Álgebra de un grupo. Representaciones de S_n. Clases de simetría de tensores

Ejercicio 1: Tableros de Young estándar de S_4

Encuentra los tableros de Young estándar de S_4. Deduce el número de irreps no equivalentes y su dimensión.

Ejercicio 2: Tableros de Young estándar de S_5

Repite lo anterior para el grupo S_5.

Ejercicio 3: Idempotente primitivo

Encuentra mediante tableros de Young idempotentes primitivos para S_3. Verifica mediante un cálculo explícito que son tanto idempotentes como primitivos.

Ejercicio 4: Simetrizadores

Demuestra que si $\lambda \neq \mu$, entonces $e^p_\lambda e^q_\mu = 0$ para todo $p, q \in S_n$, donde e^p_λ es un idempotente correspondiente a la representación irreducible λ.

Ejercicio 5: Representaciones tensoriales

Prueba que

$$D(p)^{\{j\}}_{\{i\}} = \delta^{j_1}_{i_{p_1^{-1}}} \cdot \ldots \cdot \delta^{j_n}_{i_{p_n^{-1}}} = \delta^{j_{p_1}}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{j_{p_n}}_{i_n}$$

define una representación de S_n.

Ejercicio 6: Clases de simetría de tensores

Demuestra que en un espacio m–dim no existe ningún tensor de rango $n > m$ totalmente antisimétrico.

Ejercicio 7: Tensores de simetría mixta

Comprueba que los tensores de simetría mixta $\{|m, \alpha, a\rangle, \quad a = 1, 2, \quad \alpha = |++-\rangle\}$ generan un subespacio $T_m(1)$ de V_2^3 invariante bajo S_3.

Ejercicio 8: Tensores invariantes

Prueba que los dos tensores

$$|m, 1, 1\rangle \equiv e_m|++-\rangle \;\; \text{y} \;\; |m, 2, 1\rangle \equiv e_m|--+\rangle$$

generan un subespacio $T'_m(1) \subset V_2^3$ invariante e irreducible bajo G_2.

Ejercicio 9: Bariones

Un *quark* puede encontrarse en dos estados de spin ($|+\rangle$, $|-\rangle$) y tres estados de *sabor* ($|u\rangle$, $|d\rangle$, $|s\rangle$). Encuentra los posibles estados de spin y sabor de la combinación de tres quarks. Se encuentra experimentalmente que tres quarks se combinan para formar 10 hadrones (bariones) de spin 3/2. Determina la simetría de esos estados bajo permutaciones. Se postulan 3 estados de *color* para los quarks ($|R\rangle$, $|G\rangle$, $|B\rangle$). ¿Cuál debe ser el color del barión para que su estado sea antisimétrico bajo permutaciones?