \\ P\psi(t,\boldsymbol{x})P &= \eta_a\gamma^0\psi(t,-\boldsymbol{x}), \\ T\psi(t,\boldsymbol{x})T &= \gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

iii) Usando las propiedades de transformación bajo C, P y T del operador $\psi(x)$, calcula la transformación bajo C, P y T de bilineales fermiónicos covariantes arbitrarios.

iv) Usando las transformaciones bajo C, P y T de campos vectoriales y escalares, discute la invariancia bajo CPT de Lagrangianos escalares (bajo transformaciones de Lorentz) hermíticos.

Ejercicio 9: Propiedades bajo C, P de sistemas ligados, reglas de suma

i) El positronio se puede considerar un estado ligado no relativista de e^- y e^+. Muestra que un positronio con momento angular orbital L es autoestado de paridad con autovalor $P = (-1)^{L+1}$. Discute cuál sería el resultado si fuese un estado ligado de partícula-antipartícula escalar.

ii) El operador conjugación de carga intercambia electrón y positrón, el positronio debe pues ser un autoestado de $\hat{C}$. Muestra que si el momento angular orbital y el espín total del positronio son, L y S, respectivamente, el autovalor bajo conjugación de carga es $C = (-1)^{L+S}$.

iii) Usando que QED es invariante bajo C y P, discute las posibles desintegraciones de estados de positronio a un número arbitrario de fotones. En particular, muestra que el estado fundamental del para-positronio (espín total 0) puede decaer en dos fotones pero el orto-positronio (espín total 1) no puede hacerlo, pero puede decaer en tres fotones.