

6. Procesos elementales en QED

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

- La **electrodinámica cuántica** (QED) describe la interacción entre electrones (o cualquier otra partícula cargada de espín 1/2) y fotones.
- Resulta conveniente cuantizar el campo de Maxwell de forma covariante. Conviene además generalizar ligeramente el lagrangiano que describe el campo electromagnético libre y escribir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\tilde{\zeta}}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (1)$$

donde $\tilde{\zeta}$ es un parámetro genérico. En un tema anterior usamos $\tilde{\zeta} = 1$, pero puede demostrarse igualmente que si se impone que $\partial_\mu A^\mu$ se anule entre estados físicos, el espectro de la teoría viene dado exclusivamente por los estados de polarización transversa del fotón.

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

- ▷ El efecto neto del segundo término de (1), que se llama *término de gauge fixing*, es romper la invariancia gauge del lagrangiano, pero los elementos de matriz entre estados físicos serán independientes de la elección de ζ .^a Sin embargo, las reglas de conmutación entre los campos y el propagador dependerán de ζ .
- ▷ Es aconsejable trabajar con ζ genérico y al final comprobar la corrección de los cálculos verificando que ζ se cancela en los elementos de matriz entre estados físicos. No obstante, dependiendo del tipo de problema, los cálculos se simplifican bastante si se elige el llamado R_ζ gauge apropiado. En particular,
- $\zeta = 1$ es el *gauge de 't Hooft-Feynman*,
 - $\zeta = 0$ es el *gauge de Landau*, y
 - $\zeta \rightarrow \infty$ es el *gauge unitario* (sólo intervienen grados de libertad físicos).

^aEn presencia de interacciones la independencia en ζ se logra siempre que A_μ se acople a la materia respetando la invariancia gauge, es decir si lo hace a una corriente conservada.

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

- ▷ Hallemos el propagador del fotón. Para aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este lagrangiano, nótese que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\tilde{\xi}} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\tilde{\xi}} \partial^\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \\ &\Rightarrow \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\tilde{\xi}}\right) \partial^\mu \partial^\nu A_\mu = 0 \\ &\Rightarrow \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\tilde{\xi}}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\mu = 0 \end{aligned}$$

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

- ▷ Ya sabemos que el propagador es una función de Green del operador que actúa sobre el campo en la ecuación anterior. En el espacio de momentos, el propagador del fotón es, por tanto, el inverso de

$$-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu . \quad (2)$$

Nótese que este operador es invertible gracias a que hemos introducido el término de *gauge fixing*, pues $-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$ es singular (tiene autovalor nulo k^μ), lo que tiene que ver con la simetría gauge: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ también es solución de $(g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu = 0$. El inverso de (2), incluyendo la prescripción de Feynman que ya hemos discutido, es el **propagador del fotón**

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (3)$$

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

▷ En efecto,

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) \left[-k^2 g_{\nu\rho} + \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) k_\nu k_\rho \right] = i\delta_\rho^\mu .$$

La elección del signo global es la apropiada pues, mientras que para campos escalares las reglas de conmutación son $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$, para el campo de Maxwell con $\zeta = 1$ son

$$[a_{\vec{p},\lambda}, a_{\vec{q},\lambda'}^\dagger] = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}).$$

- Recordemos que las ecuaciones de Maxwell en presencia de fuentes vienen descritas a nivel clásico a partir del lagrangiano invariante gauge U(1) que se obtiene introduciendo en el lagrangiano de Dirac una derivada covariante lo que conduce al acoplamiento mínimo del campo electromagnético con cargas y corrientes $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = eQ_f \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, donde Q_f es la carga eléctrica en unidades de e del fermión f aniquilado por el campo ψ . De esta forma se obtiene el lagrangiano de la electrodinámica clásica.

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

- Para describir la interacción electromagnética a nivel cuántico (QED) hemos de fijar el gauge, como en (1), e interpretar las interacciones entre campos cuánticos como intercambio de partículas (fotones, electrones y antielectrones o positrones). El lagrangiano de partida es

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieQ_f A_\mu$$

que contiene una interacción de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -eQ_f A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4)$$

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

- Para hallar perturbativamente la matriz de *scattering* de un proceso en QED basta con aplicar las reglas de Feynman correspondientes. Respecto a los casos que hemos tratado en el tema anterior, las novedades son: el propagador del fotón, que se lee directamente de (3), el vértice de interacción, que se deduce trivialmente de (4), y un factor de polarización cuando el fotón se encuentra en una pata externa, que no existe en el caso de un campo escalar. Resumimos a continuación las **reglas de Feynman de la QED**:

El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

– Patas externas:

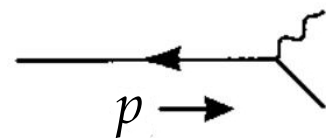
fermión entrante:


 $= u^{(s)}(\vec{p})$

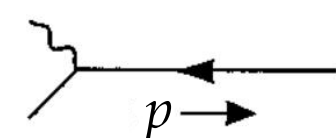
fermión saliente:


 $= \bar{u}^{(s)}(\vec{p})$

antifermión entrante:


 $= \bar{v}^{(s)}(\vec{p})$

antifermión saliente:


 $= v^{(s)}(\vec{p})$

fotón entrante:

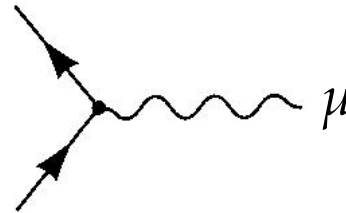

 $= \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda)$

fotón saliente:


 $= \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda)$

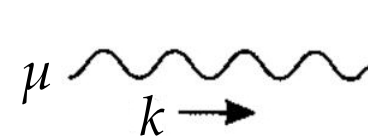
El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

– Vértice:

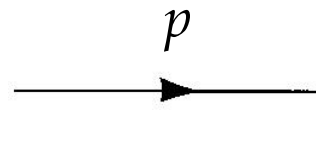


$$= -ieQ_f\gamma^\mu$$

– Propagadores:



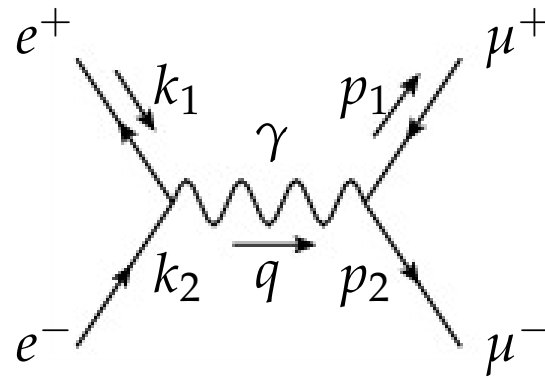
$$= -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]$$



$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Consideremos la aniquilación de un electrón y un positrón para dar un muón y un antimuón. En QED este proceso viene descrito a orden más bajo de TP (nivel árbol) por el diagrama de la figura.



- ▷ El muón tiene la misma carga del electrón, $Q_\mu = Q_e = -1$, y una masa M unas 200 veces mayor que la masa m del electrón.
- ▷ Vamos a hallar paso a paso y en detalle la sección eficaz de este proceso.

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- En primer lugar, asignamos momentos a todas las partículas del diagrama y usamos la conservación del cuadrimomento en cada vértice, lo que fija el cuadrimomento del fotón virtual que se propaga entre los dos vértices de interacción,

$$q = k_1 + k_2 = p_1 + p_2 .$$

- ▷ Las patas externas son fermiones, cuyos espines etiquetamos mediante índices r_1, r_2, s_1, s_2 que toman dos valores posibles $\{1, 2\}$.
- Aplicando las reglas de Feynman, recorriendo cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, el elemento de matriz invariante viene dado por

$$i\mathcal{M} = \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2)(ie\gamma^\beta)v^{(s_1)}(\vec{p}_1)\frac{(-i)}{q^2}\left[g_{\alpha\beta} - (1 - \xi)\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right]\bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1)(ie\gamma^\alpha)u^{(r_2)}(\vec{k}_2) .$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- ▷ Nótese que como los fermiones externos están sobre su capa de masas satisfacen las respectivas ecuaciones de Dirac,

$$\not{k}_1 v^{(r_1)}(\vec{k}_1) = -m v^{(r_1)}(\vec{k}_1), \quad \not{k}_2 u^{(r_2)}(\vec{k}_2) = m u^{(r_2)}(\vec{k}_2),$$

así que la amplitud no depende del parámetro ξ , como deber ser, ya que

$$q_\alpha \bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1) \gamma^\alpha u^{(r_2)}(\vec{k}_2) = \bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1) (\not{k}_1 + \not{k}_2) u^{(r_2)}(\vec{k}_2) = 0.$$

- ▷ Podríamos haber trabajado desde el principio en el **gauge de 't Hooft-Feynman** ($\xi = 1$). Por tanto,

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) \gamma^\alpha v^{(s_1)}(\vec{p}_1) \bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1) \gamma_\alpha u^{(r_2)}(\vec{k}_2).$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Para hallar $|\mathcal{M}|^2$, nótese que

$$(\bar{u}\gamma^\alpha v)^* = v^\dagger \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^{0\dagger} u = v^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 u = \bar{v} \gamma^\alpha u ,$$

donde se ha usado

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 , \quad \gamma^{\alpha\dagger} = \gamma_\alpha , \quad \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 = \gamma^\alpha .$$

Se trata además de un número complejo que podemos multiplicar en cualquier orden. Lo mismo ocurre con la otra línea fermiónica.

- ▷ Conviene escribir,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) \gamma^\alpha v^{(s_1)}(\vec{p}_1) \bar{v}^{(s_1)}(\vec{p}_1) \gamma^\beta u^{(s_2)}(\vec{p}_2) \\ \times \bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1) \gamma_\alpha u^{(r_2)}(\vec{k}_2) \bar{u}^{(r_2)}(\vec{k}_2) \gamma_\beta v^{(r_1)}(\vec{k}_1) \quad (5)$$

Podemos ahora hacer uso de las propiedades de espinores y matrices de Dirac, que conducen a multitud de identidades ([Diracología](#)).

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

▷ En particular, puede verse que los dos estados de espín a lo largo del eje z satisfacen

$$u^{(1)}(\vec{p})\bar{u}^{(1)}(\vec{p}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m),$$

$$u^{(2)}(\vec{p})\bar{u}^{(2)}(\vec{p}) = \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m),$$

$$v^{(1)}(\vec{p})\bar{v}^{(1)}(\vec{p}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m),$$

$$v^{(2)}(\vec{p})\bar{v}^{(2)}(\vec{p}) = \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m),$$

donde $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ en el sistema de referencia en el que $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$.

En general,

$$u(\vec{p}, n)\bar{u}(\vec{p}, n) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m), \quad v(\vec{p}, n)\bar{v}(\vec{p}, n) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m)$$

proyectan sobre polarizaciones bien definidas a lo largo de una dirección n^μ , que cumple $n^2 = -1$ y $p_\mu n^\mu = 0$.

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- ▷ Si elegimos, por simplicidad, el eje z como dirección del movimiento, $p^\mu = (E, 0, 0, |\vec{p}|)$, los operadores anteriores proyectan sobre los dos estados de helicidad de partícula y antipartícula, respectivamente, si tomamos $n^\mu = \pm(|\vec{p}|/m, 0, 0, E/m)$.
- ▷ En particular, en el límite ultrarrelativista ($E \gg m$) los proyectores sobre quiralidades *right* y *left* de partícula y antipartícula son:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(\vec{p})\bar{u}^{(1)}(\vec{p}) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m) \rightarrow u_R(p)\bar{u}_R(\vec{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2} (\not{p} + m), \\
 u^{(2)}(\vec{p})\bar{u}^{(2)}(\vec{p}) &= \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m) \rightarrow u_L(p)\bar{u}_L(\vec{p}) = \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{p} + m), \\
 v^{(1)}(\vec{p})\bar{v}^{(1)}(\vec{p}) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m) \rightarrow v_L(p)\bar{v}_L(\vec{p}) = \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{p} - m), \\
 v^{(2)}(\vec{p})\bar{v}^{(2)}(\vec{p}) &= \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m) \rightarrow v_R(\vec{p})\bar{v}_R(\vec{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2} (\not{p} - m).
 \end{aligned}$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

▷ Otra propiedad que se demuestra fácilmente de lo anterior es

$$\bar{u}(\vec{p}, n)\Gamma u(\vec{p}, n) = \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m) \right], \quad \bar{v}(\vec{p}, n)\Gamma v(\vec{p}, n) = \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m) \right]$$

donde Γ es una matriz 4×4 arbitraria.

▷ Por otro lado, si los fermiones no están polarizados el cálculo se simplifica notablemente pues podemos aplicar directamente las relaciones de completitud,

$$\sum_s u^{(s)}(\vec{p})\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^{(s)}(\vec{p})\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} - m,$$

que conducen a

$$\sum_s \bar{u}^{(s)}(\vec{p})\Gamma u^{(s)}(\vec{p}) = \text{Tr} [\Gamma(\not{p} + m)], \quad \sum_s \bar{v}^{(s)}(\vec{p})\Gamma v^{(s)}(\vec{p}) = \text{Tr} [\Gamma(\not{p} - m)].$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Volvamos a nuestro cálculo (5) y supongamos por simplicidad que tanto los fermiones iniciales como los finales no están polarizados. Tenemos entonces que promediar sobre espines iniciales y sumar sobre espines finales:

$$\begin{aligned}\widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p}_1 - M)\gamma^\beta(\not{p}_2 + M)] \text{Tr}[\gamma_\alpha(\not{k}_2 + m)\gamma_\beta(\not{k}_1 - m)] ,\end{aligned}$$

que aparece como el producto de las trazas de las dos **cadena fermiónicas**.

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Para hallar las trazas volvemos a recurrir a la **Diracología**. Necesitamos en particular,

$$\text{Tr}[\# \text{ impar } \gamma' \text{'s}] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$$

de donde

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\gamma^\alpha (\not{p}_1 - M) \gamma^\beta (\not{p}_2 + M)] &= \text{Tr}[\gamma^\alpha \not{p}_1 \gamma^\beta \not{p}_2] - M^2 \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] \\ &= 4(p_1^\alpha p_2^\beta - (p_1 p_2) g^{\alpha\beta} + p_1^\beta p_2^\alpha) - 4M^2 g^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\gamma_\alpha (\not{k}_2 + m) \gamma_\beta (\not{k}_1 - m)] &= \text{Tr}[\gamma_\alpha \not{k}_1 \gamma_\beta \not{k}_2] - m^2 \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] \\ &= 4(k_{1\alpha} k_{2\beta} - (k_1 k_2) g_{\alpha\beta} + k_{1\beta} k_{2\alpha}) - 4m^2 g_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{16e^4}{4q^4} [(p_1k_1)(p_2k_2) - (p_1p_2)(k_1k_2) + (p_1k_2)(p_2k_1) - m^2(p_1p_2) \\
 &\quad - (p_1p_2)(k_1k_2) + 4(p_1p_2)(k_1k_2) - (p_1p_2)(k_1k_2) + 4m^2(p_1p_2) \\
 &\quad + (p_1k_2)(p_2k_1) - (p_1p_2)(k_1k_2) + (p_1k_1)(p_2k_2) - m^2(p_1p_2) \\
 &\quad - M^2(k_1k_2) + 4M^2(k_1k_2) - M^2(k_1k_2) + 4M^2m^2] \\
 &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_1k_1)(p_2k_2) + (p_1k_2)(p_2k_1) + m^2(p_1p_2) + M^2(k_1k_2) + 2M^2m^2] .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- El siguiente paso es elegir un sistema de referencia. Supongamos el sistema centro de masas y sea θ el ángulo que forma el μ^+ saliente con el e^+ incidente,

$$k_1^\mu = E(1, 0, 0, \beta_i) ,$$

$$k_2^\mu = E(1, 0, 0, -\beta_i) , \quad \beta_i = \sqrt{1 - m^2/E^2} ,$$

$$p_1^\mu = E(1, \beta_f \sin \theta, 0, \beta_f \cos \theta) ,$$

$$p_2^\mu = E(1, -\beta_f \sin \theta, 0, -\beta_f \cos \theta) , \quad \beta_f = \sqrt{1 - M^2/E^2} .$$

Entonces,

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\text{CM}}^2 = 4E^2 ,$$

$$(p_1 k_1) = (p_2 k_2) = E^2(1 - \beta_i \beta_f \cos \theta) ,$$

$$(p_1 k_2) = (p_2 k_1) = E^2(1 + \beta_i \beta_f \cos \theta) ,$$

$$(p_1 p_2) = E^2(1 + \beta_f^2) = E^2(2 - M^2/E^2) ,$$

$$(k_1 k_2) = E^2(1 + \beta_i^2) = E^2(2 - m^2/E^2)$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

y la expresión (6) queda

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2E^4} [2E^4(1 + \beta_i^2 \beta_f^2 \cos^2 \theta) + 2E^2(m^2 + M^2)] \\ &= e^4 \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{E_{\text{CM}}^2} + \left(1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \end{aligned}$$

- La sección eficaz diferencial del proceso se obtiene a partir de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} |\mathcal{M}|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} \sqrt{\frac{E_{\text{CM}}^2 - 4M^2}{E_{\text{CM}}^2 - 4m^2}} \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{E_{\text{CM}}^2} + \left(1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \cos^2 \theta \right]$$

donde se ha sustituido la constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi)$.

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

▷ Nótese que $E_{\text{CM}} > 2M > 2m$, la energía umbral del proceso. La sección eficaz total es

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

▷ En el límite ultrarrelativista ($E_{\text{CM}} \gg M > m$),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 + \cos^2\theta)$$
$$\sigma \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{CM}}^2}.$$

- Al cuantizar el campo de Maxwell de forma covariante hemos introducido cuatro vectores de polarización $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$ que satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad y completitud:

$$\begin{aligned}\epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda)\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') &= -\zeta_\lambda\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1, \\ \sum_{\lambda=0}^3 \zeta_\lambda \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda)\epsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) &= -g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{7}$$

▷ Sea n^μ un vector tipo temporal que satisface $n_\mu n^\mu = 1$ y $n^0 > 0$.

Diremos que $\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) = n^\mu$ es el vector de polarización **escalar**.

Llamaremos $\epsilon^\mu(\vec{k}, 3)$ polarización **longitudinal** en el plano $n - k$ si $\epsilon_\mu(\vec{k}, 3)n^\mu = 0$ y $\epsilon_\mu(\vec{k}, 3)\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = -1$, es decir,

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = \frac{k^\mu - (kn)n^\mu}{\sqrt{(kn)^2 - k^2}}.$$

Los otros dos vectores de polarización (**transversa**) $\epsilon^\mu(\vec{k}, 1)$ y $\epsilon^\mu(\vec{k}, 2)$ los tomamos ortogonales entre sí y perpendiculares al plano $n - k$, de modo que

$$\epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda)\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2.$$

- ▷ Por ejemplo, en el sistema de referencia en el que el vector de propagación \vec{k} define el eje z , es decir, $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, y $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ de lo anterior deducimos que

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) = (1, 0, 0, 0) , \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1) ,$$

y podemos escoger varias bases para las polarizaciones transversas, como

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0) , \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0) \quad (\text{lineales})$$

o bien

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, L) = (0, \cos \theta, i \sin \theta, 0) , \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, R) = (0, \cos \theta, -i \sin \theta, 0) \quad (\text{elípticas})$$

(que se llaman circulares si $\theta = \pi/4$).

- ▷ Ya hemos visto que el estado de polarización escalar $|\vec{k}, 0\rangle$ tiene norma negativa.
- ▷ Por otro lado, el campo electromagnético clásico en ausencia de fuentes (radiación) sólo tiene dos estados de polarización, mientras que su versión cuántica parece tener cuatro.
- ▷ Ambos problemas están relacionados y se resuelven, como ya hemos visto, imponiendo que $\partial_\mu A^\mu$ evaluado entre estados físicos se anula (cuantización de Gupta-Bleuler): **solamente los dos estados de polarización transversos contribuyen a los observables** físicos, así que no tenemos que preocuparnos por los escalares ni los longitudinales.
- ▷ Sin embargo **todos contribuyen al propagador**, que no es un observable. Veamos esto.

▷ Tomemos, el gauge de 't Hooft-Feynman ($\xi = 1$), en el que el propagador es

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

que usando las relaciones de completitud (7) puede escribirse como

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=0}^3 \zeta_\lambda \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{k}, \lambda).$$

Separando las contribuciones transversa, longitudinal y escalar tenemos

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{k}, \lambda) + \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right].$$

Los dos últimos términos los podemos reescribir como suma de

$$\tilde{D}_C^{\mu\nu}(k) = \frac{i n^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2} \quad \text{y} \quad \tilde{D}_R^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 [(kn)^2 - k^2]} [k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)].$$

- ▷ Si tomamos el sistema de referencia en el que $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, es decir $n^\mu = g^{\mu 0}$ y $kn = k^0$, vemos que el primero de ellos es

$$\begin{aligned} D_C^{\mu\nu}(x - x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_C^{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-x')} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{\vec{k}^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{-ik^0(x^0-x'^0)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x^0 - x'^0). \end{aligned}$$

Para entender el significado de las distintas contribuciones, consideremos un proceso mediado por el intercambio de un fotón (e.g. como el de antes).

En esta situación estamos en **presencia de fuentes**.

- ▷ El elemento de matriz de este proceso puede escribirse como

$$\int d^4x \int d^4x' j_{1\mu}(x) D_F^{\mu\nu}(x - x') j_{2\nu}(x') \quad (8)$$

donde $j_1^\mu(x)$ y $j_2^\mu(x')$ son corrientes interactuando mediante el campo del fotón.

- ▷ La parte $D_C^{\mu\nu}$ del propagador, en el sistema de referencia que hemos elegido, contribuye con

$$\int d^4x \int d^4x' \frac{j_1^0(x)j_2^0(x')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x^0 - x'^0),$$

que no es otra cosa que la **interacción instantánea de Coulomb** (¡en el mismo instante de tiempo!) entre las dos densidades de carga $j_1^0(x)$ y $j_2^0(x')$.

- ▷ En cuanto a la parte **Restante** $D_R^{\mu\nu}$, nótese que (8) en el espacio de momentos es

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} j_{1\mu}(k) \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) j_{2\nu}(k)$$

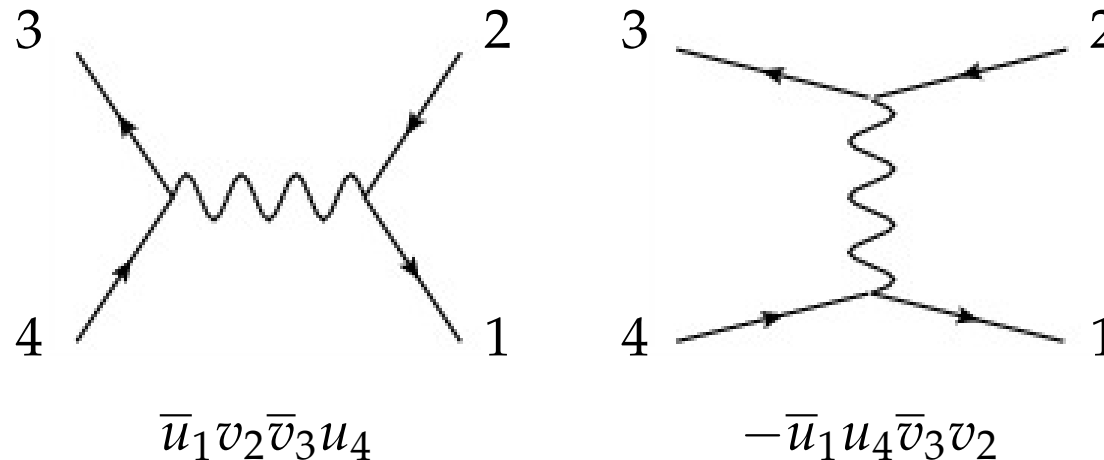
y que las corrientes son conservadas, es decir, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ o bien $k_\mu j^\mu(k) = 0$. Por tanto los términos proporcionales a k^μ ó k^ν en $\tilde{D}_F^{\mu\nu}$ son irrelevantes y $\tilde{D}_R^{\mu\nu}(k)$ **no contribuye a la interacción**. Ésta es la razón por la que el gauge de 't Hooft-Feynman es válido: si no hubiéramos tomado $\xi = 1$ habría términos extra en el propagador proporcionales a $k^\mu k^\nu$, irrelevantes porque se acoplan a una corriente conservada.

- ▷ Vemos que el campo de la interacción electromagnética tiene una **triple naturaleza**:^a
1. Una parte es completamente **arbitraria** (debido a la invariancia gauge);
 2. Otra, llamado campo *constrained* o **constreñido** (la interacción coulombiana, en el sistema de referencia que hemos elegido), está totalmente determinada por las fuentes;
 3. Y la tercera parte es **dinámica**, consistente en grados de libertad independientes, es la radiación electromagnética pura, que en electrodinámica cuántica se corresponde con los fotones.

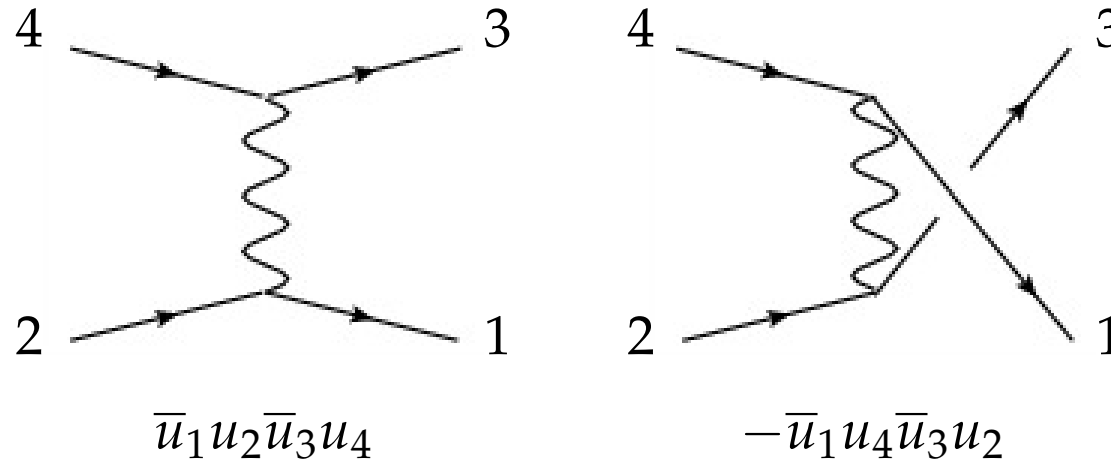
^aPasa igual con todas las fuerzas fundamentales.

- ▷ La parte dinámica, presente incluso en ausencia de fuentes, puede ser subdominante respecto a la constreñida.
- ▷ Así por ejemplo, es la interacción coulombiana la que explica en primera aproximación la estructura del átomo de hidrógeno: el potencial de Coulomb viene dado por la posición del electrón.
- ▷ Ésta última es un operador en mecánica cuántica (lo que determina que las órbitas estén cuantizadas) pero esto no significa que involucre grados de libertad cuánticos del campo electromagnético. Solamente si hacemos un tratamiento refinado descubriremos los efectos cuánticos (el efecto Lamb, por ejemplo).

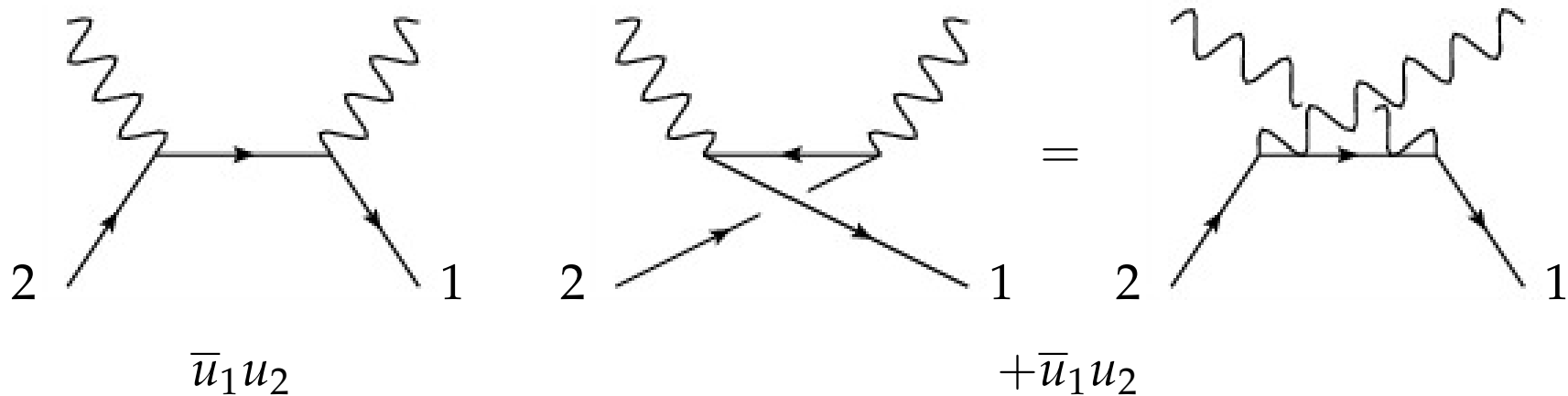
- En QED se trabaja con campos espinoriales y ya hemos visto que hay que tener cuidado porque las contracciones de Wick de estos campos pueden dar lugar a signos relativos entre los distintos diagramas que contribuyen a la amplitud de un proceso. Recordemos que hay que mirar si la reordenación de los espinores corresponde a una permutación par o impar. Veamos unos cuantos ejemplos.
- **Scattering de Bhabha:** $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



– Scattering de Møller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$



– Scattering de Compton: $e\gamma \rightarrow e\gamma$ (¡no hay cambio de signo!)



- Recordemos también que si hay dos partículas idénticas en el estado final (por ejemplo, $\gamma\gamma$, e^+e^+ , e^-e^-) la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{1}{2} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} .$$

– Caso del fotón.

Tiene dos estados de polarización (**transversos**). Supongamos el sistema de referencia en el que $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ (nuestras conclusiones serán independientes de esta elección gracias a la covariancia Lorentz). Entonces, pueden ser

$$\text{lineales: } \epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0),$$

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0)$$

$$\text{elípticas: } \epsilon^\mu(\vec{k}, L) = (0, \cos \theta, i \sin \theta, 0), \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, R) = (0, \cos \theta, -i \sin \theta, 0).$$

En cualquier caso, si sumamos sobre los dos estados de polarización,

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}, \quad Q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que, debido a la invariancia gauge, en la práctica podemos ignorar el término $Q_{\mu\nu}$.

– Caso del fotón.

En efecto, la amplitud de un proceso arbitrario de QED que involucre un fotón externo con momento k (tomamos un fotón saliente) puede escribirse con toda generalidad como

$$\mathcal{M}(\vec{k}, \lambda) = \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \mathcal{M}^{\mu}(\vec{k})$$

y cualquier observable, en este sistema de referencia, será proporcional a

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} |\mathcal{M}(\vec{k}, \lambda)|^2 &= \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) \mathcal{M}^{\mu}(\vec{k}) \mathcal{M}^{\nu*}(\vec{k}) \\ &= |\mathcal{M}^1(\vec{k})|^2 + |\mathcal{M}^2(\vec{k})|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

– Caso del fotón.

Ahora bien, sabemos que el campo del fotón se acopla a una corriente conservada mediante una interacción $\int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x)$, con $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, así que

$$\mathcal{M}^\mu(\vec{k}) = \int d^4x e^{ikx} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle$$

donde los estados inicial y final incluyen todas las partículas externas excepto el fotón en cuestión.

Como la simetría gauge se debe preservar también a nivel cuántico, de la conservación de la corriente y la expresión anterior deducimos^a

$$\begin{aligned} k_\mu \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) &= i \int d^4x e^{ikx} \langle f | \partial_\mu j^\mu(x) | i \rangle = 0 \\ \Rightarrow k_\mu \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) &= \omega \mathcal{M}^0(\vec{k}) - \omega \mathcal{M}^3(\vec{k}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}^0(\vec{k}) = \mathcal{M}^3(\vec{k}). \end{aligned}$$

^a $0 = \int d^4x \partial_\mu \left[e^{ikx} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle \right] = ik_\mu \int d^4x e^{ikx} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle + \int d^4x e^{ikx} \langle f | \partial_\mu j^\mu(x) | i \rangle.$

– Caso del fotón.

Así que podemos reescribir (9) como

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) \mathcal{M}^{\mu}(\vec{k}) \mathcal{M}^{\nu*}(\vec{k}) \\ = |\mathcal{M}^1(\vec{k})|^2 + |\mathcal{M}^2(\vec{k})|^2 + |\mathcal{M}^3(\vec{k})|^2 - |\mathcal{M}^0(\vec{k})|^2 \end{aligned}$$

que equivale a reemplazar

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu} .$$

– Caso de un bosón vectorial masivo.

Tiene tres estados de polarización (uno longitudinal y dos transversos). En este caso podemos elegir el sistema de referencia en reposo, $k^\mu = (M, 0, 0, 0)$ y los estados de polarización

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0), \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1).$$

Si sumamos sobre polarizaciones,

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}, \quad Q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en el sistema de referencia en reposo.

- Caso de un bosón vectorial masivo.

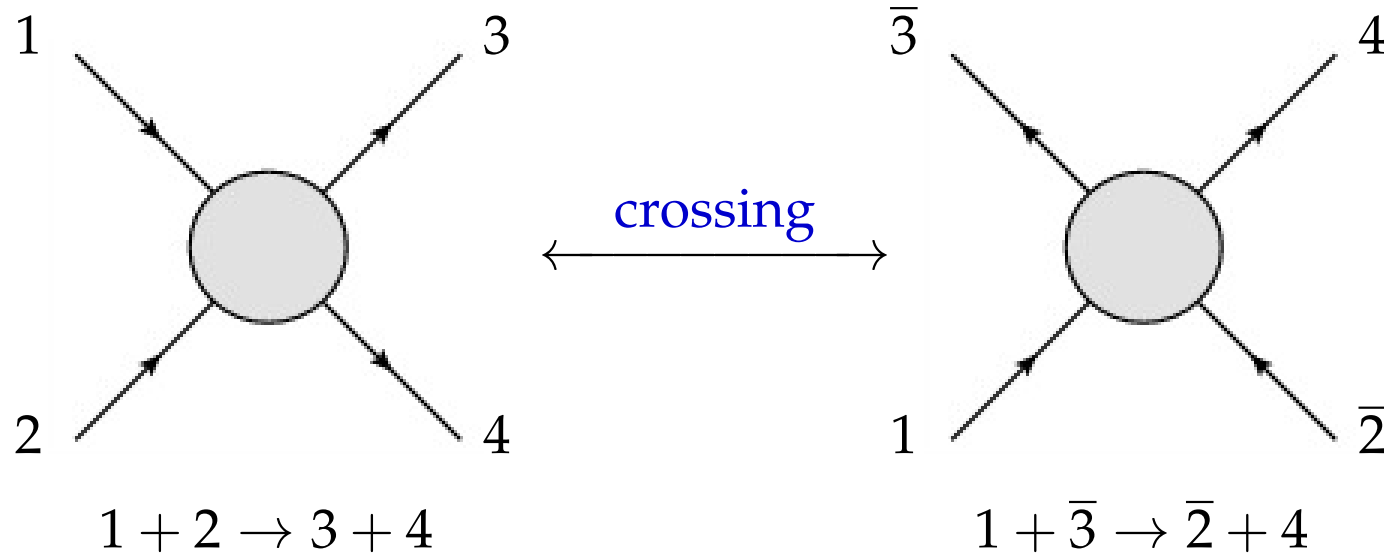
Podemos obtener la expresión válida para $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ con $M^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2$ haciendo un **boost** con $\gamma = k^0 / M$, $\gamma\vec{\beta} = \vec{k} / M$,

$$\Lambda_{\mu'}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & \delta_{11} + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & \delta_{12} + (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \delta_{13} + (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ \gamma\beta_2 & \delta_{21} + (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \delta_{22} + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & \delta_{23} + (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ \gamma\beta_3 & \delta_{31} + (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \delta_{32} + (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & \delta_{33} + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

que conduce a

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu}^0 \Lambda_{\nu}^0 = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{M^2}.$$

- Los elementos de matriz de procesos tales como $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ y $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ están relacionados mediante la llamada simetría de **crossing**: la matriz S es la misma reemplazando los momentos convenientemente.



▷ En este caso,

$$k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2 \xleftrightarrow{\text{crossing}} k_1, -p_1 \rightarrow -k_2, p_2$$

- Antes de poner algunos ejemplos de procesos cuyas amplitudes están relacionadas por la simetría de **crossing**, conviene introducir las **variables de Mandelstam** que resultan muy cómodas para describir la cinemática de los procesos de dos cuerpos a dos cuerpos y facilitan mucho la aplicación de esta simetría.

Para el proceso del ejemplo anterior,

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2$$

$$(s, t, u) \xleftrightarrow[k_2 \leftrightarrow -p_1]{\text{crossing}} (t, s, u)$$

Es fácil comprobar que

$$s + t + u = \sum_i m_i^2$$

(la suma del cuadrado de las masas de las cuatro partículas externas.)

▷ Así, en términos de variables de Mandelstam, la cinemática del proceso que hemos calculado antes en detalle, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, queda

$$q^2 = s ,$$

$$(p_1k_1) = (p_2k_2) = (m^2 + M^2 - t)/2 ,$$

$$(p_1k_2) = (p_2k_1) = (m^2 + M^2 - u)/2 ,$$

$$(p_1p_2) = (s - 2M^2)/2 ,$$

$$(k_1k_2) = (s - 2m^2)/2$$

que conduce a

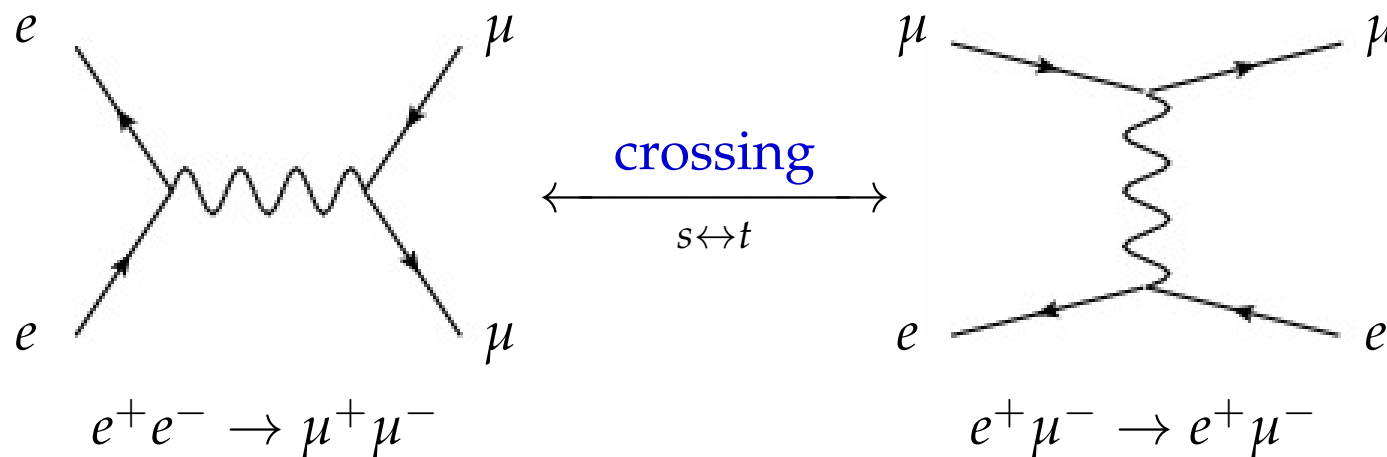
$$\widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right] .$$

Se dice que este proceso tiene lugar en **canal s**.

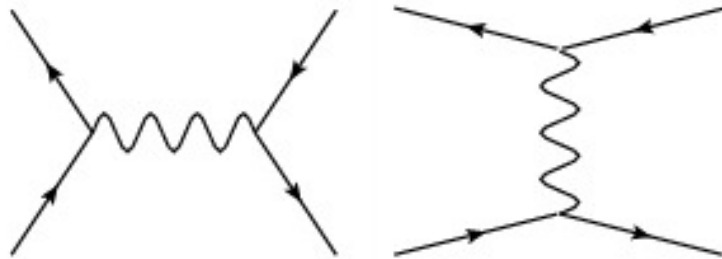
- La simetría de **crossing** nos permite encontrar la amplitud del proceso “cruzado” $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$ intercambiando s con t en la expresión anterior,

$$\widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}(e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right],$$

que tiene lugar en **canal t**:



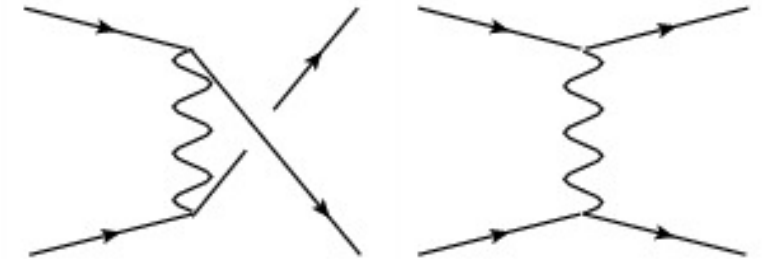
- Otros ejemplos, en los que contribuyen dos canales, son:



Bhabha

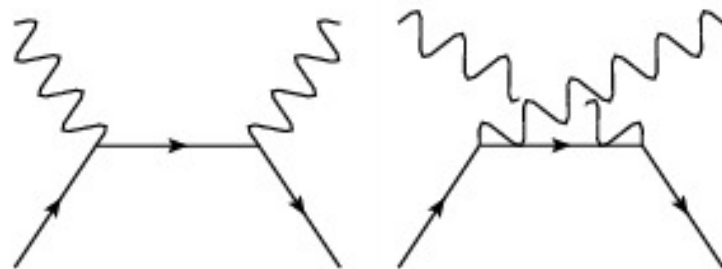
$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$$

crossing
 $s \leftrightarrow u$



Møller

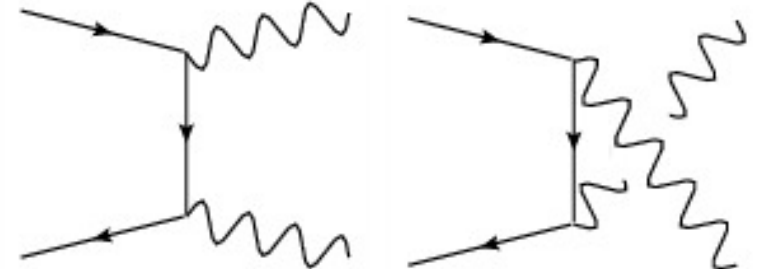
$$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$$



Compton

$$e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$$

crossing
 $s \leftrightarrow t$



Aniquilación

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$$