

4. Interacciones de campos y diagramas de Feynman

La matriz S

- Hemos cuantizado campos libres. Ahora supondremos **interacción**:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad H_{\text{int}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)$$

(si \mathcal{L}_{int} no contiene derivadas de campos)

Por ejemplo: en QED, $\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ y en la teoría $\lambda\phi^4$, $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$

- ▷ Supondremos siempre **constante de acoplamiento pequeña** \Rightarrow **perturbación**
(parámetro relevante en QED: $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137 \ll 1$)
- Objetivo: hallar **probabilidad de transición** en un proceso de **scattering**

La matriz S

- En la **imagen de Schrödinger** los estados dependen del tiempo:

$|a(t)\rangle$ la evolución en un tiempo t de un **estado inicial** $|a\rangle \equiv |a(t_i)\rangle$ etiquetado por observables compatibles con autovalores a (e.g. \vec{p}_i y \vec{s}_i) a un **estado final** $|b\rangle \equiv |b(t_f)\rangle$ tras la colisión

- ▷ La **amplitud de probabilidad** de que $|a\rangle$ evolucione hasta $|b\rangle$ es entonces

$$\langle b|a(t_f)\rangle = \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle$$

Se llama **matriz S** al operador evolución $e^{-iH(t_f-t_i)}$ en el límite $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$, donde H es el hamiltoniano de la teoría de campos. La **amplitud de scattering** viene dada por

$$\langle b|S|a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle$$

La matriz S

▷ Nótese que si $\langle a|a\rangle = 1$ y $|n\rangle$ es una base completa de estados, $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$, tenemos

$$1 = \sum_n |\langle n|S|a\rangle|^2 = \sum_n \langle a|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|a\rangle = \langle a|S^\dagger S|a\rangle$$

lo que significa que $S^\dagger S = 1$, es decir, S es unitaria. Por tanto, la **unitariedad** de S expresa la **conservación de la probabilidad**. Conviene escribir

$$\begin{aligned} S &\equiv 1 + iT \\ S^\dagger S &= 1 \end{aligned} \Rightarrow -i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

Entonces, definiendo $T_{ba} = \langle b|T|a\rangle$ tenemos que

$$-i(T_{ba} - T_{ab}^*) = \sum_n T_{bn}^* T_{an} \Rightarrow 2 \operatorname{Im} T_{aa} = \sum_n |T_{an}|^2$$

que conduce al **teorema óptico**

La matriz S

- En la **imagen de Heisenberg** son los operadores y no los estados los que dependen del tiempo, más apropiado para la TQC en la que los campos son operadores $\phi(t, \vec{x})$.
- ▷ Los estados $|a\rangle \equiv |a(t_i)\rangle$ y $|b\rangle \equiv |b(t_f)\rangle$ son en la imagen de Heisenberg $|a\rangle_H = e^{iHt} |a(t)\rangle$ y $|b\rangle_H = e^{iHt} |b(t)\rangle$, independientes del tiempo
- ▷ Por tanto, definiendo los estados en la imagen de Heisenberg $|a; t_i\rangle = e^{iHt_i} |a\rangle$ y $|b; t_f\rangle = e^{iHt_f} |b\rangle$, la matriz S será

$$\langle b | S | a \rangle = \lim_{(t_f - t_i) \rightarrow \infty} \langle b | e^{-iH(t_f - t_i)} | a \rangle = \lim_{(t_f - t_i) \rightarrow \infty} \langle b; t_f | a; t_i \rangle$$

La fórmula de reducción de LSZ

- Vamos a ver que la matriz S entre estados iniciales y finales de la misma especie etiquetados por sus momentos (supongamos por simplicidad que no tienen índices de espín),

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle$$

donde se sobreentiende que $t_i \rightarrow -\infty$ y $t_f \rightarrow +\infty$, puede expresarse en función de valores esperados en el vacío de productos de campos **ordenados temporalmente** (que enseguida definiremos).

- ▷ Para ello, notemos en primer lugar que si tenemos un campo escalar real **libre**,

$$\phi_{\text{free}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx})$$

entonces

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}} = i \int d^3 x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{free}}(x), \quad \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger = -i \int d^3 x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{free}}(x). \quad (1)$$

La fórmula de reducción de LSZ

▷ En efecto,

$$\begin{aligned} i \int d^3x e^{ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_{\text{free}}(x) &= i \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 e^{ipx} \right) \\ &= i \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(-ia_{\vec{p}}(E_{\vec{p}} + E_{\vec{k}}) e^{i(k-p)x} + ia_{\vec{p}}^\dagger(E_{\vec{p}} - E_{\vec{k}}) e^{i(k+p)x} \right) \\ &= \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}} . \end{aligned}$$

La fórmula de reducción de LSZ

- Esperamos que

$$\phi(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \phi_{\text{in}}(x), \quad \phi(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \phi_{\text{out}}(x), \quad (2)$$

donde $\phi_{\text{in}}(x)$ y $\phi_{\text{out}}(x)$ son **campos libres** (antes y después de la interacción, resp.) y Z es un factor constante denominado **renormalización de la función de onda** (cuyo significado comprenderemos más adelante). Por tanto, usando (1),

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{in})} = -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x), \quad (3)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{out})} = -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \quad (4)$$

Así que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{in})} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{-ik_1x} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

La fórmula de reducción de LSZ

▷ Conviene escribir esta expresión en forma covariante notando que

$$\begin{aligned} & \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{in})} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | (a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{out})}) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \end{aligned}$$

pues $a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{out})}$ actúa sobre $\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f |$ destruyendo una partícula en el estado final de momento \vec{k}_1 y como supondremos que en el proceso de **scattering** no hay partículas que se comporten como meros espectadores (ningún \vec{k}_i coincide con un \vec{p}_j) esta operación da cero.

Es decir, en realidad estamos calculando la parte iT de la matriz S .

La fórmula de reducción de LSZ

▷ Y, por otro lado, a partir de (3) y (4),

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2E_{\vec{k}}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{out})} \right) &= iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \right) \\
 &= iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left(e^{-ikx} \partial_0 \phi - \phi \partial_0 e^{-ikx} \right) \\
 &= iZ^{-1/2} \int d^4x \left[e^{-ikx} \partial_0^2 \phi + \cancel{(\partial_0 e^{-ikx}) \partial_0 \phi} - \cancel{\partial_0 \phi \partial_0 e^{-ikx}} - \phi \partial_0^2 e^{-ikx} \right] \\
 &= iZ^{-1/2} \int d^4x \left[e^{-ikx} \partial_0^2 \phi - \phi (\nabla^2 - m^2) e^{-ikx} \right] \\
 &= iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} \left(\partial_0^2 \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi \right) \\
 &= iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} (\square + m^2) \phi(x) , \tag{6}
 \end{aligned}$$

La fórmula de reducción de LSZ

donde en la primera igualdad se ha usado que

$$\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x f(t, \vec{x}) = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x f(t, \vec{x}) = - \int d^4x \partial_t f(t, \vec{x}) , \quad (7)$$

con $f(t, \vec{x}) = -iZ^{-1/2}e^{-ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi$

en la antepenúltima se ha sustituido

$$\phi \partial_0^2 e^{-ikx} = \phi (\nabla^2 - m^2) e^{-ikx} ,$$

ya que $k^2 = m^2$ y en la penúltima se ha usado que

$$\int d^3x \nabla (e^{-ikx} \nabla \phi) = 0 \Rightarrow \int d^3x (\nabla e^{-ikx}) \nabla \phi = - \int d^3x e^{-ikx} \nabla^2 \phi$$

La fórmula de reducción de LSZ

de donde

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \nabla^2(e^{-ikx}\phi) = \int d^3x \nabla \left[(\nabla e^{-ikx})\phi + e^{-ikx}\nabla\phi \right] \\ &= \int d^3x \left[(\nabla^2 e^{-ikx})\phi + 2(\nabla e^{-ikx})\nabla\phi + e^{-ikx}\nabla^2\phi \right] \\ &= \int d^3x \left[(\nabla^2 e^{-ikx})\phi - e^{-ikx}\nabla^2\phi \right] \\ &\Rightarrow \int d^3x \phi \nabla^2 e^{-ikx} = \int d^3x e^{-ikx} \nabla^2 \phi . \end{aligned}$$

La fórmula de reducción de LSZ

▷ Por tanto, podemos en efecto escribir (5) en forma covariante,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ik_1x} (\square + m^2) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle . \end{aligned}$$

Se trata ahora de iterar el procedimiento hasta eliminar todas las partículas de los estados inicial y final, dejando solamente combinaciones de campos actuando sobre el vacío.

La fórmula de reducción de LSZ

▷ Para ello, escribamos ahora

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_n; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | a_{\vec{p}_1}^{(\text{out})} \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | T\{(a_{\vec{p}_1}^{(\text{out})} - a_{\vec{p}_1}^{(\text{in})})\phi(x)\} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

donde hemos usado que $a_{\vec{p}_1}^{(\text{in})} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle = 0$ y hemos tenido que introducir el **producto ordenado temporal**,

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x), & y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y), & y^0 < x^0 \end{cases}$$

que implica

$$T\{a_{\vec{p}}^{(\text{in})}\phi(x)\} = \phi(x)a_{\vec{p}}^{(\text{in})}, \quad T\{a_{\vec{p}}^{(\text{out})}\phi(x)\} = a_{\vec{p}}^{(\text{out})}\phi(x).$$

La fórmula de reducción de LSZ

▷ A partir de (6) tenemos

$$\sqrt{2E_{\vec{p}}}(a_{\vec{p}}^{(\text{out})} - a_{\vec{p}}^{(\text{in})}) = iZ^{-1/2} \int d^4y e^{ipy} (\square_y + m^2)\phi(y)$$

y sustituyendo en (8) llegamos a

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4y e^{ip_1 y} (\square_y + m^2) \langle \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | T\{\phi(y)\phi(x)\} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle . \end{aligned}$$

De donde ya es directo deducir

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= \left(iZ^{-1/2} \right)^{m+n} \int \left(\prod_{i=1}^m d^4x_i e^{-ik_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^n d^4y_j e^{ip_j y_j} \right) \\ & \quad \times (\square_{x_1} + m^2) \cdots (\square_{y_n} + m^2) \langle 0 | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_m)\phi(y_1) \cdots \phi(y_n)\} | 0 \rangle . \end{aligned}$$

La fórmula de reducción de LSZ

▷ Si definimos ahora la **función de Green de N puntos**,

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \} | 0 \rangle ,$$

y la escribimos en términos de su transformada de Fourier \tilde{G} ,

$$G(x_1, \dots, x_N) = \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{d^4 \tilde{q}_i}{(2\pi)^4} e^{-i\tilde{q}_i x_i} \right) \tilde{G}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N) ,$$

vemos que (sustituyendo $\square e^{\pm i q x} = -q^2 e^{\pm i q x}$)

$$\begin{aligned} & \left\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n ; t_f \left| \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m ; t_i \right. \right\rangle \\ &= \left(-iZ^{-1/2} \right)^{m+n} \int \left(\prod_{i=1}^m d^4 x_i \frac{d^4 \tilde{k}_i}{(2\pi)^4} e^{-i(\tilde{k}_i + k_i) x_i} (\tilde{k}_i^2 - m^2) \right) \\ & \quad \times \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j \frac{d^4 \tilde{p}_j}{(2\pi)^4} e^{-i(\tilde{p}_j - p_j) y_j} (\tilde{p}_j^2 - m^2) \right) \tilde{G}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \\ &= \left(-iZ^{-1/2} \right)^{m+n} \left(\prod_{i=1}^m (k_i^2 - m^2) \right) \left(\prod_{j=1}^n (p_j^2 - m^2) \right) \tilde{G}(-k_1, \dots, -k_m, p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

La fórmula de reducción de LSZ

y despejando $\tilde{G}(-k_1, \dots, -k_m, p_1, \dots, p_n)$,

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^m d^4 x_i e^{-ik_i x_i} \right) \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j e^{+ip_j y_j} \right) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_m) \phi(y_1) \cdots \phi(y_n) \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

(9)

Ésta es la **fórmula de reducción de LSZ** (Lehmann-Symanzik-Zimmermann).

Recuérdese que para una **partícula física** se cumple la relación $p^2 - m^2 = 0$ (se dice que está **on-shell** o sobre su capa de masas). Por tanto, el miembro de la derecha de la fórmula LSZ tendrá polos cuando las partículas entrantes o salientes estén **on-shell**, pero (como veremos y es de esperar) se cancelarán con los polos del prefactor del elemento de matriz S de la izquierda, de modo que la matriz S tiene un valor finito.

Teoría de perturbaciones

- Los campos ϕ de la fórmula LSZ son soluciones de $H = H_0 + H_{\text{int}}$ y por tanto **no** son combinaciones de ondas planas, cuyos coeficientes interpretamos como operadores creación y destrucción de partículas a nivel cuántico.
- Sin embargo, podemos definir el **campo en la imagen de interacción**,

$$\phi_I(t, \vec{x}) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (10)$$

que es un campo que coincide con el campo $\phi(t, \vec{x})$ de la imagen de Heisenberg solamente en un tiempo de referencia $t = t_0$ y que por definición es un campo libre,

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}),$$

cuya evolución con el tiempo viene, por tanto, determinada por el hamiltoniano libre H_0 .

Teoría de perturbaciones

- ▷ Recordemos que un campo en la imagen de Heisenberg evoluciona con el tiempo según

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} .$$

Así que, despejando de (10)

$$\phi(t_0, \vec{x}) = e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \vec{x}) e^{iH_0(t-t_0)}$$

vemos que $\phi(x)$ y $\phi_I(x)$ están relacionados mediante

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \vec{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0) ,$$

$$U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} .$$

Teoría de perturbaciones

▷ Vamos ahora a escribir perturbativamente ϕ en función de ϕ_I . Para ello notemos que

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}(H - H_0)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}H_{\text{int}}e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I(t)U(t, t_0)\end{aligned}\tag{11}$$

donde hemos introducido el **hamiltoniano en la imagen de interacción**^a

$$H_I(t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}H_{\text{int}}e^{-iH_0(t-t_0)} .$$

^aNótese que en general $[H_0, H] = [H_0, H_{\text{int}}] \neq 0$.

Teoría de perturbaciones

- ▷ La solución de la ecuación diferencial (11) con la condición de contorno $U(t, t) = 1$ es (compruébese sustituyéndola en la ecuación):

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \\ &\quad + (-i)^3 \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T\{H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3)\} + \dots \\ &= T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] \right\} . \end{aligned}$$

Teoría de perturbaciones

▷ Otra forma de escribir U que nos permite deducir propiedades útiles es

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)}$$

que efectivamente satisface $U(t, t) = 1$ y (11) pues

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}} e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \\ &= H_I(t) U(t, t') . \end{aligned}$$

▷ De aquí se deduce fácilmente que U es unitario y que

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) &= e^{iH_0(t_1-t_0)} e^{-iH(t_1-t_2)} e^{-iH_0(t_2-t_0)} e^{iH_0(t_2-t_0)} e^{-iH(t_2-t_3)} e^{-iH_0(t_3-t_0)} \\ &= U(t_1, t_3) \\ \Rightarrow U(t_1, t_3) U^\dagger(t_2, t_3) &= U(t_1, t_2) . \end{aligned}$$

Teoría de perturbaciones

▷ Veamos cómo calcular $\langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle$, donde ya hemos tomado las x_i ordenadas temporalmente ($t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$),

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_0) U^\dagger(t_2, t_0) \phi_I(x_2) U(t_2, t_0) \cdots U^\dagger(t_n, t_0) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) U(t_2, t_3) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, -t) U(-t, t_0) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) U(t, t_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_n, -t) \} U(-t, t_0) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right] \right\} U(-t, t_0) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

donde hemos introducido $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq -t$ y sustituido

$$U^\dagger(t_1, t_0) = U^\dagger(t, t_0) U(t, t_1), \quad U(t_n, t_0) = U(t_n, -t) U(-t, t_0)$$

$$U(t, t_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_n, -t) = U(t, -t) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right] \right\}.$$

Teoría de perturbaciones

▷ Tomando ahora $t_0 = -t$ con $t \rightarrow \infty$ y sustituyendo el adjunto de

$$U(\infty, -\infty) |0\rangle = e^{i\alpha} |0\rangle, \quad e^{i\alpha} = \langle 0| T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right] \right\} |0\rangle$$

tenemos finalmente que

$$\langle 0| T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} |0\rangle = \frac{\langle 0| T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} |0\rangle}{\langle 0| T \left\{ \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} |0\rangle}$$

(12)

▷ **Desarrollando en serie las exponenciales** que aparecen en esta expresión y utilizando el **teorema de Wick**, según veremos, podremos calcular orden a orden en **teoría de perturbaciones** la **amplitud de scattering** a partir de la fórmula LSZ (9) con ayuda de los **diagramas de Feynman**, que también veremos.

Teoría de perturbaciones

- ▷ Conviene notar que la dependencia funcional de \mathcal{H}_I en ϕ_I es la misma que la de \mathcal{H}_{int} en ϕ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \\ \mathcal{H}_I &= e^{iH_0(t-t_0)} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \frac{\lambda}{4!} \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \\ &\quad \times \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) = \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4 .\end{aligned}$$

Propagador de Feynman

- Hallemos el **propagador de Feynman**, definido como

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} | 0 \rangle .$$

De ahora **en adelante omitiremos el subíndice I** , pues siempre nos referiremos a campos en la imagen de interacción, que se pueden descomponer en $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ con

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ipx} , \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} .$$

Propagador de Feynman

▷ Recuérdese que $\phi^+ |0\rangle = 0$ y $\langle 0| \phi^- = 0$. Entonces,^a

si $x^0 - y^0 > 0$:

$$\begin{aligned} T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi(x)\phi(y) \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\ &= : \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)], \end{aligned}$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned} \phi^+(x)\phi^-(y) &= \phi^-(y)\phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \\ &=: \phi^+(x)\phi^-(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \end{aligned} \quad (13)$$

^aSi $x^0 = y^0$ entonces los campos ya están ordenados temporalmente, así que también se cumple

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)]$$

ya que entonces $[\phi^+(x), \phi^-(y)] = [\phi^+(y), \phi^-(x)]$, como puede comprobarse explícitamente en (17, 18).

Propagador de Feynman

▷ Análogamente,

si $x^0 - y^0 < 0$:

$$\begin{aligned} T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi(y)\phi(x) \\ &= \phi^+(y)\phi^+(x) + \phi^+(y)\phi^-(x) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(y)\phi^-(x) \\ &= : \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(y), \phi^-(x)] , \end{aligned}$$

ya que $: \phi(x)\phi(y) : = : \phi(y)\phi(x) :$.

$$\text{Por tanto,} \quad T\{\phi(x)\phi(y)\} = : \phi(x)\phi(y) : + D_F(x - y)$$

donde

$$D_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0)\Delta(x - y) + \theta(y^0 - x^0)\Delta(y - x) \quad (14)$$

y como $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$,

$$\Delta(x - y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} .$$

Propagador de Feynman

▷ Así que el propagador de Feynman es

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \langle 0 | (: \phi(x) \phi(y) : + D_F(x-y)) | 0 \rangle = D_F(x-y)$$

Veamos que podemos escribir (**prescripción de Feynman**)

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (15)$$

▷ En efecto,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} \quad (16)$$

donde se ha escrito $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2$ pues recordemos que $E_{\vec{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$.

Propagador de Feynman

▷ Por otro lado, nótese que

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (17)$$

$$\Delta(y - x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{+ip(x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (18)$$

(en la segunda línea se ha cambiado \vec{p} por $-\vec{p}$).

▷ Así que basta demostrar que

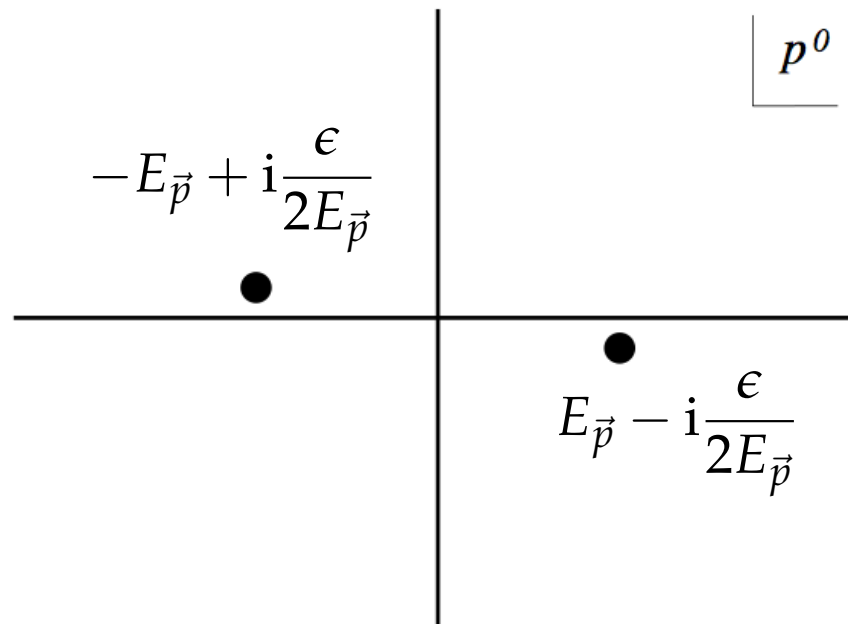
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} = \theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (19)$$

donde nótese que, cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon = \left[p^0 + \left(E_{\vec{p}} - i\frac{\epsilon}{2E_{\vec{p}}} \right) \right] \left[p^0 - \left(E_{\vec{p}} - i\frac{\epsilon}{2E_{\vec{p}}} \right) \right] \quad (20)$$

Propagador de Feynman

- ▷ Para evaluar la integral sobre p^0 anterior hay que elegir el contorno apropiado sobre el plano de p^0 complejo. El factor $i\epsilon$ aleja ligeramente los polos del eje real. El polo $p^0 = E_{\vec{p}}$ se desplaza hacia abajo, $p^0 = E_{\vec{p}} - i\epsilon/(2E_{\vec{p}})$ y el polo $p^0 = -E_{\vec{p}}$ se desplaza hacia arriba, $p^0 = -E_{\vec{p}} + i\epsilon/(2E_{\vec{p}})$.



Propagador de Feynman

▷ Así si $x^0 - y^0 > 0$ conviene cerrar el contorno en el plano inferior, rodeando el polo $p^0 = E_{\vec{p}} - i0^+$ en **sentido horario** de modo que

$$\oint f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, z = z_0) \quad \text{si } (x^0 - y^0) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} = -2\pi i \lim_{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}} (p^0 - E_{\vec{p}}) \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(2\pi)(p^0 + E_{\vec{p}})(p^0 - E_{\vec{p}})} = \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}}.$$

Y si $x^0 - y^0 < 0$ conviene cerrar el contorno en el plano superior, rodeando el polo $p^0 = -E_{\vec{p}} + i0^+$ en **sentido antihorario** de modo que

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z = z_0) \quad \text{si } (x^0 - y^0) < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} = 2\pi i \lim_{p^0 \rightarrow -E_{\vec{p}}} (p^0 + E_{\vec{p}}) \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(2\pi)(p^0 + E_{\vec{p}})(p^0 - E_{\vec{p}})} = \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}}.$$

Propagador de Feynman

▷ Por tanto,

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)} \right] \\ &= \theta(x^0 - y^0) \Delta(x-y) + \theta(y^0 - x^0) \Delta(y-x), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.^a

▷ La expresión (15) es conveniente porque de ella se lee directamente el propagador de Feynman en el espacio de momentos, $\tilde{D}_F(p)$,

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}_F(p) \Rightarrow \tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

^aAhora ya entendemos por qué hemos introducido el factor 2 en la normalización covariante relativista de los estados.

Propagador de Feynman

- Nótese también que $D_F(x - y)$ es **una** función de Green del operador de Klein-Gordon $(\square_x + m^2)$ pues

$$(\square_x + m^2)D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} = -i\delta^4(x - y)$$

(independientemente de la prescripción adoptada para sortear los polos) lo que justifica por qué hemos llamado función de Green de N puntos a $\langle 0 | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)\} | 0 \rangle$.

- ▷ Nótese además que el propagador de Feynman no es la única función de Green del operador de Klein-Gordon, pues cambiando la prescripción se obtienen otras.

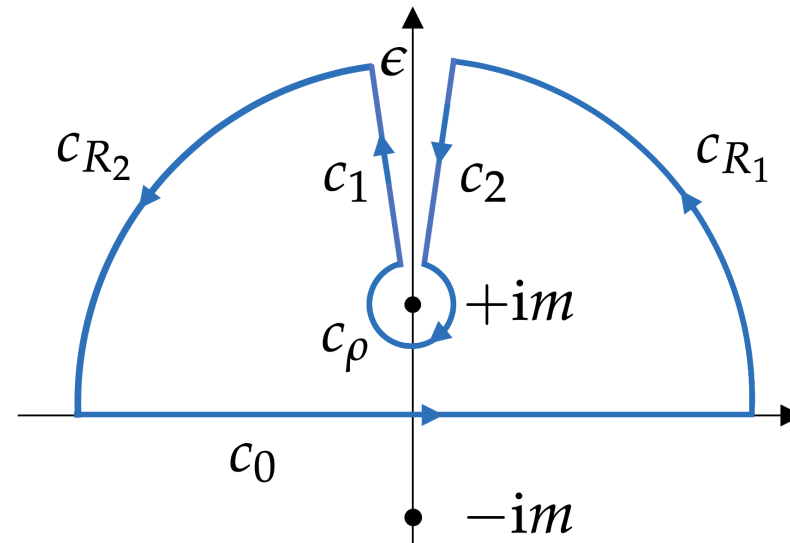
- El propagador de Feynman $D_F(x - y)$ expresa la amplitud de probabilidad de que una partícula que se crea en y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 > 0$, o que se propague y a x , si $x^0 - y^0 < 0$. En efecto,

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D_F(x - y) = \Delta(x - y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(y) | 0 \rangle .$$

- Veamos que, aparentemente, surge un problema: la probabilidad de propagación de una partícula desde y hasta x con $(x - y)^2 < 0$ (**intervalo espacial**), es decir, fuera de su cono de luz no es cero sino que cae exponencialmente para distancias grandes.

- En efecto, en tal caso podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x - y) = (0, \vec{r})$ y entonces (aquí llamaremos $p \equiv |\vec{p}|$ y $r \equiv |\vec{r}|$)

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{2E_{\vec{p}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{ipr \cos \theta}}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = -\frac{i}{(2\pi)^2 2r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} . \end{aligned}$$



- Podemos evaluar esta integral en el plano de p complejo siguiendo el contorno de la figura (el integrando tiene **cortes de rama** que comienzan en $p = \pm im$).
Aplicando el teorema de los residuos:

$$0 = \left(\int_{c_0} + \int_{c_{R_1}} + \int_{c_{R_2}} + \int_{c_\rho} + \int_{c_1} + \int_{c_2} \right) dp f(p).$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ las integrales sobre c_ρ , c_{R_1} y c_{R_2} se anulan.^a

^aLa integral sobre c_ρ se anula cuando $\rho \rightarrow 0$ porque $\lim_{p \rightarrow im} (p - im)f(p) = 0$.

▷ Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) &= \lim_{\substack{\epsilon, \rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{C_0} dp f(p) = - \lim_{\substack{\epsilon, \rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{C_{R_1}} + \int_{C_{R_2}} \right) dp f(p) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 2r} \left(\int_{im}^{i\infty} dp pe^{ipr} (p^2 + m^2)^{-1/2} + \int_{i\infty}^{im} dp pe^{ipr} (p^2 + m^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}2\pi i} \right) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 2r} 2 \int_{im}^{i\infty} dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \end{aligned}$$

donde el factor $e^{-\frac{1}{2}2\pi i} = -1$ tiene en cuenta que la segunda integral se hace al otro lado del corte de rama,^a y se han intercambiado sus límites de integración cambiando el signo global. Conviene ahora hacer el cambio de variable $p = i\rho$,

$$\Delta(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^2 2r} 2i^2 \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{i\sqrt{\rho^2 - m^2}} = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}}.$$

^aRecordemos que $\log z = \log |z| + i\theta$ tiene una discontinuidad de $2\pi i$ al cruzar el corte de rama y que podemos escribir $(p^2 + m^2)^{-1/2} = \exp\{-\frac{1}{2} \log(p^2 + m^2)\}$.

▷ Y finalmente hacemos el cambio $\rho = mt$,

$$\Delta(x - y) = \frac{m}{4\pi^2 r} \int_1^\infty dt \frac{te^{-mrt}}{t^2 - 1} = \frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr) \xrightarrow{mr \gg 1} \frac{m}{4\pi^2 r} \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-mr}, \quad (21)$$

donde se ha usado el límite de la función de Bessel modificada K_1 .

- Este resultado parece indicarnos que se viola causalidad. Sin embargo no es así. En mecánica cuántica **lo importante es si conmutan dos observables medidos en x e y separados espacialmente**, i.e. con $(x - y)^2 < 0$. En tal caso ambas medidas no están correlacionadas y por tanto no pueden afectar una a la otra.

- En la práctica, el principio de causalidad se preserva siempre que **se anule el conmutador de dos campos evaluados en dos puntos separados por un intervalo espacial**. Veamos que en efecto, en ese caso, el conmutador se anula.

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left[\left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right), \left(a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} \right) \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left\{ e^{-i(px-ky)} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] + e^{i(px-ky)} [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}] \right\} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} = \Delta(x-y) - \Delta(y-x), \quad (22)
 \end{aligned}$$

donde se ha usado $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$.

▷ Ahora, si $(x - y)^2 < 0$ podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x - y) = (0, \vec{r})$ y entonces $(y - x) = (0, -\vec{r})$, y como hemos visto que para puntos separados un intervalo espacial $\Delta(x - y)$ solamente depende del módulo de \vec{r} (21) tenemos que $\Delta(x - y) = \Delta(y - x)$ y

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{si } (x - y)^2 < 0,$$

como queríamos demostrar.^a

^aSi $(x - y)^2 > 0$ (intervalo temporal) podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x - y) = (t, 0)$ y entonces

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iE_{\vec{p}}t}}{2E_{\vec{p}}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{-i\sqrt{p^2+m^2}t}}{2\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \sim e^{-imt} \quad (t \rightarrow \infty)$$

así que $\Delta(x - y) - \Delta(y - x) \neq 0$ en este caso.

- En este punto es conveniente hacer varios comentarios importantes:
 1. Para un **campo escalar complejo** el propagador se define como

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(y) \} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

que expresa la amplitud de probabilidad de que una **partícula** que se crea en y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 > 0$, o bien la amplitud de probabilidad de que una **antipartícula** que se crea en x se propague libremente hasta y donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 < 0$.

Recordemos que si el campo es real, partícula y antipartícula coinciden.

- En este punto es conveniente hacer varios comentarios importantes:
 - Para entender mejor el **significado de las dos contribuciones al propagador** de Feynman (14) que se cancelan en (22) cuando $(x - y)^2 < 0$, hallemos el conmutador análogo para campos escalares complejos,

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left[\left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right), \left(b_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} \right) \right] \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left\{ e^{-i(px-ky)} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] + e^{i(px-ky)} [b_{\vec{p}}^\dagger, b_{\vec{q}}] \right\} \\
 &= \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = \Delta(x - y) - \Delta(y - x) \quad (24)
 \end{aligned}$$

donde vemos que $\Delta(x - y)$ es la amplitud de probabilidad de que una partícula creada en y se propague hasta x mientras que $\Delta(y - x)$ es la amplitud de probabilidad de que una antipartícula creada en x se propague hasta y .

- En este punto es conveniente hacer varios comentarios importantes:
 - ▷ Si no existieran las antipartículas se violaría el principio de causalidad! pues ambas contribuciones son necesarias y gracias a que tienen valores idénticos el conmutador (22) (o el (24) si el campo escalar es complejo) puede anularse fuera del cono de luz impidiendo correlaciones entre observaciones no conectadas causalmente.
- 3. Finalmente, nótese que en lo anterior ha sido fundamental que los campos escalares satisfacen relaciones de conmutación y no de anticonmutación, pues de lo contrario el principio de causalidad no se habría preservado. Puede verse que los campos fermiónicos han de anticonmutar por la misma razón. Se pone de manifiesto entonces la estrecha conexión entre el teorema espín-estadística y la causalidad a nivel cuántico.

Teorema de Wick

- Hemos visto que el producto ordenado temporal de dos campos en la imagen de interacción es $T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} = :\phi(x_1)\phi(x_2): + D_F(x_1 - x_2)$. Queremos ahora hallar el producto ordenado temporal de n campos $\phi_i \equiv \phi(x_i)$.
- El **teorema de Wick**, que demostraremos a continuación, establece que

$$T\{\phi_1 \cdots \phi_n\} = :\phi_1 \cdots \phi_n: + \left(\begin{array}{l} \text{todas las combinaciones de orden normal} \\ \text{y contracciones de dos campos} \end{array} \right) \quad (25)$$

donde **contracciones de dos campos** $\phi(x_i)$ y $\phi(x_j)$ significa

$$\overline{\phi(x_i)\phi(x_j)} = D_F(x_i - x_j), \quad \text{o abreviadamente} \quad \overline{\phi_i\phi_j} = D_{ij},$$

Teorema de Wick

y todas las combinaciones de orden normal y contracciones de dos campos significa, por ejemplo,

$$T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : ,$$

donde

$$: \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : = \overbrace{\phi_1\phi_3} : \phi_2\phi_4 : = D_{13} : \phi_2\phi_4 : , \quad : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : = D_{12}D_{34} , \quad \text{etc.}$$

Por tanto, al valor esperado en el vacío del producto ordenado temporal de campos **sólo contribuyen términos con todos los campos contraídos**, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle &= \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ &= D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \end{aligned}$$

y para un **número impar de campos es cero**.

Teorema de Wick

▷ Para demostrar el teorema de Wick se procede por inducción. Ya sabemos que se cumple para $n = 2$. Supongamos que es cierto para $n - 1$ campos.

Entonces, si ponemos los campos ya ordenados temporalmente ($x_1^0 \geq \dots \geq x_n^0$),

$$\begin{aligned}
 T\{\phi_1\phi_2 \cdots \phi_n\} &= \phi_1\phi_2 \cdots \phi_n = \phi_1 T\{\phi_2 \cdots \phi_n\} \\
 &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) : \left\{ \phi_2 \cdots \phi_n + \left(\begin{array}{l} \text{todas las contracciones de dos} \\ \text{campos que no involucren a } \phi_1 \end{array} \right) \right\} : . \quad (26)
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\phi_1^- : \{\phi_2 \cdots \phi_n\} : = : \{\phi_1^- \phi_2 \cdots \phi_n\} :$$

pues ϕ_1^- introduce un a^\dagger a la izquierda, que ya está ordenado normal, y

$$\begin{aligned}
 \phi_1^+ : \{\phi_2 \cdots \phi_n\} : &= : \{\phi_2 \cdots \phi_n\} : \phi_1^+ + [\phi_1^+, : \{\phi_2 \cdots \phi_n\} :] \\
 &= : \{\phi_1^+ \phi_2 \cdots \phi_n\} : + : \left(\overline{\square} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots + \dots + \left(\begin{array}{l} \text{contracciones simples} \\ \text{que involucren a } \phi_1 \end{array} \right) \right) :
 \end{aligned}$$

Teorema de Wick

▷ Comprobemos esto último con un ejemplo:

$$\begin{aligned}
 [\phi_1^+, : \phi_2 \phi_3 :] &= [\phi_1^+, \phi_2^+ \phi_3^+ + \phi_2^- \phi_3^- + \phi_2^- \phi_3^+ + \phi_3^- \phi_2^+] \\
 &= \phi_2^+ [\cancel{\phi_1^+, \phi_3^+}]^{=0} + [\cancel{\phi_1^+, \phi_2^+}]^{=0} \phi_3^+ + \phi_2^- [\phi_1^+, \phi_3^-] + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3^- + \phi_2^- [\cancel{\phi_1^+, \phi_3^+}]^{=0} \\
 &\quad + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3^+ + \phi_3^- [\cancel{\phi_1^+, \phi_2^+}]^{=0} + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_2^+ \\
 &= \overbrace{\phi_2^- \phi_1 \phi_3} + \overbrace{\phi_1 \phi_3 \phi_2^+} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3^-} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3^+} =: (\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3}) :
 \end{aligned}$$

donde se ha usado $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ y $\overbrace{\phi_i \phi_j} = [\phi_i^+, \phi_j^-]$, pues $x_i^0 \geq x_j^0$.

Por tanto,

$$(\phi_1^+ + \phi_1^-) : \{\phi_2 \cdots \phi_n\} : = : \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n : + : \left(\begin{array}{l} \text{contracciones simples} \\ \text{que involucren a } \phi_1 \end{array} \right) : . \quad (27)$$

Repitiendo el procedimiento para $(\phi_1^+ + \phi_1^-) : \left(\begin{array}{l} \text{todas las contracciones de dos} \\ \text{campos que no involucren a } \phi_1 \end{array} \right) :$ obtendremos los términos con contracciones dobles, triples, etc., que faltan.

Diagramas de Feynman

- La fórmula de reducción de LSZ nos permite escribir la matriz S en términos de valores esperados en el vacío de productos de campos en la imagen de interacción ordenados temporalmente,

$$\langle 0 | T \left\{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle ,$$

que se calculan orden a orden en teoría de perturbaciones (TP), desarrollando en serie la exponencial.

Diagramas de Feynman

- A **orden cero** (no hay interacciones) sólo necesitamos $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle$ que, aplicando el teorema de Wick, involucra **productos de propagadores** de partículas entre puntos espaciotemporales distintos $x_i \neq x_j$.

Esto nos da una imagen física que admite una representación gráfica sencilla:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = \overbrace{\phi_1 \phi_2} = D_{12}$$

$$= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} = D_{12} D_{34} + D_{13} D_{24} + D_{14} D_{23}$$

$$= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ \\ 3 \quad 4 \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \bullet \\ \\ 3 \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \bullet \\ \\ 4 \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \\ 3 \quad 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

y así sucesivamente. Son los **diagramas de Feynman en el espacio de posiciones**.

Diagramas de Feynman

- **A partir del primer orden** en TP obtendremos **interacciones locales** que involucran productos de campos en el mismo punto espaciotemporal x , que también tendrán una representación gráfica sencilla en forma de diagramas de Feynman.

El cálculo perturbativo es muy complejo pero puede sistematizarse con ayuda de **reglas de Feynman**. La mejor manera de entender todo esto es con un **ejemplo** sencillo.

▷ Consideremos el **scattering** 2 → 2

(dos partículas en el estado inicial y dos en el final)

en la teoría de campos escalares autointeractuantes λφ⁴.

La fórmula LSZ en función de campos en la imagen de interacción es:

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2} \prod_{j=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle \\
 &= \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \exp \left[-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \phi^4(x) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \phi^4(x) \right] \right\} | 0 \rangle}
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

– **Orden cero.** En ausencia de interacción el denominador es 1. El numerador es

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle \\
 &= \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} (D_{12} D_{34} + D_{13} D_{24} + D_{14} D_{23}) \\
 &= \int d^4 x d^4 X d^4 y d^4 Y e^{i(p_1 + p_2)X + i(p_1 - p_2)\frac{x}{2} - i(k_1 + k_2)Y - i(k_1 - k_2)\frac{y}{2}} D_F(x) D_F(y) \\
 &\quad + \int d^4 x d^4 X d^4 y d^4 Y e^{i(p_1 - k_1)X + i(p_1 + k_1)\frac{x}{2} + i(p_2 - k_2)Y + i(p_2 + k_2)\frac{y}{2}} D_F(x) D_F(y) \\
 &\quad + \int d^4 x d^4 X d^4 y d^4 Y e^{i(p_1 - k_2)X + i(p_1 + k_2)\frac{x}{2} - i(k_1 - p_2)Y - i(k_1 + p_2)\frac{y}{2}} D_F(x) D_F(y) \\
 &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2} \\
 &\quad + (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_1) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \\
 &\quad + (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k_1) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2} \tag{29}
 \end{aligned}$$

donde en el primer sumando de la tercera igualdad hemos hecho el cambio

$$\begin{aligned} x = x_1 - x_2, \quad y = x_3 - x_4 & \Rightarrow x_1 = X + \frac{x}{2}, \quad x_3 = Y + \frac{y}{2} \\ X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y = \frac{x_3 + x_4}{2} & \Rightarrow x_2 = X - \frac{x}{2}, \quad x_4 = Y - \frac{y}{2} \end{aligned}$$

$$dx_1 dx_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial X} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial X} \end{vmatrix} dx dX = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} dx dX = dx dX, \quad \text{etc.},$$

el segundo sumando es análogo al primero si $x_2 \leftrightarrow x_3$ lo que implica $p_2 \leftrightarrow -k_1$; y el tercer sumando es análogo al primero si $x_2 \leftrightarrow x_4$ lo que implica $p_2 \leftrightarrow -k_2$.

En (29) hay términos con solamente dos polos, que no son suficientes para cancelar los cuatro polos del miembro de la izquierda de (28), así que

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = 0 \quad \text{a orden cero.}$$

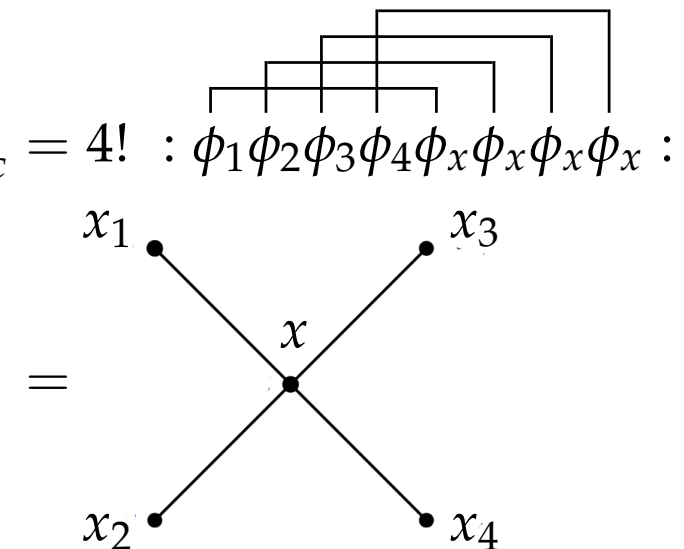
Este resultado (**amplitud nula**) es general **para diagramas desconexos** (aquéllos en los que algún punto externo no está conectado a los demás).

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

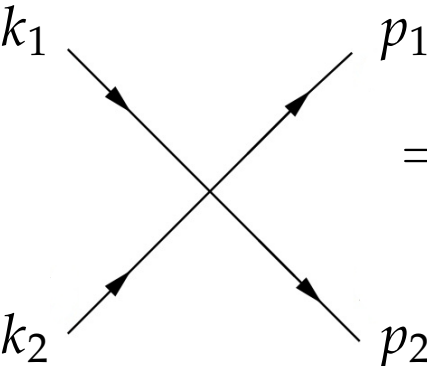
- **Primer orden.** Desarrollando la exponencial del numerador vemos que a $\mathcal{O}(\lambda)$ obtenemos productos de campos evaluados en el mismo punto espaciotemporal, lo que, aplicando el teorema de Wick, da lugar a un **vértice** de interacción.

La única forma de obtener diagramas conexos es contraer cada $\phi(x_i)$ con $\phi(x)$:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi^4(x) \} | 0 \rangle_c = 4! : \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x :$$


Hay $4!$ posibles combinaciones de tales contracciones, todas idénticas: $\phi(x_1)$ con uno de los $4 \phi(x)$, $\phi(x_2)$ con uno de los $3 \phi(x)$ restantes, $\phi(x_3)$ con uno los $2 \phi(x)$ restantes y $\phi(x_4)$ con el $\phi(x)$ restante. El $4!$ resultante cancela el $4!$ introducido en el denominador de la constante de acoplamiento (vemos su conveniencia).

De modo que, a primer orden, la única contribución relevante al numerador de la amplitud 2 → 2 viene dada por el siguiente **diagrama de Feynman en el espacio de momentos**:



$$\begin{aligned}
 &= \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \\
 &\quad \times \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) 4! \int d^4 x D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x) \\
 &= -i\lambda \int \prod_{i=1}^4 d^4 y_i d^4 x e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)x} e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2 - k_1 y_3 - k_2 y_4)} D_F(y_1) D_F(y_2) D_F(y_3) D_F(y_4) \\
 &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \tag{30}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio de variables $y_i = x_i - x$.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

- Hallemos ahora el denominador $\langle 0| T \left\{ \exp \left[-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right] \right\} |0\rangle$, que orden a orden está compuesto por diagramas desconectados y sin puntos externos formados por combinaciones de **diagramas vacío-vacío**:

$$V_i \in \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \\ \text{Diagrama 2} \\ \text{Diagrama 3} \\ \text{Diagrama 4} \\ \dots \end{array} \right\} \quad (31)$$

Supongamos uno de estos diagramas con n_i piezas de cada tipo V_i . Si llamamos también V_i al valor de la pieza de tipo i , es fácil convencerse de que ese tipo de diagramas contribuye al denominador con $\sum_{n_i} \frac{V_i^{n_i}}{n_i!}$, donde el $n_i!$ proviene de la simetría de intercambio de n_i copias de V_i .

Diagramas de Feynman

$$2 \rightarrow 2 \quad (\lambda\phi^4)$$

Para comprobar esto, consideremos sólo un tipo V_i , y que éste sea el primero de los diagramas vacío-vacío listados en (31).

Entonces

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \\ \text{Diagrama 2} \end{array} = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \overline{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \times 3 = \frac{3}{4!} V = \frac{1}{8} V \equiv V_i$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama 3} \\ \text{Diagrama 4} \end{array} = \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x \overline{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \int d^4y \overline{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} \times 3^2 = \frac{1}{2!} V_i^2$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama 5} \\ \text{Diagrama 6} \\ \text{Diagrama 7} \end{array} = \frac{1}{3!} V_i^3$$

y así sucesivamente.

Diagramas de Feynman

$$2 \rightarrow 2 \quad (\lambda\phi^4)$$

La contribución total al denominador será por tanto,

$$\prod_i \left(\sum_{n_i} \frac{V_i^{n_i}}{n_i!} \right) = \prod_i e^{V_i} = \exp \left\{ \sum_i V_i \right\} ,$$

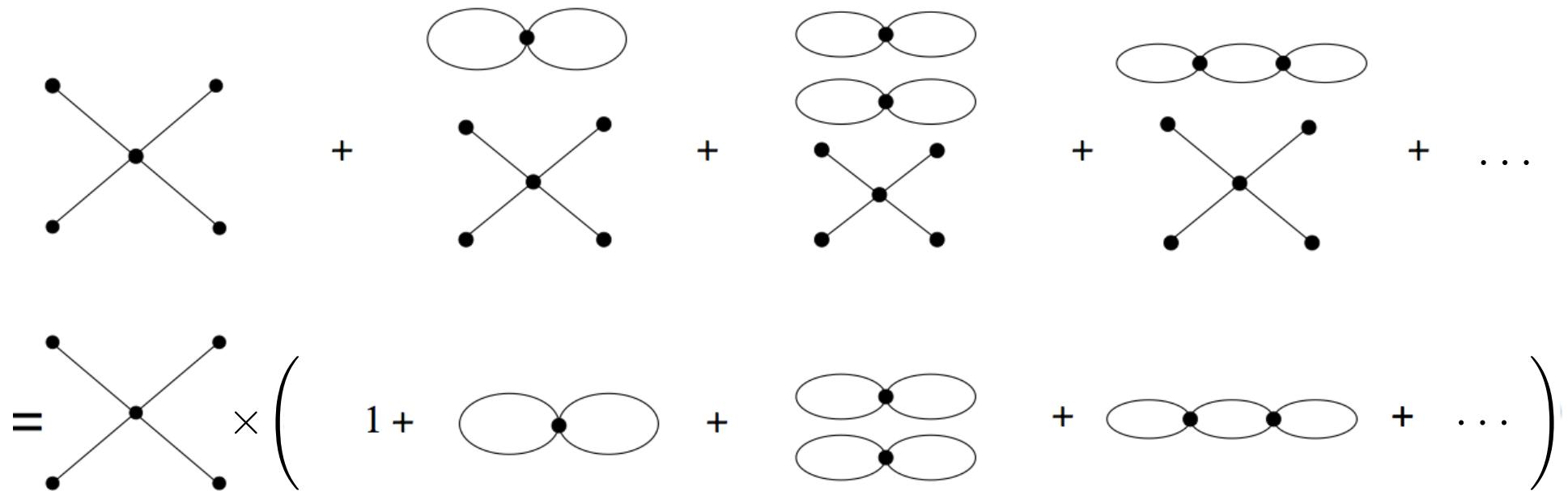
que viene dada por la exponencial de la suma de todos los posibles diagramas vacío-vacío.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

- Nótese que en el numerador tendremos, por cada diagrama conexo, la contribución de un número arbitrario de diagramas vacío-vacío.

Por ejemplo,



Así que la contribución general al numerador puede escribirse como

$$\sum (\text{conexos}) \times \exp \left\{ \sum_i V_i \right\} .$$

- ▷ Por tanto, las contribuciones vacío-vacío a numerador y denominador de la fórmula LSZ se cancelan y podemos concluir que para hallar la amplitud de **scattering** $m \rightarrow n$ **basta con calcular**, orden a orden, la suma de **diagramas conexos** con $m + n$ puntos externos.

Usando estos resultados e ignorando por el momento los factores Z (pronto veremos que $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$), podemos calcular la amplitud de **scattering** $2 \rightarrow 2$ a primer orden, que se deduce de (28) y (30),

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 : \quad \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) + \mathcal{O}(\lambda^2) .$$

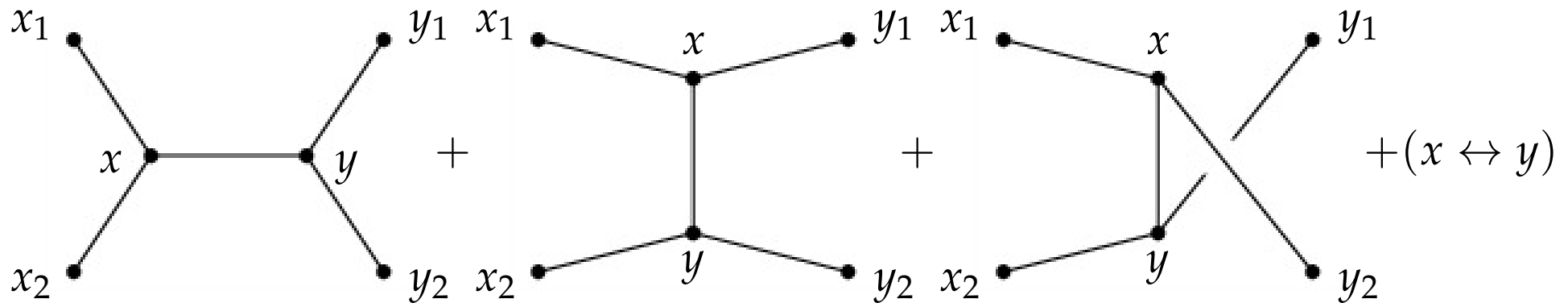
- ▷ Ya podríamos escribir algunas **reglas** que nos permiten obtener diagramáticamente la amplitud de **scattering**, pero aún no podemos deducirlas todas ya que todavía no nos hemos encontrado con diagramas con líneas internas ni **loops**.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^3$)

▷ Para ilustrar el caso de diagramas con **líneas internas**, vamos a suponer que nuestro proceso $2 \rightarrow 2$ se debe a una interacción distinta, $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x)$.

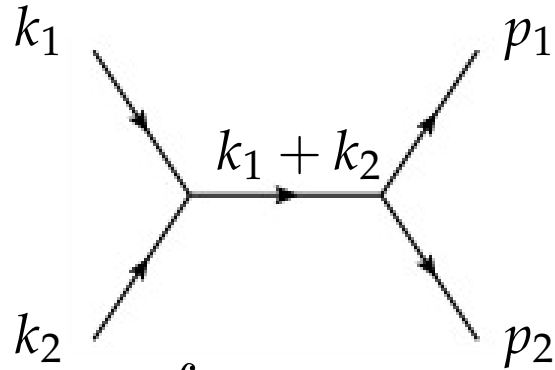
Si buscamos los diagramas conexos a orden más bajo que den una contribución no nula encontramos que la primera contribución es a $\mathcal{O}(\lambda^2)$ y viene dada por los siguientes diagramas:



Calculemos en detalle la contribución del primero (se incluye la suma del mismo intercambiando x e y) que representaremos mediante el correspondiente diagrama de Feynman en el espacio de momentos:

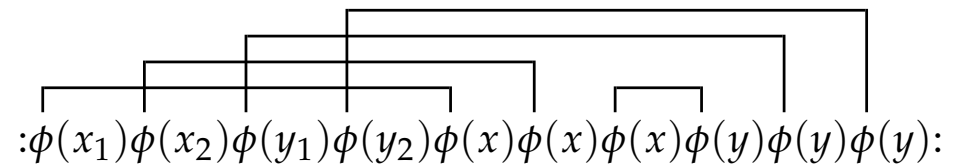
Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^3$)



$$= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1y_1 - k_2y_2)}$$

$$\times \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{3!} \right)^2 (3!)^2 2 \int d^4x d^4y \underbrace{D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x - y) D_F(y - y_1) D_F(y - y_2)}$$



$$= (-i\lambda)^2 \int d^4\tilde{x}_1 d^4\tilde{x}_2 d^4\tilde{y}_1 d^4\tilde{y}_2 d^4x d^4y e^{i(p_1+p_2)x - i(k_1+k_2)y + i(p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 - k_1\tilde{y}_1 - k_2\tilde{y}_2)}$$

$$\times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) D_F(\tilde{y}_1) D_F(\tilde{y}_2) D_F(x - y)$$

$$= (-i\lambda)^2 \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \int d^4\tilde{x} d^4y e^{i(p_1+p_2)\tilde{x} + i(p_1+p_2 - k_1 - k_2)y} D_F(\tilde{x})$$

$$= (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}_F(k_1 + k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \quad (32)$$

Diagramas de Feynman

$$2 \rightarrow 2 \quad (\lambda\phi^3)$$

donde el factor $(3!)^2$ proviene de todas las contracciones de Wick equivalentes a la dada y el factor 2 del intercambio de x con y . También se ha hecho el cambio de variables $\tilde{x}_i = x_i - x$, $\tilde{y}_i = y_i - y$ y posteriormente $\tilde{x} = x - y$.

Como en (30), hemos obtenido:

- un factor $(-i\lambda)$ por cada vértice,
- un factor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ que expresa la conservación del cuadrimomento, y
- el producto de los cuatro propagadores de las patas externas que se cancelarán al despejar la amplitud de scattering de la fórmula LSZ.
- Vemos que además hay que introducir el **propagador de cada línea interna**.

Nótese finalmente que el factor 3! en el denominador de la constante de acoplamiento se ha cancelado al sumar todas las contracciones de Wick equivalentes.

Por tanto, sumando los tres diagramas en el espacio de momentos

$$\begin{array}{c}
 k_1 \\
 \searrow \\
 \text{---} \\
 \nearrow \\
 k_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \\
 k_1 + k_2 \\
 \text{---} \\
 \searrow \\
 p_1 \\
 \nearrow \\
 p_2
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 k_1 \\
 \searrow \\
 \text{---} \\
 \nearrow \\
 k_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \\
 k_1 - p_1 \\
 \text{---} \\
 \searrow \\
 p_1 \\
 \nearrow \\
 p_2
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 k_1 \\
 \searrow \\
 \text{---} \\
 \nearrow \\
 k_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \\
 k_1 - p_2 \\
 \text{---} \\
 \searrow \\
 p_1 \\
 \nearrow \\
 p_2
 \end{array}
 \quad (33)$$

obtenemos

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 : \quad \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
 \times [\tilde{D}_F(k_1 + k_2) + \tilde{D}_F(k_1 - p_1) + \tilde{D}_F(k_1 - p_2)] + \mathcal{O}(\lambda^4)$$

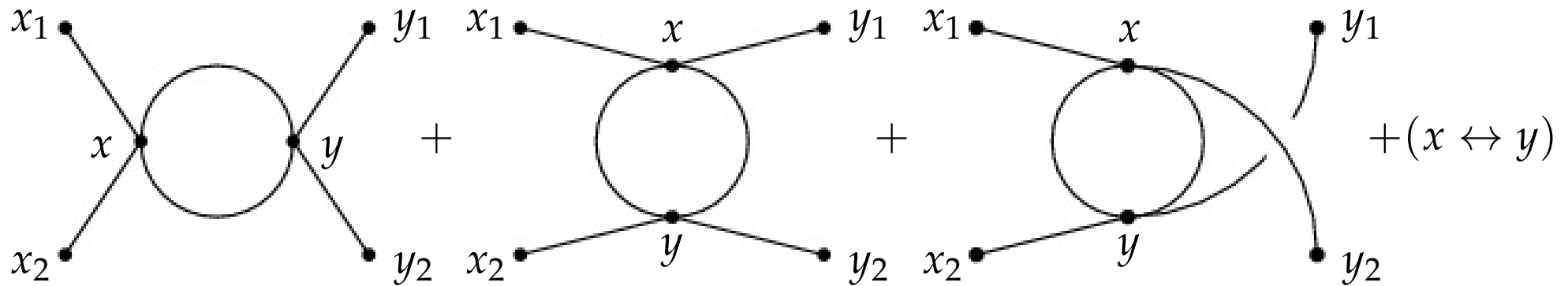
Nótese que las integrales sobre las coordenadas de los puntos de interacción implican la **conservación del cuadrimomento en cada vértice**.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

▷ Veamos ahora qué ocurre cuando hay **loops** en los diagramas.

Volvamos a la teoría $\lambda\phi^4$. Para hallar la contribución de $\mathcal{O}(\lambda^2)$ a la amplitud $2 \rightarrow 2$ necesitamos calcular los siguientes diagramas conexos:



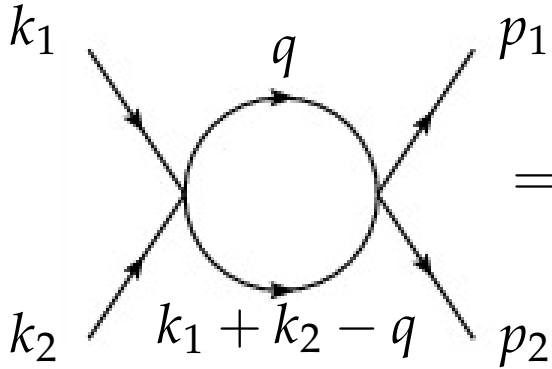
En todos aparece un **loop** formado por dos líneas internas que comparten punto inicial y final.^a

Miremos con detalle la contribución del primero de estos diagramas (incluyendo la suma del mismo intercambiando x e y) que representaremos mediante el siguiente diagrama de Feynman en el espacio de momentos:

^aUn **loop** también puede provenir de una línea interna que empieza y acaba en el mismo punto. Véase e.g. el diagrama de (34).

Diagramas de Feynman

2 → 2 ($\lambda\phi^4$)



$$= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1y_1 - k_2y_2)} \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2$$

$$\times (4 \times 3)^2 \times 2 \times 2 \int d^4x d^4y \underbrace{D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F^2(x - y) D_F(y - y_1) D_F(y - y_2)}$$

$$:\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y):$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4\tilde{x}_1 d^4\tilde{x}_2 d^4\tilde{y}_1 d^4\tilde{y}_2 d^4x d^4y e^{i(p_1+p_2)x - i(k_1+k_2)y + i(p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 - k_1\tilde{y}_1 - k_2\tilde{y}_2)} \\ &\quad \times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) D_F(\tilde{y}_1) D_F(\tilde{y}_2) D_F^2(x - y) \\ &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \int d^4\tilde{x} d^4y e^{i(p_1+p_2)\tilde{x} + i(p_1+p_2 - k_1 - k_2)y} D_F^2(\tilde{x}) \\ &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \\ &\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \end{aligned}$$

donde hemos sustituido

$$\begin{aligned} \int d^4\tilde{x} e^{i(k_1+k_2)\tilde{x}} D_F^2(\tilde{x}) &= \int d^4\tilde{x} e^{i(k_1+k_2)\tilde{x}} D_F(\tilde{x}) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\tilde{x}} \tilde{D}_F(q) \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \tilde{D}_F(q) . \end{aligned}$$

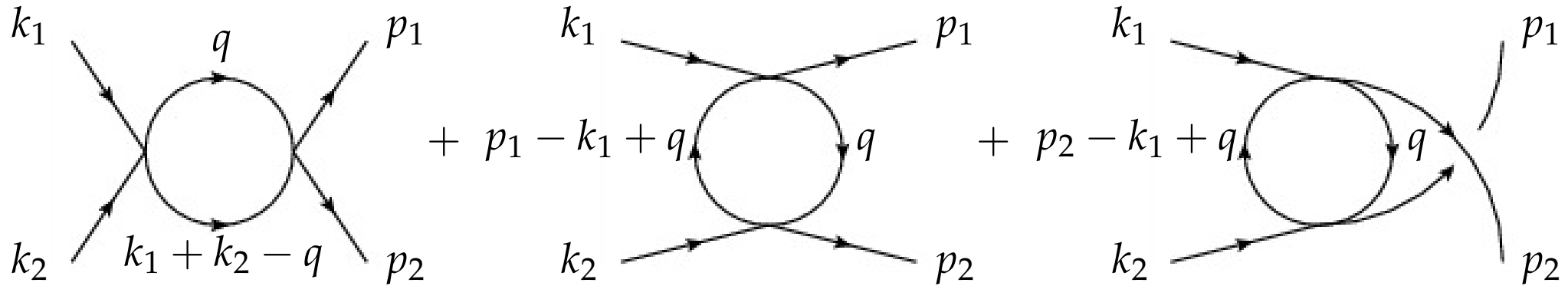
Vemos que, además del habitual factor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ de la conservación del cuadrimomento, el factor $(-i\lambda)$ por cada vértice y el propagador de cada línea interna, aparece una **integral sobre el cuadrimomento del loop dividida por $(2\pi)^4$** .

Obtenemos asimismo un **factor de simetría** $\frac{1}{2}$ procedente del recuento de factores $1/4!$ y contracciones de Wick equivalentes (estos factores de simetría son frecuentemente una fuente de errores en el cálculo). También aparecen los propagadores de cada pata externa en el espacio de momentos cuyos polos se cancelarán al despejar la amplitud de la fórmula LSZ.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

▷ Repitiendo el procedimiento para los tres diagramas en el espacio de momentos:



obtenemos ($\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$)

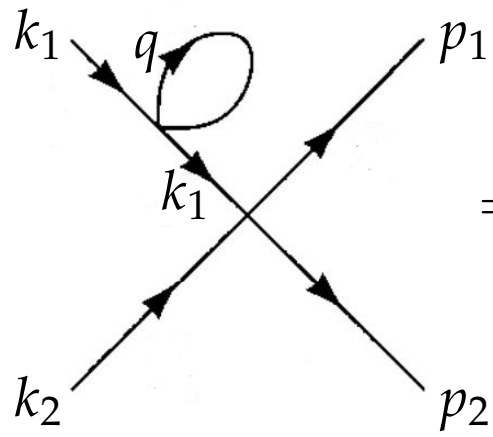
$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
 &\times \left\{ -i\lambda + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\tilde{D}_F(q)\tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \right. \\
 &\quad + \tilde{D}_F(q)\tilde{D}_F(k_1 - p_1 - q) \\
 &\quad \left. + \tilde{D}_F(q)\tilde{D}_F(k_1 - p_2 - q)] \right\} + \mathcal{O}(\lambda^3).
 \end{aligned}$$

Diagramas de Feynman

$$2 \rightarrow 2 \quad (\lambda\phi^4)$$

- Si evaluamos las integrales del **loop** veremos que son **divergentes en el ultravioleta**, pues tienden a infinito cuando q se hace grande. Para dotar de sentido a esta corrección infinita a la predicción que habíamos obtenido a orden más bajo en TP tendremos que **renormalizar** la teoría.

- Hasta ahora hemos ignorado los factores Z (renormalización de la función de onda) que aparecen en la fórmula LSZ. También hemos ignorado diagramas en los que el **propagador de alguna de las patas externas** sufre una corrección como, por ejemplo:^a



$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) (-i\lambda) \tilde{D}_F(k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \\
 &\times \tilde{D}_F(k_1) \times \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} \times \tilde{D}_F(k_1)
 \end{aligned} \tag{34}$$

que, aparte de la corrección debida al **loop** (que resulta ser divergente en el ultravioleta), tiene un **polo doble** en $\tilde{D}_F(k_1)$ que no se cancela con el correspondiente polo simple de la fórmula LSZ, y por tanto nos da infinito.

^aEn adelante omitiremos el $i\epsilon$ de la prescripción de Feynman, que asumiremos implícitamente.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

▷ Nótese que la corrección a la pata externa factoriza y se puede leer directamente del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A horizontal line with momentum } p \text{ entering from the left and } p \text{ exiting to the right. A loop is attached to the top of this line. The loop has momentum } q \text{ flowing clockwise.} \end{array} = \tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p), \quad -iB = \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2}. \quad (35)$$

Podemos **resumar** todas las **correcciones de este tipo** al propagador,

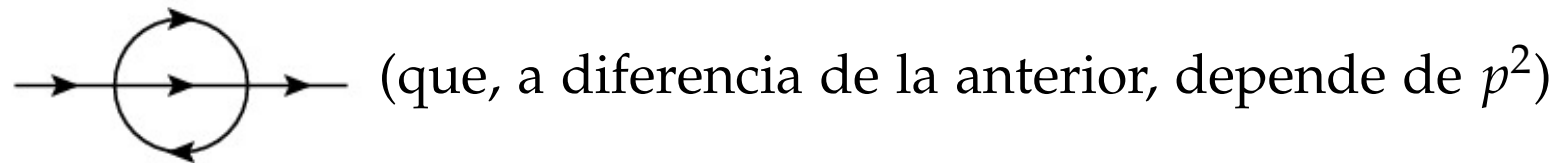
$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram: A horizontal line with momentum } p \text{ entering from the left and } p \text{ exiting to the right.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram: A horizontal line with momentum } p \text{ entering from the left and } p \text{ exiting to the right. A loop is attached to the top of this line.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram: A horizontal line with momentum } p \text{ entering from the left and } p \text{ exiting to the right. Two loops are attached to the top of this line.} \end{array} + \dots \\
 &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p) + \dots \\
 &= \tilde{D}_F(p) \left[1 + (-iB\tilde{D}_F(p)) + (-iB\tilde{D}_F(p))^2 + \dots \right] \\
 &= \tilde{D}_F(p) \frac{1}{1 + iB\tilde{D}_F(p)} = \frac{i}{p^2 - m^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{B}{p^2 - m^2}} \right) = \frac{i}{p^2 - m^2 - B}.
 \end{aligned}$$

Diagramas de Feynman

$$2 \rightarrow 2 \quad (\lambda\phi^4)$$

▷ Vemos que el efecto neto de este tipo de correcciones consiste en desplazar la masa de m^2 a $m^2 + B$.

▷ Podemos añadir otras correcciones, como por ejemplo la corrección $\mathcal{O}(\lambda^2)$

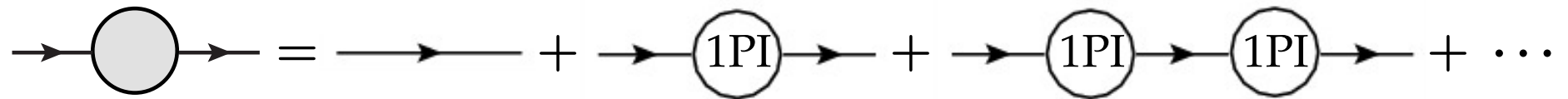


y todas las demás.

▷ Para ello, sumamos todos los diagramas con dos patas externas que sean **one-particle irreducible** (aquellos diagramas que no se separan en dos si cortamos sólo una línea interna) y llamamos $-iM^2(p^2)$ a la contribución de todos los diagramas 1PI (eliminando los propagadores externos),

$$\text{---} \circlearrowleft \text{1PI} \text{---} = -iM^2(p^2) . \quad (36)$$

▷ Ahora podemos resumir **todas** las correcciones al propagador por el mismo procedimiento de antes. Llamemos m_0 al parámetro de masa que hemos introducido en el lagrangiano. Entonces el propagador completo es (a todo orden en TP):



$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} [-iM^2(p^2)] \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left[1 + \frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2} + \left(\frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2} \right)^2 + \dots \right]$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2}} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} .$$

(37)

- La **masa física** m se define como el polo del propagador completo,

$$p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0. \quad (38)$$

Desarrollando en serie alrededor de $p^2 = m^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) &= p^2 - m_0^2 - M^2(m^2) - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) + \dots \\ &= (p^2 - m^2) \left(1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) \quad (\text{cerca de } p^2 = m^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{---} \circ \text{---} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + \text{regular cerca de } p^2 = m^2 \quad (39)$$

donde

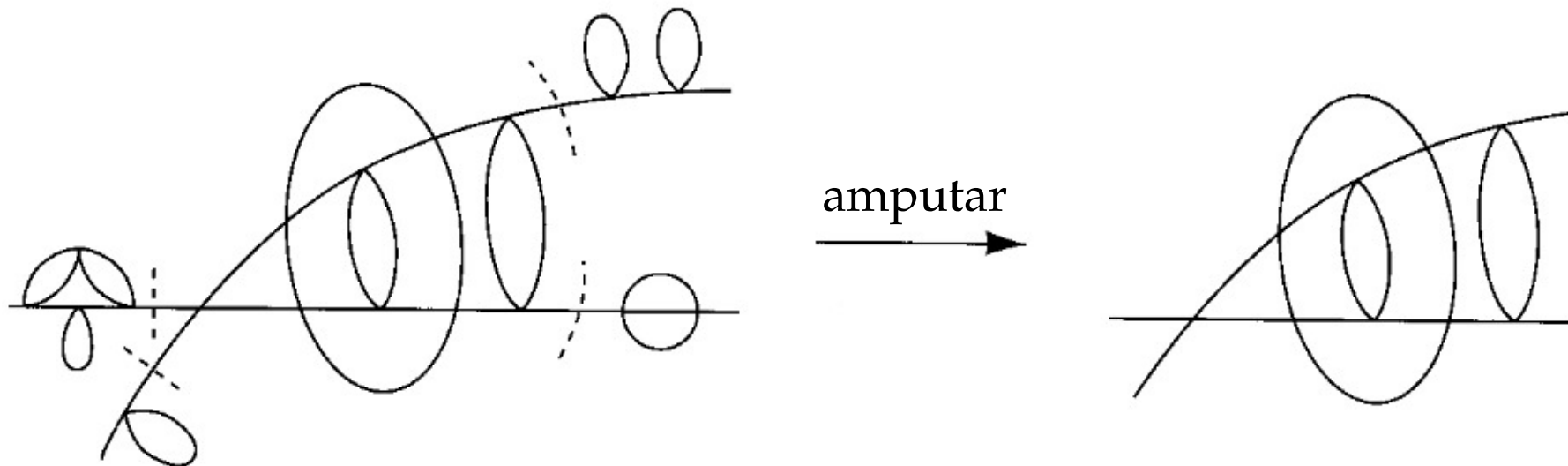
$$m^2 = m_0^2 + M^2(m^2), \quad Z = \left(1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}. \quad (40)$$

Este residuo Z es el mismo factor que introdujimos en (2) para dar cuenta de la renormalización del campo debido a las interacciones. En el Tema 7 veremos que relaciona el campo desnudo con el campo renormalizado.

Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

- ▷ Vemos en particular que la primera corrección a $Z = 1$ es de orden λ^2 , como habíamos anticipado, pues la corrección de orden λ al propagador (35) no depende de p^2 .
- En vista de lo que sucede con las correcciones a las patas externas, conviene definir **diagramas amputados** como aquéllos en los que quitamos todos los subdiagramas asociados a las patas externas que se pueden separar cortando sólo una línea. Es decir, eliminamos el propagador completo de cada pata externa. Por ejemplo,



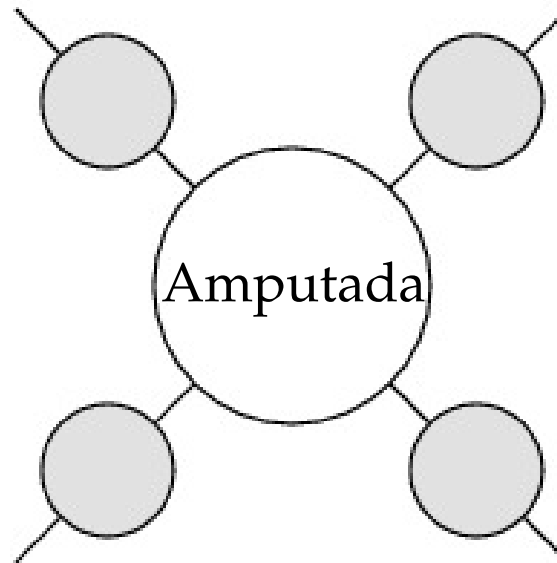
Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

▷ Entonces la función de cuatro puntos de **campos interactuantes**

$$\int \prod_{i=1}^2 d^4x_i \prod_{j=1}^2 d^4y_j e^{i(\sum_i p_i x_i - \sum_j k_j y_j)} \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | 0 \rangle_c$$

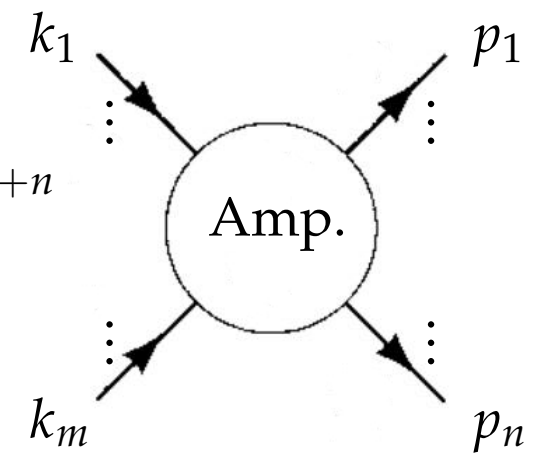
tiene la forma diagramática siguiente



Diagramas de Feynman

$2 \rightarrow 2$ ($\lambda\phi^4$)

▷ Y en general, usando (39) podemos reescribir la fórmula LSZ (9) como

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle = \left(\sqrt{Z} \right)^{m+n} \text{Amp.} \quad (41)$$


- Con esto ya podemos dar las **reglas de Feynman** para campos escalares reales en el espacio de momentos. Consideremos que la interacción de los campos es de la forma $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{N!} \phi^N$. Entonces para calcular la amplitud del proceso de **scattering** de $m \rightarrow n$ partículas:
 1. Dibujar todos los diagramas conexos amputados con m patas entrantes y n salientes unidos en vértices de N patas.
 2. Imponer conservación del cuadrimomento en cada vértice.
 3. Asociar un factor $(-i\lambda)$ a cada vértice.
 4. Asociar a cada línea interna de momento p un factor $\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.
 5. Integrar sobre los cuadrimomentos q no fijados por conservación del cuadrimomento (uno por cada **loop**) con medida $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.
 6. Multiplicar por el factor de simetría correspondiente.

7. La suma de las contribuciones de todos los diagramas de Feynman conduce a la llamada **amplitud invariante** $i\mathcal{M}(\vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rightarrow \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)$ que se relaciona con el elemento de matriz $S = 1 + iT$ mediante

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i p_i - \sum_j k_j \right) i\mathcal{M}, \quad (42)$$

donde $i\mathcal{M}$ incluye los factores $(\sqrt{Z})^{m+n}$, que son irrelevantes en cálculos a orden más bajo en teoría de perturbaciones, pero son importantes para hallar correcciones de orden superior.

Comentario sobre la virtualidad de los estados intermedios

- Consideremos un diagrama con líneas internas, por ejemplo (32). La fórmula LSZ exige poner las partículas entrantes y salientes sobre su capa de masas,

$$k_1^2 = k_2^2 = p_1^2 = p_2^2 = m^2$$

y además impone conservación del cuadrimomento en los vértices, con lo que la partícula intermedia que se propaga entre dos vértices estará **off-shell**,

$$p_{\text{interm}}^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2(k_1 k_2) = 2(m^2 + k_1 k_2) .$$

- ▷ Si elegimos, por ejemplo, el sistema centro de masas de las partículas entrantes,

$$\begin{aligned} k_1 = (E, 0, 0, k) , \quad k_2 = (E, 0, 0, -k) &\Rightarrow k_1 k_2 = E^2 + k^2 = m^2 + 2k^2 \\ &\Rightarrow p_{\text{interm}}^2 = 4(m^2 + k^2) \neq m^2 . \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que el p_{interm}^2 de las líneas internas de los otros dos diagramas en (33) es incluso negativo. Así que en TQC los estados intermedios que se propagan entre vértices de interacción son **partículas virtuales**, i.e. fuera de su capa de masas.

Reglas de Feynman para fermiones

- Los campos fermiónicos aparecerán en los hamiltonianos de interacción por parejas y formando parte de bilineales covariantes.
- Los campos fermiónicos satisfacen relaciones de anticonmutación que nos han obligado a definir el orden normal para operadores de fermiones de forma consistente. Así, por ejemplo,

$$: a_{\vec{p},r} a_{\vec{q},s} a_{\vec{k},t}^\dagger : = (-1)^2 a_{\vec{k},t}^\dagger a_{\vec{p},r} a_{\vec{q},s} = (-1)^3 a_{\vec{k},t}^\dagger a_{\vec{q},s} a_{\vec{p},r} .$$

Del mismo modo, debemos definir de forma consistente el **orden temporal** de dos campos fermiónicos,

$$T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} = \begin{cases} \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) , & x_1^0 > x_2^0 \\ -\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) , & x_1^0 < x_2^0 \end{cases}$$

y análogamente para $T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\}$ y $T\{\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}$.

Así, por ejemplo, si $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$ entonces

$$T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4)\} = -\psi(x_3)\psi(x_1)\psi(x_4)\psi(x_2) .$$

Reglas de Feynman para fermiones

- Veamos ahora cómo definir la **contracción de Wick** de dos campos fermiónicos, para obtener una expresión análoga a la de campos escalares,

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = :\psi(x)\bar{\psi}(y): + \overline{\psi(x)\psi(y)}.$$

Separando las componentes de energía positiva y negativa,

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx}, \quad \psi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx}$$

$$\bar{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s b_{\vec{p},s} \bar{v}^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx}, \quad \bar{\psi}^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s a_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx}$$

tenemos que^a

^aSi $x^0 = y^0$ entonces los campos ya están ordenados temporalmente, así que también se cumple

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \psi(x)\bar{\psi}(y) = :\psi(x)\bar{\psi}(y): + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} = :\psi(x)\bar{\psi}(y): + \overline{\psi(x)\psi(y)}$$

ya que entonces $\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} = -\{\bar{\psi}^+(x), \psi^-(y)\}$, como puede comprobarse explícitamente en (43).

Reglas de Feynman para fermiones

$$\begin{aligned}
 T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} &= \theta(x^0 - y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x) \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \left[\psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) + \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) \right] \\
 &\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[\bar{\psi}^+(y)\psi^+(x) + \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) + \bar{\psi}^-(y)\psi^+(x) + \bar{\psi}^-(y)\psi^-(x) \right] \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \left[: \psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} + : \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) : \right. \\
 &\quad \left. + : \psi^-(x)\bar{\psi}^+(y) : + : \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) : \right] \\
 &\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[: \bar{\psi}^+(y)\psi^+(x) : + \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} + : \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) : \right. \\
 &\quad \left. + : \bar{\psi}^-(y)\psi^+(x) : + : \bar{\psi}^-(y)\psi^-(x) : \right] \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \left[: \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} \right] \\
 &\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[: \bar{\psi}(y)\psi(x) : + \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} \right] \\
 &= : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}
 \end{aligned}$$

Reglas de Feynman para fermiones

donde al final hemos usado que $:\bar{\psi}(y)\psi(x): := -:\psi(x)\bar{\psi}(y):$ y hemos definido

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \theta(x^0 - y^0)\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} - \theta(y^0 - x^0)\{\bar{\psi}^+(x), \psi^-(y)\}$$

▷ Es fácil comprobar que, como $\{a_{\vec{p},s}, b_{\vec{q},r}^+\} = 0$, las siguientes contracciones se anulan,

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0.$$

Reglas de Feynman para fermiones

- ▷ Puede mostrarse que el **teorema de Wick** tiene la misma forma para campos fermiónicos. Hay que tener cuidado porque el orden normal de contracciones de Wick fermiónicas puede llevar aparejado un cambio de signo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_1 \psi_2 &= -\psi_2 \overline{\psi}_1 \\ \psi_1 \psi_2 \overline{\psi}_3 \overline{\psi}_4 &= -\overline{\psi}_1 \overline{\psi}_3 \psi_2 \psi_4 . \end{aligned}$$

Como el valor esperado en el vacío del orden normal de operadores es cero, tenemos que, análogamente al caso de campos escalares, el **propagador de Feynman para fermiones** es

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \overline{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \overline{\psi}(x) \psi(y) = S_F(x - y) ,$$

que puede escribirse, usando las relaciones de completitud, como:

Reglas de Feynman para fermiones

$$\begin{aligned}
 S_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s u_{\vec{p}}^{(s)} \bar{u}_{\vec{p}}^{(s)} e^{-ip(x-y)} \\
 &\quad - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s v_{\vec{p}}^{(s)} \bar{v}_{\vec{p}}^{(s)} e^{ip(x-y)} \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \\
 &\quad - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} - m) e^{ip(x-y)} \\
 &= \theta(x^0 - y^0) (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \\
 &\quad - \theta(y^0 - x^0) (-i\not{\partial}_x - m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-y)} \\
 &= (i\not{\partial}_x + m) D_F(x-y) \\
 &= (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} .
 \end{aligned}$$

Reglas de Feynman para fermiones

▷ Por tanto,

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (43)$$

y, en el espacio de momentos,

$$\tilde{S}_F(p) = \int d^4x S_F(x-y) e^{ip(x-y)} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

donde hemos usado que $\not{p}\not{p} = p^2$. Vemos que el propagador de fermiones es una función de Green del operador de Dirac pues

$$(i\partial_x - m)S_F(x-y) = -(\square_x + m^2)D_F(x-y) = i\delta^4(x-y).$$

Es **muy importante** notar que $\tilde{S}_F(p) \neq \tilde{S}_F(-p)$, así que hay que tener cuidado con el signo del momento.

Reglas de Feynman para fermiones

- Para hallar la **matriz S** entre estados fermiónicos necesitamos despejar los operadores creación y destrucción del campo libre ψ_{free} ,

$$\psi_{\text{free}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left[a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

lo que conduce a

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r} = \int d^3 x \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) e^{ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} b_{\vec{k},r}^\dagger = \int d^3 x \bar{v}^{(r)}(\vec{k}) e^{-ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}^\dagger = \int d^3 x \bar{\psi}_{\text{free}}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k})$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} b_{\vec{k},r} = \int d^3 x \bar{\psi}_{\text{free}}(x) \gamma^0 e^{ikx} v^{(r)}(\vec{k}) .$$

Reglas de Feynman para fermiones

▷ En efecto,

$$\begin{aligned}
 & \int d^3x \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) e^{ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \\
 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left[a_{\vec{p},s} \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}) e^{i(k-p)x} + b_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 v^{(s)}(\vec{p}) e^{i(k+p)x} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \sum_s \left[a_{\vec{k},s} \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{k}) + b_{\vec{k},s}^\dagger \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 v^{(s)}(-\vec{k}) \right] = \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{k}) = 2E_{\vec{k}} \delta_{rs}, \quad \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 v^{(s)}(-\vec{k}) = 0$$

y lo mismo para los demás.

Reglas de Feynman para fermiones

▷ Igual que para campos escalares, esperamos que

$$\psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \psi_{\text{in}}(x), \quad \psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \psi_{\text{out}}(x),$$

donde esta Z es la constante de renormalización del campo ψ . Entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{in})} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \\ \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{out})} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} Z^{-1/2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \end{aligned}$$

y su diferencia nos da una expresión covariante que necesitaremos como paso inicial para obtener la fórmula LSZ

Reglas de Feynman para fermiones

▷ Usando (7),

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2E_{\vec{k}}} \left(a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{out})} \right) &= Z^{-1/2} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \\
 &= -Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left(\bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} \right) u^{(r)}(\vec{k}) \\
 &= \text{integrando por partes y usando } (\not{k} - m)u(\vec{k}) = 0 \\
 &= iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}}_x + m) e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) .
 \end{aligned}$$

▷ Del mismo modo se puede obtener

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2E_{\vec{k}}} \left(b_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{in})} - b_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{out})} \right) &= iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{v}^{(r)}(\vec{k}) e^{-ikx} (i\partial_x - m) \psi(x) , \\
 \sqrt{2E_{\vec{k}}} \left(a_{\vec{k},r}^{(\text{in})} - a_{\vec{k},r}^{(\text{out})} \right) &= -iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) e^{ikx} (i\partial_x - m) \psi(x) , \\
 \sqrt{2E_{\vec{k}}} \left(b_{\vec{k},r}^{(\text{in})} - b_{\vec{k},r}^{(\text{out})} \right) &= -iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}}_x + m) e^{ikx} v^{(r)}(\vec{k}) .
 \end{aligned}$$

[la cuenta]

Usamos, integración por partes:

$$\int d^4x \nabla \cdot (\bar{\psi} \vec{\gamma} e^{-ikx}) u(\vec{k}) = 0 \Rightarrow \int d^4x \nabla \bar{\psi} \cdot \vec{\gamma} e^{-ikx} u(\vec{k}) = -i \int d^4x \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot \vec{k} e^{-ikx} u(\vec{k})$$

y la ecuación de Dirac:

$$(\not{k} - m)u(\vec{k}) = (\gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m)u(\vec{k}) = 0$$

Así que:

$$\begin{aligned} - \int d^4x \partial_0 (\bar{\psi} \gamma^0 e^{-ikx}) u(\vec{k}) &= - \int d^4x (\partial_0 \bar{\psi}) \gamma^0 e^{-ikx} u(\vec{k}) - \int d^4x \bar{\psi} \gamma^0 (-ik^0) e^{-ikx} u(\vec{k}) \\ &= - \int d^4x (\partial_0 \bar{\psi}) \gamma^0 e^{-ikx} u(\vec{k}) - \int d^4x (\nabla \bar{\psi} \cdot \vec{\gamma} - i\bar{\psi} m) e^{-ikx} u(\vec{k}) \\ &= i \int d^4x (i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + \bar{\psi} m) e^{-ikx} u(\vec{k}) \\ &= i \int d^4x \bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}}_x + m) e^{-ikx} u(\vec{k}) \end{aligned}$$

Reglas de Feynman para fermiones

▷ Así que en la matriz S podemos sustituir un **fermión entrante** de momento \vec{k}_1 y espín r por

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \left(a_{\vec{k}_1, r}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k}_1, r}^{\dagger(\text{out})} \right) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x_1 e^{-ik_1x_1} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \bar{\psi}(x_1) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle (i \overleftarrow{\partial}_{x_1} + m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \end{aligned} \quad (44)$$

y puede verse que, podemos sustituir a continuación, por ejemplo, un **antifermión entrante** de momento \vec{k}_2 y espín s por

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \bar{\psi}(x_1) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{k}_2}} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | T \{ \bar{\psi}(x_1) (b_{\vec{k}_2, s}^{\dagger(\text{in})} - b_{\vec{k}_2, s}^{\dagger(\text{out})}) \} | \vec{k}_3 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x_2 e^{-k_2x_2} \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (i\partial_{x_2} - m) \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | T \{ \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \} | \vec{k}_3 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

Reglas de Feynman para fermiones

- ▷ Iterando el procedimiento puede encontrarse la **fórmula LSZ para fermiones**. Supongamos que de las m (n) partículas entrantes (salientes) hay m_f (n_f) fermiones con espines r_i (r'_j) y el resto son antifermiones con espines s_i (s'_j). Entonces:

$$\begin{aligned}
 & \left(\prod_{i=1}^{m_f} \frac{i\sqrt{Z}}{\not{k}_i - m} \right) \left(\prod_{i=m_f+1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{\not{k}_i + m} \right) \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{i\sqrt{Z}}{\not{p}_j - m} \right) \left(\prod_{j=n_f+1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{\not{p}_j + m} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle \\
 &= \int \left(\prod_{i=1}^m d^4 x_i e^{-ik_i x_i} \right) \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j e^{+ip_j y_j} \right) \prod_{i=m_f+1}^m \bar{v}^{(s_i)}(k_i) \prod_{j=1}^{n_f} \bar{u}^{(s'_j)}(p_j) \\
 & \quad \times \langle 0 | T \left\{ \prod_{i=m_f+1}^m \psi(x_i) \prod_{i=1}^{m_f} \bar{\psi}(x_i) \prod_{j=1}^{n_f} \psi(y_j) \prod_{j=n_f+1}^n \bar{\psi}(y_j) \right\} | 0 \rangle \prod_{i=1}^{m_f} u^{(r_i)}(k_i) \prod_{j=n_f+1}^n v^{(r'_j)}(p_j)
 \end{aligned}$$

Reglas de Feynman para fermiones (Teoría de Yukawa)

- Veamos un caso particular sencillo, que es aplicación directa del resultado que hemos encontrado en (44) y (45). Estudiemos el **scattering** $2 \rightarrow 2$,

$$\text{fermión}(k_1, r) + \text{antifermión}(k_2, s) \rightarrow \text{escalar}(p_1) + \text{escalar}(p_2)$$

en la **teoría de Yukawa**, que tiene como lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g\bar{\psi}\psi\phi \Rightarrow \mathcal{H}_{\text{int}} = g\bar{\psi}\psi\phi .$$

Supongamos, para aliviar la notación, que todos los campos tienen la misma masa m .

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

▷ La amplitud de **scattering** viene dada por

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | k_1 k_2 \rangle \\
 &= \left(iZ_\phi^{-1/2} \right)^2 \left(iZ_\psi^{-1/2} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} (\square_{x_1} + m^2) (\square_{x_2} + m^2) \\
 & \quad \times \bar{v}^{(s)}(k_2) (i\cancel{\partial}_{x_4} - m) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \} | 0 \rangle (i \overleftarrow{\cancel{\partial}}_{x_3} + m) u^{(r)}(k_1) \\
 &= \left(-iZ_\phi^{-1/2} \right)^2 \left(iZ_\psi^{-1/2} \right)^2 (p_1^2 - m^2) (p_2^2 - m^2) \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \\
 & \quad \times \bar{v}^{(s)}(k_2) (-\cancel{k}_2 - m) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \} | 0 \rangle (-\cancel{k}_1 + m) u^{(r)}(k_1)
 \end{aligned}$$

donde se ha empleado la transformada de Fourier de la función de Green, de forma análoga a como hicimos para llegar a (9).

Estos campos no son libres.

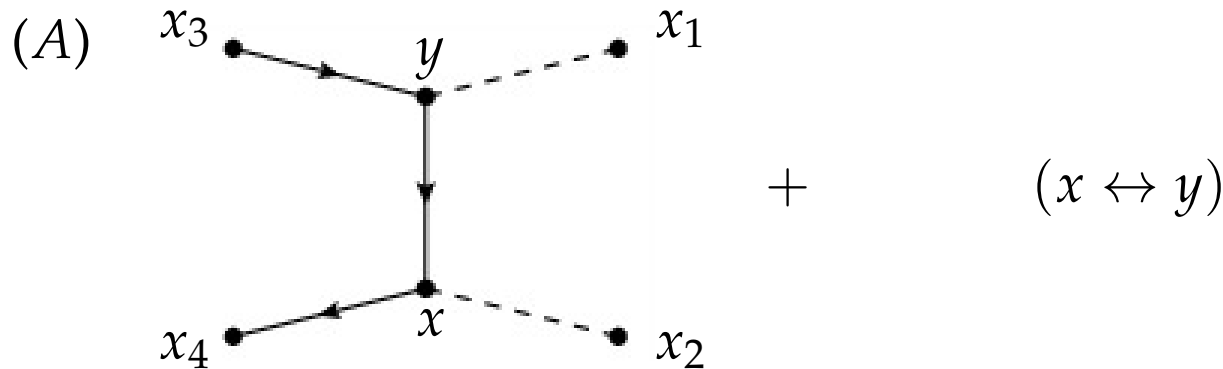
Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

▷ Para escribir los campos en la imagen de interacción reemplazamos $\langle 0| T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\psi(x_4)\} |0\rangle$ por

$$\langle 0| T \left\{ \phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\psi(x_4) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} |0\rangle$$

Aplicamos el th Wick y nos fijamos en las contribuciones conexas (surgen a $\mathcal{O}(g^2)$)

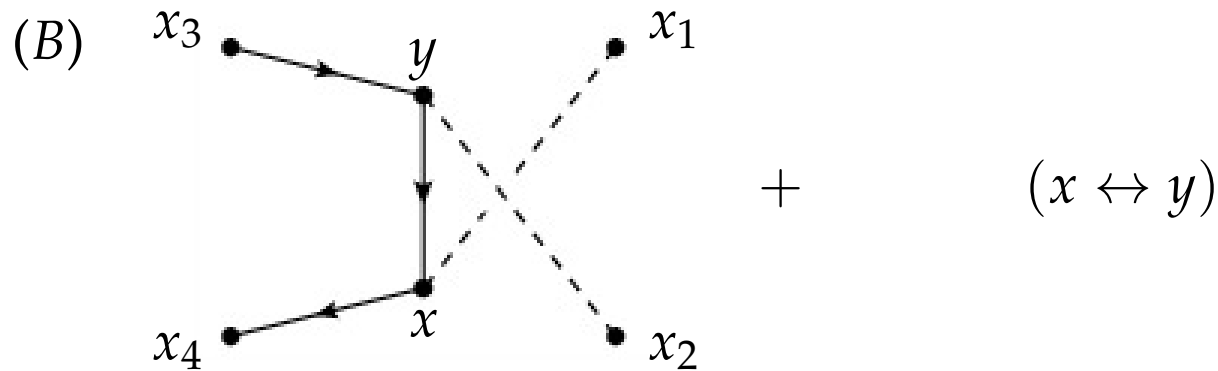


$$\begin{aligned} & : \phi_1 \phi_2 \bar{\psi}_3 \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y : \\ & = -\overbrace{\phi_1 \phi_y} \overbrace{\phi_2 \phi_x} \overbrace{\psi_4 \bar{\psi}_x} \overbrace{\psi_x \bar{\psi}_y} \overbrace{\psi_y \bar{\psi}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : \phi_1 \phi_2 \bar{\psi}_3 \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y : \\ & = -\overbrace{\phi_1 \phi_x} \overbrace{\phi_2 \phi_y} \overbrace{\psi_4 \bar{\psi}_y} \overbrace{\psi_y \bar{\psi}_x} \overbrace{\psi_x \bar{\psi}_3} \end{aligned}$$

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)



$$: \phi_1 \phi_2 \bar{\psi}_3 \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y :$$

$$= -\phi_1 \phi_x \phi_2 \phi_y \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y \psi_3$$

$$: \phi_1 \phi_2 \bar{\psi}_3 \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y :$$

$$= -\phi_1 \phi_y \phi_2 \phi_x \psi_4 \bar{\psi}_y \psi_y \bar{\psi}_x \psi_x \psi_3$$

- ▷ Consideremos el primero de los dos diagramas posibles, cuya contribución basta multiplicar por 2 para incluir el diagrama resultante de intercambiar x por y . Tendremos en cuenta un cambio de signo al hacer el orden normal de las contracciones:

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | k_1 k_2 \rangle_A \\
 &= 2 \times \left(-iZ_\phi^{-1/2} \right)^2 \left(-iZ_\psi^{-1/2} \right)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \\
 & \quad \times (-ig)^2 \frac{1}{2!} \times (-1) \times D_F(x_1 - y) D_F(x_2 - x) \\
 & \quad \times \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (\not{k}_2 + m) S_F(x_4 - x) S_F(x - y) S_F(y - x_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= -(-ig)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 \tilde{x}_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 + k_1 \tilde{x}_3 - k_2 \tilde{x}_4)} e^{i(p_2 - k_2)x + i(p_1 - k_1)y} \\
 & \quad \times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (\not{k}_2 + m) S_F(\tilde{x}_4) S_F(x - y) S_F(\tilde{x}_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= -(-ig)^2 i^2 \int d^4 x d^4 y e^{i(p_2 - k_2)x + i(p_1 - k_1)y} \\
 & \quad \times \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (\not{k}_2 + m) \frac{i}{-\not{k}_2 - m} S_F(x - y) \frac{i}{\not{k}_1 - m} (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= (-ig)^2 \int d^4 \tilde{x} d^4 y e^{i(p_2 - k_2)\tilde{x}} e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) S_F(\tilde{x}) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) \frac{i}{\not{p}_2 - \not{k}_2 - m} u^{(r)}(\vec{k}_1)
 \end{aligned}$$

Reglas de Feynman para fermiones (Teoría de Yukawa)

donde se han hecho los cambios $\tilde{x}_1 = x_1 - y$, $\tilde{x}_2 = x_2 - x$, $\tilde{x}_3 = y - x_3$, $\tilde{x}_4 = x_4 - x$, después $\tilde{x} = x - y$, y se han puesto todas las $Z = 1$, pues sus correcciones no contribuyen hasta un orden más alto en g .

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

▷ El otro diagrama, incluyendo $x \leftrightarrow y$:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | k_1 k_2 \rangle_B &= -(-ig)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \\
 &\times D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - y) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (\not{k}_2 + m) S_F(x_4 - x) S_F(x - y) S_F(y - x_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= -(-ig)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 \tilde{x}_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 + k_1 \tilde{x}_3 - k_2 \tilde{x}_4)} e^{i(p_1 - k_2)x + i(p_2 - k_1)y} \\
 &\times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (\not{k}_2 + m) S_F(\tilde{x}_4) S_F(x - y) S_F(\tilde{x}_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= -(-ig)^2 i^2 \int d^4 x d^4 y e^{i(p_1 - k_2)x + i(p_2 - k_1)y} \\
 &\times \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (\not{k}_2 + m) \frac{i}{-\not{k}_2 - m} S_F(x - y) \frac{i}{\not{k}_1 - m} (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= (-ig)^2 \int d^4 \tilde{x} d^4 y e^{i(p_1 - k_2)\tilde{x}} e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) S_F(\tilde{x}) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
 &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m} u^{(r)}(\vec{k}_1)
 \end{aligned}$$

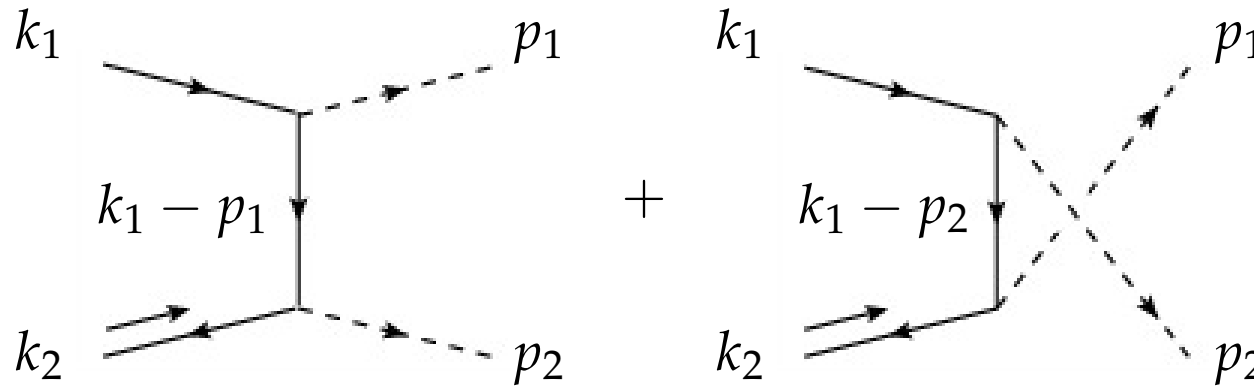
Reglas de Feynman para fermiones (Teoría de Yukawa)

donde se han hecho los cambios $\tilde{x}_1 = x_1 - x$, $\tilde{x}_2 = x_2 - y$, $\tilde{x}_3 = y - x_3$,
 $\tilde{x}_4 = x_4 - x$, y después $\tilde{x} = x - y$.

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

▷ Podemos expresar ambos diagramas en el espacio de momentos:



- ▷ La dirección del momento en una línea fermiónica es relevante. Se toma entrante para estados iniciales y saliente para estados finales. El momento coincide con la dirección del **flujo de número fermiónico** para las líneas internas y para los estados de partícula (para un electrón se toma la dirección de la carga negativa), pero el momento tiene sentido contrario al flujo para las antipartículas.
- ▷ Las líneas fermiónicas se representan mediante líneas continuas y el flujo fermiónico mediante una flecha insertada en la línea.

Reglas de Feynman para fermiones (Teoría de Yukawa)

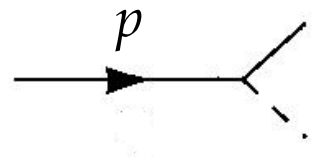
- ▷ Desde ahora reservaremos las líneas discontinuas para los bosones escalares.
- ▷ Para escribir las reglas de Feynman hay que recorrer cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, asignando espinores, vértices y propagadores según vayan apareciendo.
- ▷ Veamos cuáles son las reglas de la teoría de Yukawa, que pueden deducirse del cálculo anterior:
 1. Para hallar la amplitud de **scattering**, no hay que escribir los propagadores externos ni para escalares ni para fermiones, pues se cancelan en la fórmula LSZ. Basta dibujar todos los diagramas conexos amputados. Podemos ignorar los factores \sqrt{Z} a orden más bajo en TP, pero habrá que incluirlos en correcciones de orden superior. Los consideraremos incluidos dentro de la amplitud invariante $i\mathcal{M}$ que se define, como ya hemos visto, extrayendo de la matriz S el factor $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i - \sum_j k_j)$.

Reglas de Feynman para fermiones

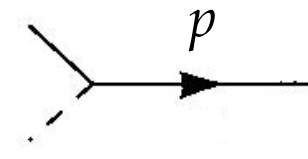
(Teoría de Yukawa)

2. Asociar espinores a las patas fermiónicas externas del siguiente modo (supondremos que el tiempo fluye de izquierda a derecha):

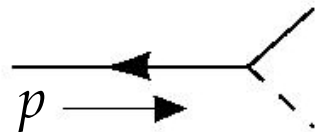
fermión entrante:


$$= u^{(s)}(\vec{p})$$

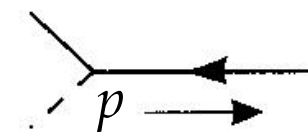
fermión saliente:


$$= \bar{u}^{(s)}(\vec{p})$$

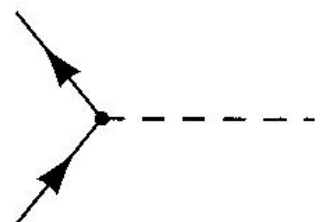
antifermión entrante:


$$= \bar{v}^{(s)}(\vec{p})$$

antifermión saliente:


$$= v^{(s)}(\vec{p})$$

3. Vértice (imponer conservación de momento en cada vértice):


$$= -ig$$

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

4. Propagadores:

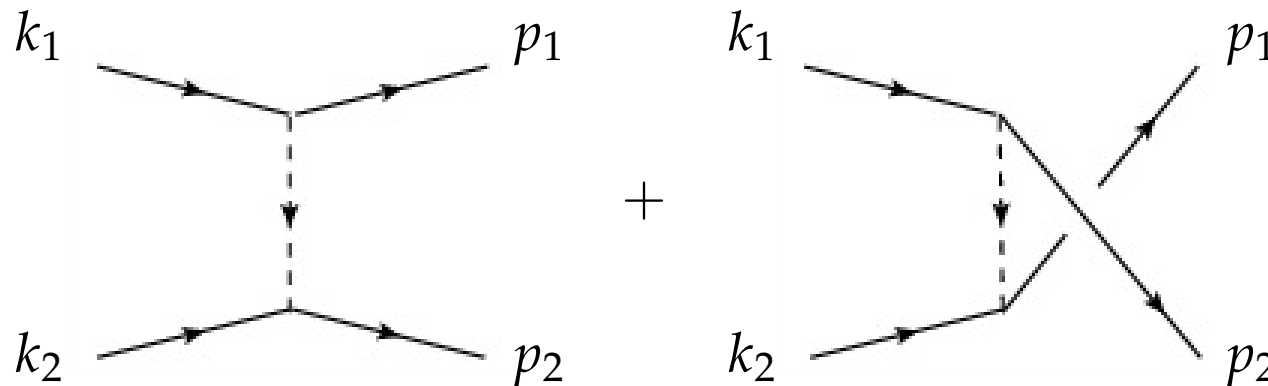
$$\text{---} \overset{p}{\longrightarrow} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\text{---} \overset{p}{\longrightarrow} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

5. Hay que tener cuidado con los signos relativos entre diagramas que involucren varias líneas fermiónicas debido a las contracciones de Wick. Por ejemplo, los siguientes diagramas contribuyen con signos opuestos a la amplitud porque entre ellos hay una permutación impar de los campos fermiónicos:

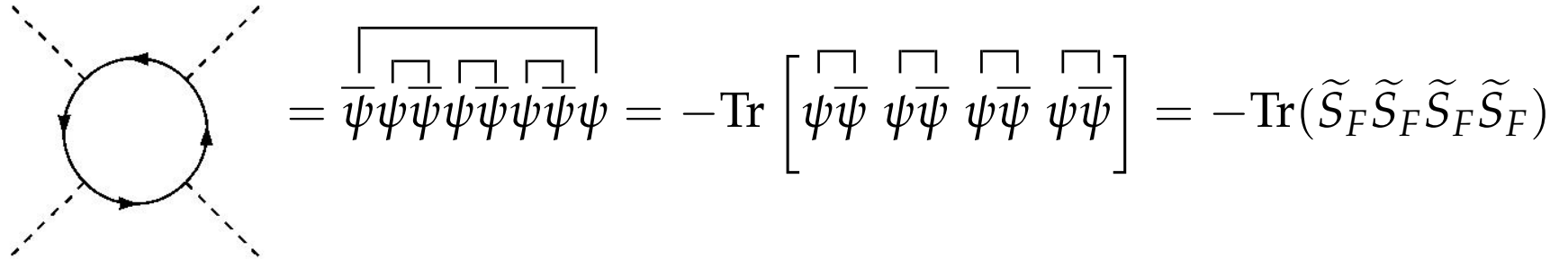


$$i\mathcal{M} = (-ig)^2 \left[\bar{u}(p_2)u(k_2) \frac{i}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \bar{u}(p_1)u(k_1) - \bar{u}(p_2)u(k_1) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \bar{u}(p_1)u(k_2) \right]$$

Reglas de Feynman para fermiones

(Teoría de Yukawa)

6. Asignar un factor (-1) a cada **loop** cerrado de fermiones, pues



The diagram shows a circular fermion loop with four external dashed lines. The loop has arrows indicating a clockwise direction. The mathematical expression to its right is:

$$= \overbrace{\psi\psi\psi\psi\psi\psi\psi\psi} = -\text{Tr} \left[\overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \right] = -\text{Tr}(\tilde{S}_F \tilde{S}_F \tilde{S}_F \tilde{S}_F)$$