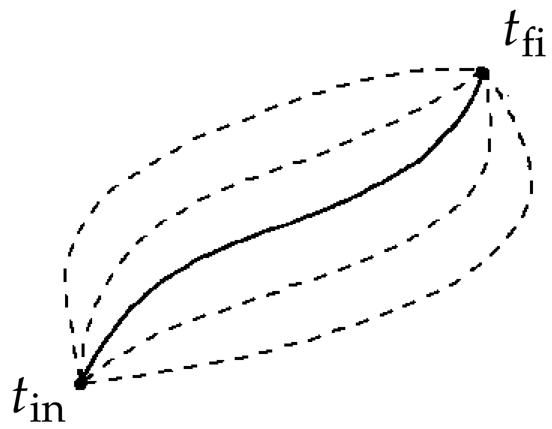
2. Teoría Clásica de Campos

Ecuaciones de Euler-Lagrange | Sistema de N partículas

- Vamos a repasar primero el principio básico de la mecánica clásica para un sistema de N partículas en el formalismo lagrangiano. Este sistema tiene $3N$ grados de libertad descritos por un conjunto de coordenadas $q_i(t), i = 1, 2, \ldots, 3N$.

- El lagrangiano L es una función de las q_i y de sus derivadas respecto del tiempo $\dot{q}_i$, $L = L(q, \dot{q})$. Generalmente, $L(q, \dot{q}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q)$ (término cinético menos potencial). Supondremos que el sistema es conservativo, de modo que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. La acción S se define como

$$S = \int \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}). \tag{1}$$



- El principio de mínima acción establece que la trayectoria del sistema entre un estado inicial $q_{\text{in}} = q(t_{\text{in}})$ y otro final $q_{\text{fi}} = q(t_{\text{fi}})$ fijos es un extremo (generalmente un mínimo) de la acción:

$$\delta S = \delta \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}) = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t \; \delta L(q, \dot{q}) = 0. \tag{2}$$

Podemos desarrollar

$$\delta L = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i \right], \tag{3}$$

donde se ha usado que

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \right) \delta \alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i \tag{4}$$

siendo α un conjunto discreto de parámetros tal que $q_i = q_i(\alpha, t)$ es suficientemente suave de modo que las derivadas respecto a α y respecto a t conmutan, pues podemos discretizar ambas variaciones.

- Por otro lado, integrando por partes:[a]

$$\int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}}} - \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i. \tag{5}$$

Por tanto,

$$\delta S = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\, \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i \tag{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \qquad \text{(Ecuaciones de Euler-Lagrange)} \tag{7}$$

---

[a] En efecto: $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = [uv]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}t\, v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

- Recordemos también que en el formalismo hamiltoniano el objeto básico es

$$H(p,q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{8}$$

- Diferenciando esta expresión obtenemos

$$\mathrm{d}H = \sum_i \left\{ \dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) \right\} \tag{9}$$

$$= \sum_i \{ \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \} \tag{10}$$

donde se han usado las ecuaciones de Euler-Lagrange (7) y la definición de momento en (8). Esto demuestra que el hamiltoniano H es una función de p y q. La expresión anterior conduce a:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad \text{(ecuaciones de Hamilton)} \tag{11}$$

- Definiendo ahora el corchete de Poisson de dos variables dinámicas cualesquiera f_1 y f_2

$$[f_1, f_2]_P = \sum_i \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right\} \tag{12}$$

es fácil comprobar que

$$[q_r, p_s]_P = \delta_{rs} \tag{13}$$

y las ecuaciones de Hamilton pueden reescribirse como

$$\dot{q}_r = [q_r, H]_P \ , \quad \dot{p}_r = [p_r, H]_P \tag{14}$$

y en general para cualquier variable dinámica f se tiene

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H]_P + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{15}$$

donde $\partial f/\partial t$ aparece si f depende explícitamente del tiempo.

- Supongamos ahora que, en vez de un sistema con un número finito de grados de libertad, tenemos un medio continuo. Entonces el sistema viene descrito por un campo $\phi(x)$,

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \vec{x}) = \phi(x) \tag{16}$$

y su dinámica por un lagrangiano,

$$L = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{17}$$

- En adelante, llamaremos lagrangiano a la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$. La acción es entonces

$$S = \int \mathrm{d}t \, L = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{18}$$

- El principio de mínima acción se escribe:

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi = 0, \qquad (19)$$

donde la condición de contorno ahora no es que $q_i(t_{\text{in}})$ y $q_i(t_{\text{fi}})$ fijos sino que los campos permanecen constantes en el infinito, pues

$$\int \mathrm{d}^4x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \cancel{\int \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right]} - \int \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \qquad (20)$$

y se ha usado el teorema de Stokes,

$$\int_V \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \int_\Sigma \mathrm{d}A \, n_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] \qquad (21)$$

(n^μ es el vector normal a la superficie) y la mencionada condición de contorno

$$\delta\phi|_\Sigma = 0. \qquad (22)$$

- Así que tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0} \quad \text{(Ecuación de Euler-Lagrange para el campo } \phi\text{).} \tag{23}$$

Nótese que si se añade al lagrangiano un término de la forma (derivada total)

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu(\phi) \tag{24}$$

las ecuaciones de movimiento no cambian debido a la condición de contorno de que los campos sean constantes en el infinito, pues usando de nuevo el teorema de Stokes,

$$\int_V \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu K^\mu = \int_\Sigma \mathrm{d}A \, n_\mu K^\mu, \tag{25}$$

se añade una constante a la acción y la ecuación (2) queda inalterada.

- En el formalismo hamiltoniano definimos el momento conjugado del campo ϕ,

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \tag{26}$$

y la densidad hamiltoniana (o simplemente hamiltoniano),

$$\mathcal{H}(x) = \Pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x) \tag{27}$$

siendo,

$$H = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H}(x). \tag{28}$$

Teorema de Noether

- Vamos a discutir la relación existente entre simetrías continuas y leyes de conservación en teoría clásica de campos.

  Una transformación infinitesimal global, i.e. con $|\epsilon^a| \ll 1$ independiente de las coordenadas, de los campos ϕ_i de lo que depende la acción $S(\phi)$ se escribe

$$\phi_i(x) \mapsto \phi_i'(x') \equiv \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \tag{29}$$

  y para las coordenadas

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x), \tag{30}$$

  donde "a" puede ser un índice, dos, … o ninguno.

- Decimos que esta transformación es una simetría si deja invariantes las ecuaciones del movimiento, i.e. si la acción no varía:

$$S(\phi) \mapsto S(\phi') = S(\phi). \tag{31}$$

Teorema de Noether

- Entonces, a primer orden en δx,

$$0 = S(\phi') - S(\phi) = \int \mathrm{d}^4x' \; \mathcal{L}'(x') - \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(x) = \int \mathrm{d}^4x \left[\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x)\right] \tag{32}$$

donde se ha usado

$$\mathrm{d}^4x' = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| \mathrm{d}^4x, \quad \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} & \dfrac{\partial \delta x^0}{\partial x^1} & \dots \\ \dfrac{\partial \delta x^1}{\partial x^0} & 1 + \dfrac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x)^2. \tag{33}$$

Ahora bien, como

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \mathcal{O}(\delta x)^2 \tag{34}$$

y $\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$, la ecuación (32) queda

$$0 = \int \mathrm{d}^4x \left\{\delta\mathcal{L}(x) + \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L}(x)\right]\right\}. \tag{35}$$

Teorema de Noether

- Por otro lado,

$$\delta\mathcal{L}(x) = \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right]$$
$$= \sum_i \left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right]\delta\phi_i + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right]\right\} \tag{36}$$

y a partir de

$$\phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x'^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} \tag{37}$$

tenemos

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x) - \epsilon^a A_a^\mu\partial_\mu\phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} \tag{38}$$

de modo que

$$\delta\phi_i(x) = \phi_i'(x) - \phi_i(x) = -\epsilon^a[A_a^\mu\partial_\mu\phi_i(x) - F_{i,a}] \tag{39}$$

Teorema de Noether

- Por tanto, si $\phi = \phi_{\rm cl}$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, (35) queda

$$0 = \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i + \delta x^\mu \mathcal{L}(x) \right] \tag{40}$$

y sustituyendo δx^μ de (30) y $\delta\phi$ de (39) tenemos

$$0 = \epsilon^a \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\rm cl}), \tag{41}$$

donde

$$\boxed{j_a^\mu(\phi) \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x)} \tag{42}$$

Teorema de Noether

- Supongamos por un momento que hacemos una transformación local, $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$, sobre esta acción invariante solo bajo transformaciones globales. Entonces no quedará invariante sino que

$$S(\phi') = S(\phi) + \int \mathrm{d}^4x [\epsilon^a(x) K_a(\phi) - (\partial_\mu \epsilon^a) j_a^\mu(\phi)] + \mathcal{O}(\partial\partial\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{43}$$

  donde el coeficiente $K_a(\phi)$ es cero, porque en el caso particular de ϵ^a constantes la invariancia global implica $\int \mathrm{d}^4x\ K_a(\phi) = 0$, para cualquier ϕ. Veamos por qué hemos llamado precisamente $-j_a^\mu(\phi)$ al otro coeficiente. Si los $\epsilon^a(x)$ van suficientemente rápido a cero en el infinito, podemos deducir del teorema de Stokes que

$$\int \mathrm{d}^4x\ \partial_\mu \left(\epsilon^a j_a^\mu(\phi)\right) = 0 \Rightarrow -\int \mathrm{d}^4x\ (\partial_\mu \epsilon^a) j_a^\mu(\phi) = \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi) \tag{44}$$

  de donde

$$S(\phi') - S(\phi) = \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi). \tag{45}$$

Teorema de Noether

- Ahora bien, si tomamos en particular $\phi = \phi_{\text{cl}}$, una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que es un extremo de la acción, la ecuación anterior expresa una variación lineal de la acción en torno a ese extremo y por tanto se anula. Es decir,

$$0 = \int \mathrm{d}^4x \; \epsilon^a(x)\partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\text{cl}}). \tag{46}$$

Como esto ocurre para cualquier $\epsilon^a(x)$, tenemos que

$$\partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\text{cl}}) = 0, \tag{47}$$

es decir, $j_a^\mu(\phi_{\text{cl}})$ son corrientes conservadas. Así que (41) no solo implica que la integral se anula, sino también el integrando.

Teorema de Noether

- Si definimos las cargas

$$Q_a \equiv \int d^3x \; j_a^0(t,\vec{x}) \tag{48}$$

vemos que la conservación de la corriente $j_a^\mu(x)$ implica que la carga Q_a se conserva, i.e. es independiente del tiempo, pues

$$\partial_t Q_a = \int d^3x \; \partial_0 j_a^0(t,\vec{x}) = -\int d^3x \; \partial_i j_a^i(t,\vec{x}) = 0, \tag{49}$$

ya que los campos decrecen suficientemente rápido en el infinito (de nuevo el teorema de Stokes).

Las simetrías pueden ser internas, si no cambian las coordenadas, i.e. $A_a^\mu(x) = 0$, o espaciotemporales. La conservación de la carga eléctrica, el isoespín, el número bariónico, etc., son consecuencias de las primeras. Veamos ahora todos los ejemplos de las segundas: invariancias bajo traslaciones espaciotemporales, rotaciones y *boosts*.

Traslaciones espaciotemporales

- Vienen dadas por las siguientes transformaciones de coordenadas y campos (cualquier componente, si tienen alguna):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \Rightarrow \epsilon^a = \epsilon^\nu , \quad A_a^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \tag{50}$$

$$\phi_i(x) \mapsto \phi_i'(x') = \phi_i(x) \Rightarrow F_{i,a}(\phi, \partial\phi) = 0. \tag{51}$$

Por tanto, hay 4 corrientes conservadas que forman el tensor energía-momento,

$$\theta^\mu{}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad \partial_\mu \theta^\mu{}_\nu = 0 \tag{52}$$

y 4 "cargas" que son constantes, la energía y las 3 componentes del momento,

$$P_\nu = \int \mathrm{d}^3x \; \theta^0{}_\nu = \int \mathrm{d}^3x \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^0 \mathcal{L} \right] . \tag{53}$$

Es decir, la invariancia bajo traslaciones espaciotemporales implica conservación del cuadrimomento,

$$\partial_t P^\nu = 0 \, , \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \, . \tag{54}$$

Nótese que el P_0 definido en (54) coincide con el Hamiltoniamo, definido en (28).

- Consideremos por simplicidad un campo escalar. Las transformaciones de Lorentz son de la forma

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)x_\nu \;\Rightarrow \epsilon^a = \omega^{\rho\sigma} = -\omega^{\sigma\rho},$$

$$A^\mu_a(x) = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)x_\nu \tag{55}$$

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow F_a(\phi) = 0. \tag{56}$$

- Por tanto,

$$\begin{aligned} j^\mu{}_{\rho\sigma} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{1}{2}(\delta^\nu_\rho x_\sigma - \delta^\nu_\sigma x_\rho)\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi x_\sigma - \partial_\sigma\phi x_\rho) - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta^\mu{}_\rho x_\sigma - \theta^\mu{}_\sigma x_\rho\right), \quad \partial_\mu j^\mu{}_{\rho\sigma} = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Teorema de Noether | Rotaciones y boosts

- Es decir, el siguiente tensor contiene seis corrientes conservadas:

$$T^{\mu\rho\sigma} \equiv -(\theta^{\mu\rho}x^{\sigma} - \theta^{\mu\sigma}x^{\rho}), \quad \partial_{\mu}T^{\mu\nu\rho} = 0 \tag{58}$$

y hay seis cargas o constantes del movimiento,

$$M^{\rho\sigma} = \int \mathrm{d}^3x\ T^{0\rho\sigma} = \int \mathrm{d}^3x\ (x^{\rho}\theta^{0\sigma} - x^{\sigma}\theta^{0\rho}), \quad \partial_t M^{\rho\sigma} = 0. \tag{59}$$

de las cuales M^{ij} (momento angular) se deben a la invariancia bajo rotaciones y M^{0i} a la invariancia bajo *boosts*.

- Conviene ahora hacer dos comentarios:

1. Nótese que la ecuación (58) implica que el tensor energía-momento debe ser simétrico, pues $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ y

$$0 = \partial_\mu (x^\rho \theta^{\mu\sigma} - x^\sigma \theta^{\mu\rho}) = x^\rho \partial_\mu \theta^{\mu\sigma} - x^\sigma \partial_\mu \theta^{\mu\rho} + \theta^{\mu\sigma}\delta^\rho_\mu - \theta^{\mu\rho}\delta^\sigma_\mu = \theta^{\rho\sigma} - \theta^{\sigma\rho}. \quad (60)$$

Como el $\theta^{\mu\nu}$ definido en (52) no es necesariamente simétrico, hay que añadirle una derivada total de la forma $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$, con $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, para que

$$\widetilde{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad \partial_\mu \widetilde{\theta}^{\mu\nu} = \partial_\mu \theta^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \quad (61)$$

y como

$$\int \mathrm{d}^3x\, \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\, \partial_i f^{i0\nu} = 0 \Rightarrow P^\nu = \int \mathrm{d}^3x\, \widetilde{\theta}^{0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\, \theta^{0\nu}, \quad (62)$$

las cargas conservadas son las mismas, siempre que los campos, de los que depende f, se anulen suficientemente rápido en el infinito.

- Conviene ahora hacer dos comentarios:

2. Estamos acostumbrados a la conservación del momento angular ($\partial_t M^{ij} = 0$) pero no a la conservación de cantidades asociadas a los *boosts* ($\partial_t M^{0i} = 0$). En efecto, en mecánica cuántica,

$$K^k = M^{0k} = P^k t - \int \mathrm{d}^3x\ x^k \theta^{00} = M^{0k}(t) \quad \text{(imagen de Heisenberg)} \tag{63}$$

y recordemos que $\partial_t M^{0k} \equiv \mathrm{d}M^{0k}/\mathrm{d}t = \mathrm{i}[H, K^k] + \partial K^k/\partial t = \mathrm{i}^2 P^k + P^k = 0$. Sin embargo, a diferencia de energía, momento y momento angular, estas cantidades conservadas no sirven para etiquetar estados, ya que los operadores que representan a los generadores de los *boosts* no siempre son hermíticos y además no conmutan con el hamiltoniano.

▷ Nótese que estos K^k son la representación de los generadores en el espacio infinitodimensional de campos escalares y que, a diferencia de los operadores matriciales 4×4 introducidos en el primer tema, dependen de las coordenadas espaciotemporales.

Campos escalares | Ecuación de Klein-Gordon

- Consideremos para empezar un campo escalar real, $\phi(x) = \phi^*(x)$. Una acción que describa una dinámica no trivial del campo debe contener derivadas, $\partial_\mu \phi$. Los índices Lorentz deben estar contraídos, pues la acción es un escalar. La acción más sencilla es

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \; (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(x). \tag{64}$$

- La ecuación de Euler-Lagrange para ϕ es entonces la ecuación de Klein-Gordon,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \Rightarrow (\Box + m^2)\phi(x) = 0, \quad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \tag{65}$$

  Sus soluciones son ondas planas,

$$\phi \propto \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} px}, \text{ con } px \equiv p_\mu x^\mu \text{ y } p^2 \equiv p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2.$$

  El parámetro m es la masa, que por definición tomaremos $m > 0$.

- La solución más general de la ecuación de Klein-Gordon es por tanto,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^*_{\vec{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right)\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}\equiv+\sqrt{m^2+\vec{p}^2}} \tag{66}$$

  La normalización de los campos se ha elegido por conveniencia. Vemos que entre las soluciones hay modos de energía positiva ($\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$) y modos de energía negativa ($\mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}$), cuya interpretación surgirá solo al cuantizar el campo.

- El signo de la acción se ha elegido para tener un hamiltoniano definido positivo:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi \Rightarrow \mathcal{H} = \Pi_\phi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right] > 0. \tag{67}$$

  El tensor energía-momento es directamente simétrico,

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{68}$$

  y, en efecto, $\mathcal{H} = \theta^{00}$.

- En cuanto a las cargas conservadas asociadas a las rotaciones,

$$M^{ij} = \int \mathrm{d}^3x \, (x^i\theta^{0j} - x^j\theta^{0i}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3x \, [\phi L^{ij}\partial_0\phi - \partial_0\phi L^{ij}\phi], \tag{69}$$

donde se ha usado la definición de $L^{ij} = \mathrm{i}(x^i\partial^j - x^j\partial^i)$ y se ha integrado por partes con $i \neq j$,

$$\int \mathrm{d}^3x \, \partial^j[\phi x^i\partial_0\phi] = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}^3x \, \partial^j\phi x^i\partial_0\phi = -\int \mathrm{d}^3x \, \phi x^i\partial^j\partial_0\phi, \tag{70}$$

$$\int \mathrm{d}^3x \, \partial^j[\partial_0\phi x^i\phi] = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}^3x \, \partial^j\partial_0\phi x^i\phi = -\int \mathrm{d}^3x \, \partial_0\phi x^i\partial^j\phi. \tag{71}$$

Si definimos el producto escalar de dos campos reales como

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3x \, \phi_1\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_2, \quad f\overleftrightarrow{\partial}g \equiv f\partial g - \partial f g, \tag{72}$$

tenemos que

$$M^{ij} = \langle \phi | \, L^{ij} \, | \phi \rangle \,, \tag{73}$$

que es lo que uno esperaría, pues L^{ij} es la representación del operador J^{ij} sobre el espacio vectorial de los campos.

- Veamos que $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$ es independiente del tiempo si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, lo que está de acuerdo con que M^{ij} es una cantidad conservada. En efecto,

$$\begin{aligned}
\partial_0 \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle &= \frac{\mathrm{i}}{2} \int \mathrm{d}^3x \; \partial_0 [\phi_1 \partial_0 \phi_2 - \partial_0 \phi_1 \phi_2] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2} \int \mathrm{d}^3x \; \left\{ \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_2 + \phi_1 \partial_0^2 \phi_2 - \partial_0^2 \phi_1 \phi_2 - \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_2 \right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2} \int \mathrm{d}^3x \; \left\{ \phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \nabla^2 \phi_1 \phi_2 - m^2 \phi_1 \phi_2 + m^2 \phi_1 \phi_2 \right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2} \int \mathrm{d}^3x \; \{ -\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \} = 0,
\end{aligned} \tag{74}$$

donde se ha usado

$$(\Box + m^2)\phi_{1,2} = 0 \Rightarrow \partial_0^2\phi_{1,2} = \nabla^2\phi_{1,2} - m^2\phi_{1,2}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\ \nabla\cdot(\phi_{1,2}\nabla\phi_{2,1}) = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}^3x\ \phi_{1,2}\nabla^2\phi_{2,1} = -\int \mathrm{d}^3x\ \nabla\phi_{1,2}\cdot\nabla\phi_{2,1}. \tag{75}$$

- Análogamente, podemos escribir

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{0\mu} = \langle\phi|\,\mathrm{i}\partial^\mu\,|\phi\rangle\,. \tag{76}$$

▷ En efecto, usando de nuevo la ecuación de Klein-Gordon e integrando por partes,

$$\begin{aligned} P^0 = \langle\phi|\,\mathrm{i}\partial^0\,|\phi\rangle = \langle\phi|\,\mathrm{i}\partial_0\,|\phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [\phi\partial_0^2\phi - (\partial_0\phi)^2] \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [\phi\nabla^2\phi - m^2\phi^2 - (\partial_0\phi)^2] \\ &= \ \ \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [(\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + (\partial_0\phi)^2] = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{00}, \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} P^i = \langle\phi|\, \mathrm{i}\partial^i \,|\phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [\phi\partial^i\partial_0\phi - \partial_0\phi\partial^i\phi] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\ \partial^i\phi\partial_0\phi = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{i0} = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{0i}. \end{aligned} \tag{78}$$

- Y también,

$$M^{0i} = \langle\phi|\, L^{0i} \,|\phi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\ (x^0\theta^{0i} - x^i\theta^{00}). \tag{79}$$

▷ En efecto,

$$\begin{aligned} M^{0i} = \langle\phi|\, L^{0i} \,|\phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ [\phi(x^0\partial^i - x^i\partial^0)\partial_0\phi - \partial_0\phi(x^0\partial^i - x^i\partial^0)\phi] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\ \left\{x^0\partial_0\phi\partial^i\phi + \frac{x^i}{2}[\phi\partial_0^2\phi - (\partial_0\phi)^2]\right\} \\ &= \int \mathrm{d}^3x\ \left\{x^0\partial_0\phi\partial^i\phi - \frac{x^i}{2}[(\partial_0\phi)^2 - \phi\nabla^2\phi + m^2\phi^2]\right\}. \end{aligned} \tag{80}$$

- Nótese que, como habíamos anticipado, $L^{\mu\nu}$ y $\mathrm{i}\partial^\mu$ son operadores hermíticos, por lo que tenemos una representación unitaria de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Así que $M^{\mu\nu}$ y P^μ son cantidades reales.

- Finalmente, podemos generalizar la acción de Klein-Gordon para incluir interacciones del campo escalar introduciendo un potencial $V(\phi)$,

$$S = \int \mathrm{d}^4x \, \left\{ \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right] - V(\phi) \right\} . \tag{81}$$

  Términos proporcionales a ϕ^3, ϕ^4, $\ldots$ en el potencial dan lugar a contribuciones no lineales en las ecuaciones de movimiento, que corresponden a auto-interacciones del campo:[a]

$$(\Box + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} . \tag{82}$$

[a] Añadir un término lineal $c^3\phi$ al potencial es equivalente a reparametrizar $\phi \to \phi - c^3/m^2$, que conduce a la misma dinámica.

- Supongamos ahora un campo escalar complejo,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \tag{83}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son dos campos reales con la misma masa m. Entonces

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}^4x\ (\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\ (\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m^2\phi_1^2) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\ (\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m^2\phi_2^2) \\ &= \int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(x). \end{aligned} \tag{84}$$

Está claro que la ecuación de Klein-Gordon para ϕ es la misma que (65), pues tanto la parte real como la imaginaria la satisfacen. La solución más general es

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b_{\vec{p}}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right)\Bigg|_{p^0=E_{\vec{p}}\equiv+\sqrt{m^2+\vec{p}^2}} \tag{85}$$

- La acción de este campo complejo es invariante bajo las transformaciones globales de simetría del grupo U(1),

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi(x), \quad \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\phi^*(x) \tag{86}$$

lo que significa que existe una corriente conservada asociada (tomar $\phi_i = (\phi, \phi^*)$):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu \Rightarrow A_a^\mu(x) = 0 \tag{87}$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(x) \mapsto \phi'(x) = \phi(x) - \mathrm{i}\theta\phi(x) \\ \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) = \phi^*(x) + \mathrm{i}\theta\phi^*(x) \end{array}\right. \Rightarrow \epsilon^a = \theta, \quad \begin{array}{ll} F_{\phi,a} & = -\mathrm{i}\phi \\ F_{\phi^*,a} & = \;\; \mathrm{i}\phi^* \end{array} \tag{88}$$

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}F_{\phi,a} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}F_{\phi^*,a} = \mathrm{i}(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) = \mathrm{i}\phi^*\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\phi. \tag{89}$$

- La carga conservada es

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0 = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x\, \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi = \langle \phi | \phi \rangle\,, \quad \partial_t Q = 0, \tag{90}$$

consistente con que el generador de las simetrías $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ es el operador identidad y definiendo el producto escalar de dos campos complejos ϕ_A y ϕ_B como

$$\langle \phi_A | \phi_B \rangle \equiv \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x\, \phi_A^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_B. \tag{91}$$

- Consideremos espinores de Weyl ψ_R y ψ_L. Entonces

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L \tag{92}$$

con $\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma})$, $\overline{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$, son cuadrivectores Lorentz.

▷ Para demostrar esto recordemos que

$$\psi_R \mapsto \exp\left\{(-\mathrm{i}\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right\} \psi_R. \tag{93}$$

Consideremos, por ejemplo, un boost infinitesimal de rapidity η en la dirección x,

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^1}{2} \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^1}{2} \psi_R$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \psi_R^\dagger \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R + \eta \delta^{i1} \psi_R^\dagger \psi_R, \end{array} \tag{94}$$

pues $\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij}$.

Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo ese boost igual que un cuadrivector v^μ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} . \tag{95}$$

Consideremos ahora una rotación infinitesimal θ alrededor del eje z,

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + \mathrm{i}\theta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^3}{2} \sigma^\mu \psi_R - \mathrm{i}\theta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^3}{2} \psi_R$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lcl} \psi_R^\dagger \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R - \theta \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R + \theta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^3 \psi_R & \mapsto & \psi_R^\dagger \sigma^3 \psi_R , \end{array} \tag{96}$$

pues $\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2\mathrm{i}\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo esa rotación igual que un cuadrivector v^μ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} . \tag{97}$$

Y análogamente para $\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L$.

- Concentrémonos en ψ_L. Podemos construir la acción más sencilla para estos campos,[a]

$$S = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \; \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = \int \mathrm{d}^4 x \; \mathcal{L}(x). \tag{98}$$

El factor i se introduce para que el lagrangiano sea hermítico. Hallemos sus ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando ψ_L y ψ_L^* como campos independientes:

$$\begin{aligned} [\psi_L^*]: &\quad \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \\ [\psi_L]: &\quad -\mathrm{i}\partial_\mu \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu = 0 \end{aligned} \;\Rightarrow\; \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \Rightarrow (\partial_0 - \sigma^i \partial_i)\psi_L = 0. \tag{99}$$

(ecuación de Weyl para ψ_L)

---

[a] Acabamos de probar que $\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L \mapsto \Lambda^\mu{}_\rho \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\rho \psi_L = \psi_L^\dagger \Lambda^\mu{}_\rho \overline{\sigma}^\rho \psi_L$, pues Λ y $\overline{\sigma}$ actúan en distintos espacios. Por otro lado, $\partial_\mu \mapsto \Lambda_\mu{}^\sigma \partial_\sigma$. Entonces, el siguiente término es un escalar Lorentz pues usando:

$$\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \mapsto \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\rho \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\rho g_\rho^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L.$$

- La ecuación de Weyl para ψ_L es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon sin masa para sus dos componentes,

$$\partial_0\psi_L = \sigma^i\partial_i\psi_L \Rightarrow \partial_0^2\psi_L = \nabla^2\psi_L \Rightarrow \Box\psi_L = 0 \tag{100}$$

y además aporta información sobre la helicidad de los distintos modos del campo.

▷ Si tomamos un modo de energía positiva (negativa) de ψ_L,

$$\psi_L(x) = u_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\ (u_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}) \tag{101}$$

con u_L un espinor constante y $p^\mu = (E, \vec{p})$ donde $E = |\vec{p}|$ (masa cero), pues

$$\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow (\hat{p}\cdot\vec{J})\ u_L = \frac{1}{2}\hat{p}\cdot\vec{\sigma}\ u_L \equiv h u_L \tag{102}$$

vemos que

$$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = (\partial_0 - \sigma^i\partial_i)u_L \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}px} = \mp\mathrm{i}(E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_L\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}px} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\ u_L = -u_L, \tag{103}$$

lo que significa que los modos de ψ_L son todos de helicidad negativa $h = -\frac{1}{2}$.

- Por otro lado, el tensor energía-momento es

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} \partial^\nu \psi_L - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial^\nu \psi_L, \tag{104}$$

donde se ha usado que para los campos que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange (99) el lagrangiano $\mathcal{L} = 0$. El hamiltoniano es $\mathcal{H} = \theta^{00} = \mathrm{i}\psi_L^\dagger \partial^0 \psi_L$.

- Además la acción es invariante bajo transformaciones globales de simetría del grupo U(1),

$$\psi_L \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \psi_L, \tag{105}$$

así que existe una corriente conservada

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} \mathrm{i}\psi_L = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{106}$$

y una carga conservada

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0 = \int \mathrm{d}^3x\, \psi_L^\dagger \psi_L, \quad \partial_t Q = 0. \tag{107}$$

- Análogamente puede verse que la ecuación de Weyl para ψ_R es

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0 \Rightarrow (\partial_0 + \sigma^i \partial_i)\psi_R = 0, \tag{108}$$

que es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon sin masa para sus dos componentes,

$$\partial_0 \psi_R = -\sigma^i \partial_i \psi_R \Rightarrow \partial_0^2 \psi_R = \nabla^2 \psi_R \Rightarrow \Box \psi_R = 0. \tag{109}$$

Los modos de ψ_R tienen helicidad positiva $h = \frac{1}{2}$. El tensor energía-momento, la corriente y la carga conservada correspondientes son, respectivamente,

$$\theta^{\mu\nu} = \mathrm{i}\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial^\nu \psi_R, \quad j^\mu = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad Q = \int \mathrm{d}^3x \; \psi_R^\dagger \psi_R. \tag{110}$$

- Nótese que, bajo una transformación de Lorentz,

$$\psi_L \mapsto \Lambda_L \psi_L, \quad \psi_R \mapsto \Lambda_R \psi_R, \quad \text{y } \Lambda_L^\dagger \Lambda_R = \Lambda_R^\dagger \Lambda_L = \mathbb{1}. \tag{111}$$

Por tanto, $\psi_L^\dagger \psi_R$ y $\psi_R^\dagger \psi_L$ son escalares Lorentz.

▷ Bajo paridad ($\psi_L \leftrightarrow \psi_R$) las siguientes combinaciones hermíticas se transforman:

$$\begin{aligned} (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto \quad (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad \text{(escalar)} \\ \mathrm{i}(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto -\mathrm{i}(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) \quad \text{(pseudoescalar)} \end{aligned} \tag{112}$$

Así que el lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L}_D = \mathrm{i}\psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + \mathrm{i}\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \tag{113}$$

es invariante bajo paridad. El lagrangiano de Weyl no lo es.

- Hallemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} [\psi_L^*] &: \quad \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0 \\ [\psi_L] &: \quad -\mathrm{i}\partial_\mu \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu - m\psi_R^\dagger = 0 \\ [\psi_R^*] &: \quad \mathrm{i}\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0 \\ [\psi_R] &: \quad -\mathrm{i}\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^\mu - m\psi_L^\dagger = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ \mathrm{i}\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m\psi_L, \end{aligned} \tag{114}$$

que es la ecuación de Dirac en términos de espinores de Weyl.

▷ Nótese que ψ_L y ψ_R ya no son autoestados de helicidad y que las 2 componentes de ψ_L y las de ψ_R satisfacen una ecuación de Klein-Gordon de masa m, pues

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R \Rightarrow (\mathrm{i}\sigma^\nu \partial_\nu)\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\mathrm{i}\sigma^\nu \partial_\nu \psi_R \\ &\qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}(\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu)\partial_\mu \partial_\nu \psi_L = m^2 \psi_L \Rightarrow (\Box + m^2)\psi_L = 0, \end{aligned} \tag{115}$$

donde se ha usado (108) y la identidad $\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Lo mismo para ψ_R,

$$(\Box + m^2)\psi_R = 0. \tag{116}$$

- Es conveniente introducir el campo de Dirac, de 4 componentes,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad \text{(representación quiral)} \tag{117}$$

y definir las matrices gamma de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(representación quiral)}, \tag{118}$$

que satisfacen el álgebra de Clifford,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{119}$$

▷ La ecuación de Dirac queda entonces

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad \not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu. \tag{120}$$

- Podemos escribir el lagrangiano de Dirac de forma compacta introduciendo

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad \text{(espinor adjunto)}. \tag{121}$$

En la representación quiral, $\overline{\psi} = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$ y

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi. \tag{122}$$

- También se define la matriz $\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ que es

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(representación quiral)} \tag{123}$$

Por tanto, los operadores $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$, $\quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ son proyectores sobre los espinores de Weyl ψ_L y ψ_R, respectivamente,

$$P_L\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{124}$$

- Pueden elegirse otras representaciones,

$$\psi'(x) = U\psi(x), \quad \gamma'^{\mu} = U\gamma^{\mu}U^{\dagger}, \quad \overline{\psi}'(x) = \psi'^{\dagger}(x)\gamma'^{0}, \tag{125}$$

donde U es una matriz unitaria constante.

▷ De este modo,

$$\mathcal{L}_D = \psi'^{\dagger}U\gamma^{0}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)U^{\dagger}\psi' = \overline{\psi}'(\mathrm{i}\gamma'^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi', \tag{126}$$

tiene la misma forma que el lagrangiano original.

▷ Además el álgebra de Clifford permanece invariante, $\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$.

- Una representación que se usa con frecuencia es la representación estándar o representación de Dirac, que se obtiene a partir de la quiral mediante

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{127}$$

▷ El campo y las matrices de Dirac quedan

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \\ \psi_R - \psi_L \end{pmatrix} , \tag{128}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{129}$$

▷ La representación de Dirac resulta cómoda en el límite no relativista, mientras que la quiral es más conveniente en el límite ultrarrelativista.

- La solución general de la ecuación de Dirac es una superposición de ondas planas,

$$\psi(x) \equiv u(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \text{ (modos de energía positiva } E > 0), \tag{130}$$

$$\psi(x) \equiv v(\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \text{ (modos de energía negativa } -E < 0), \quad E = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \tag{131}$$

Aplicando (120) a estas soluciones tenemos

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0. \tag{132}$$

- Hallemos ahora la forma explícita de estas soluciones en la representación quiral:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_L(\vec{p}) \\ u_R(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} v_L(\vec{p}) \\ v_R(\vec{p}) \end{pmatrix}. \tag{133}$$

▷ Tomemos primero el caso $m \neq 0$. Entonces, en el sistema de referencia en reposo,

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

$$(\not{p} - m)u(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 - 1)u(0) = 0 \Rightarrow u_L(0) = u_R(0), \tag{134}$$

$$(\not{p} + m)v(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 + 1)v(0) = 0 \Rightarrow v_L(0) = -v_R(0). \tag{135}$$

Entonces, centrándonos en el espinor de energía positiva $u(\vec{p})$, podemos elegir

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m}\, \xi^{(s)}, \quad s \in \{1, 2\}, \quad \xi^{(r)\dagger}\xi^{(s)} = \delta_{rs},$$

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{136}$$

- Las soluciones para $\vec{p}$ arbitrario se hallan mediante boost en dirección $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$,

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} u_L^{(s)}(0) \\ e^{+\frac{1}{2}\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix}. \tag{137}$$

Desarrollando las exponenciales,

$$\begin{aligned} e^{\pm\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\eta^{2k} \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\eta^{2k+1} \\ &= \cosh\eta \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma}\sinh\eta = \frac{1}{m}(E \pm \vec{p}\cdot\vec{\sigma}), \end{aligned} \tag{138}$$

con

$$\cosh\eta = \gamma = \frac{E}{m}, \quad \sinh\eta = \gamma\beta = \frac{|\vec{p}|}{m} \tag{139}$$

$$(p\sigma) = p_\mu\sigma^\mu = E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}, \quad (p\bar{\sigma}) = p_\mu\bar{\sigma}^\mu = E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}, \tag{140}$$

$$\Rightarrow u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\; u_L^{(s)}(0) \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})}\; u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\; \xi^{(s)} \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})}\; \xi^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{141}$$

- Otra forma de escribir estas soluciones es

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\xi^{(s)} \\ \left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\xi^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{142}$$

donde se ha usado,

$$\mathrm{e}^{\pm\frac{\eta}{2}\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh\frac{\eta}{2} \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} = \mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}}\left(\frac{1\pm\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}}\left(\frac{1\mp\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) \tag{143}$$

$$\mathrm{e}^{\pm\frac{\eta}{2}} = \sqrt{\cosh\eta\pm\sinh\eta} = \sqrt{\gamma\pm\gamma\beta} = \sqrt{\frac{E\pm|\vec{p}|}{m}}. \tag{144}$$

- Si hacemos el límite ultrarrelativista ($E \gg m$), $p^\mu \to (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\xi^{(1)} \\ (1+\sigma^3)\xi^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{(1)} \end{pmatrix} \\ u^{(2)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\xi^{(2)} \\ (1+\sigma^3)\xi^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{145}$$

vemos que $u^{(1)}$ solo tiene componente right-handed y $u^{(2)}$ solo tiene componente left-handed, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida (quiralidad), como corresponde a campos de masa nula.

- Si repetimos el procedimiento para el espinor de energía negativa $v(\vec{p})$ obtenemos

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\, v_L^{(s)}(0) \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})}\, v_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)}\, \eta^{(s)} \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})}\, \eta^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \eta^{(r)\dagger}\eta^{(s)} = \delta_{rs}, \tag{146}$$

o bien

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\eta^{(s)} \\ -\left[\sqrt{E+|\vec{p}|}\left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) + \sqrt{E-|\vec{p}|}\left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)\right]\eta^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{147}$$

- Veremos que resulta conveniente elegir

$$\eta^{(s)} = -\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*} \Rightarrow \eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{148}$$

Entonces, en el límite ultrarrelativista ($E \gg m$), $p^\mu \to (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\eta^{(1)} \\ -(1+\sigma^3)\eta^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^{(2)}(\vec{p}) &\to \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\eta^{(2)} \\ -(1+\sigma^3)\eta^{(2)} \end{pmatrix} = -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{149}$$

lo que significa que $v^{(1)}$ solo tiene componente left-handed y $v^{(2)}$ solo tiene componente right-handed, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida y masa nula.

- Introduciendo ahora los correspondientes espinores adjuntos,[a]

$$\overline{u} = u^\dagger \gamma^0, \quad \overline{v} = v^\dagger \gamma^0, \tag{150}$$

que satisfacen las ecuaciones de Dirac,

$$\overline{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0, \quad \overline{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0, \tag{151}$$

pueden demostrarse las siguientes relaciones de ortonormalidad,

$$\overline{u}^{(r)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2m\delta_{rs}, \quad \overline{v}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = -2m\delta_{rs} \tag{152}$$

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\delta_{rs}, \tag{153}$$

$$\overline{u}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = \overline{v}^{(r)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 0 \tag{154}$$

y las relaciones de completitud,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p})\overline{u}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(\vec{p})\overline{v}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} - m. \tag{155}$$

[a] Úsese la identidad $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

- Es importante notar que las 16 matrices,

$$\mathbb{1},\ \gamma_5,\ \gamma^\mu,\ \gamma^\mu\gamma_5,\ \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{156}$$

son linealmente independientes y forman una base para las matrices 4×4. Así que se pueden definir los siguientes bilineales fermiónicos con propiedades de transformación bien definidas (covariantes) bajo transformaciones de Lorentz,

$$\overline{\psi}\psi,\ \overline{\psi}\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \tag{157}$$

- Puede comprobarse también que las transformaciones de Lorentz del campo de Dirac ψ pueden escribirse, en cualquier representación de las matrices gamma, de la forma

$$\psi \mapsto \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right\}\psi, \quad \text{i.e. } J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \tag{158}$$

(Basta comprobar que $J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ satisface el álgebra de Lorentz.)

- Una simetría global interesante que posee el lagrangiano de Dirac sin masa es la simetría quiral,

$$\psi_L \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_L}\psi_L, \quad \psi_R \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_R}\psi_R \quad (\theta_L \text{ y } \theta_R \text{ independientes}), \tag{159}$$

que, en términos del espinor de Dirac, puede escribirse

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi, \quad \psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi \quad (\alpha \text{ y } \beta \text{ independientes}). \tag{160}$$

En efecto, haciendo transformaciones infinitesimales,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi = \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}\alpha)\psi_L \\ (1-\mathrm{i}\alpha)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_R = \theta_L \equiv \alpha \tag{161}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi = \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i}\beta)\psi_L \\ (1-\mathrm{i}\beta)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_R = -\theta_L \equiv \beta. \tag{162}$$

- Como

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi \Rightarrow \overline{\psi} \mapsto \overline{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{163}$$

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi \Rightarrow \overline{\psi} \mapsto \psi^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\gamma_5}\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5} = \overline{\psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}, \tag{164}$$

$$\text{pues } \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \tag{165}$$

la invariancia del lagrangiano bajo ambas transformaciones independientes es clara:

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi \Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{i}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi \mapsto \mathrm{i}\overline{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\partial\!\!\!/\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi = \mathrm{i}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi = \mathcal{L} \tag{166}$$

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi \Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{i}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi \mapsto \mathrm{i}\overline{\psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi = \mathrm{i}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi = \mathcal{L}. \tag{167}$$

- Hay por tanto dos corrientes conservadas,

$$j^\mu_V = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{corriente vectorial}), \quad j^\mu_A = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad (\text{corriente axial}). \tag{168}$$

Si $m \neq 0$ solo la corriente vectorial se conserva. Basta usar la ecuación de Dirac para comprobarlo:

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi \\ -\mathrm{i}\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu = m\overline{\psi}, \quad \text{pues } \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu \end{array} \tag{169}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \partial_\mu j^\mu_V = \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \mathrm{i}m\overline{\psi}\psi - \mathrm{i}m\overline{\psi}\psi = 0 \\ \partial_\mu j^\mu_A = \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi = \mathrm{i}m\overline{\psi}\gamma_5\psi + \mathrm{i}m\overline{\psi}\gamma_5\psi = 2\mathrm{i}m\overline{\psi}\gamma_5\psi. \end{array} \tag{170}$$

Campos espinoriales | Masa de Majorana

- Un campo de Majorana es un campo de Dirac autoconjugado,

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \zeta \mathrm{i}\sigma^2 \psi_L^*, \quad |\zeta|^2 = 1. \tag{171}$$

▷ Es evidente que ψ_M puede tener masa a pesar de estar generado por un solo espinor de Weyl. Basta con escribir

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi_M = 0 \Rightarrow \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R = \mathrm{i}\zeta m \sigma^2 \psi_L^* \tag{172}$$

que conduce a una ecuación de Klein-Gordon con masa para ψ_L,

$$(\Box + m^2)\psi_L = 0 \tag{173}$$

independientemente de que ψ_R venga o no dado por ψ_L.

- No escribiremos el lagrangiano clásico para ψ_M porque su término de masa sería proporcional a

$$\overline{\psi}_M\psi_M = (\psi_L^\dagger, -\mathrm{i}\zeta^*\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \mathrm{i}\zeta\sigma^2\psi_L^*\end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{i}\zeta\psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^* - \mathrm{i}\zeta^*\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2\psi_L = -\mathrm{i}\zeta^*\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2\psi_L + \mathrm{h.c.} \tag{174}$$

que es nulo a no ser que las componentes de ψ_M sean tratadas como cantidades anticonmutantes (variables de Grassmann) pues

$$\mathrm{i}\psi_L^\mathrm{T}\sigma^2\psi_L = \psi_L^1\psi_L^2 - \psi_L^2\psi_L^1. \tag{175}$$

- Pero lo más interesante es que, si bien el lagrangiano de Dirac es invariante bajo el grupo U(1) de transformaciones globales

$$\psi_L \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi_L, \quad \psi_R \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi_R, \tag{176}$$

  esta simetría no pueden tenerla los campos de Majorana pues las componentes left y right están conjugadas según (171).

▷ Esto significa que un campo de Majorana no puede tener cargas U(1), como la carga eléctrica, el número bariónico o el número leptónico.

▷ ¿Es el neutrino un fermión de Majorana?

- El campo electromagnético viene descrito por el cuadrivector A^μ.

  Definiendo el tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$,
  el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$ son

$$E^i = -F^{0i} = -\partial_t A^i - \nabla^i A^0, \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F^{jk} = (\nabla \times \vec{A})^i, \tag{177}$$

  de donde $F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k$, pues $\epsilon^{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta^{j\ell}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{k\ell}$.

  Es decir:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} .$$

- Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \tag{178}$$

que también puede escribirse $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)$, obtenemos las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Maxwell en el vacío)

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E}} \tag{179}$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell se obtienen a partir del tensor dual $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, cuya cuadridivergencia es nula, pues $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = 0$,

$$\boxed{\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}} \tag{180}$$

- El lagrangiano de Maxwell es simétrico bajo transformaciones locales $\theta = \theta(x)$ de la forma

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad \text{(transformación de gauge U(1)).} \tag{181}$$

La existencia de esta simetría local implica que $A_\mu(x)$ hace una descripción redundante del campo electromagnético, pues podemos usar la libertad de elección de gauge para restringir $A_\mu(x)$.

Campo electromagnético | Simetría gauge

- Podemos tomar $A_0(x) = 0$ eligiendo

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int^t \mathrm{d}t'\, A_0(t', \vec{x}), \tag{182}$$

pues así $A'_0(x) = A_0(x) - A_0(x) = 0$.

- Podemos también hacer otra transformación, que no cambia la componente A_0,

$$A'_\mu(x) \mapsto A''_\mu(x) = A'_\mu(x) - \partial_\mu\theta(\vec{x}), \quad \theta(\vec{x}) \equiv -\int \frac{\mathrm{d}^3y}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{\partial A'^i(t,\vec{y})}{\partial y^i}. \tag{183}$$

Aunque no lo parezca, esta θ no depende de t, pues

$$E^i = -F^{0i} = -\partial^0 A'^i + \cancel{\partial^i A'^0} = -\partial^0 A'^i \tag{184}$$

y como $\nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 0$ en ausencia de fuentes tenemos que $\partial_0 \partial_i A'^i = 0$ y por tanto $\partial_0\theta = 0$. Así que también $A''_0(x) = 0$.

▷ Veamos qué consecuencias tiene la transformación de gauge anterior:

$$\nabla^2\theta(\vec{x}) = -\int \mathrm{d}^3y\, \frac{\partial A'^i(t,\vec{y})}{\partial y^i}\nabla_x^2\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = \frac{\partial A'^i(x)}{\partial x^i} = \nabla\cdot\vec{A}', \tag{185}$$

donde se ha usado que

$$\nabla_x^2\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = -\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{186}$$

así que

$$\partial^\mu A''_\mu(x) = \partial^\mu A'_\mu(x) - \partial^\mu\partial_\mu\theta(\vec{x}) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{A}'' = \nabla\cdot\vec{A}' - \nabla^2\theta = 0. \tag{187}$$

Es decir podemos tomar también $\nabla\cdot\vec{A} = 0$. A esta elección,

$$A^0 = 0, \quad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \tag{188}$$

que solamente es posible en ausencia de fuentes, se le llama gauge de radiación.

- Otra elección, que puede hacerse siempre, es

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta, \quad \partial_\mu\partial^\mu\theta \equiv \partial_\mu A^\mu \tag{189}$$

de modo que podemos tomar

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{190}$$

Es el llamado gauge de Lorenz.[a] Entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu = 0. \tag{191}$$

Es decir, cada componente de A^μ satisface una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Sus soluciones son de la forma (A^μ es un campo real de masa cero)

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \epsilon^*_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad k^2 = 0. \tag{192}$$

[a]No debe confundirse a L.V. Lorenz (físico y matemático danés), autor del gauge de Lorenz, con H.A. Lorentz (físico holandés, premio Nobel en 1902), que propuso las transformaciones de Lorentz. Tampoco con E.N. Lorenz (matemático y meteorólogo norteamericano), fundador de la teoría del caos, que acuñó el "efecto mariposa" y propuso el atractor de Lorenz.

▷ La condición (190) implica que el vector de polarización $\epsilon^\mu(k)$ satisface

$$k\epsilon = 0. \tag{193}$$

- En el gauge de radiación, compatible con el gauge de Lorenz, el campo es transverso pues la polarización $\epsilon^0 = 0$ y $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$.

- Aclaración: A diferencia de la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, que solo puede imponerse en ausencia de fuentes, la condición $A^0 = 0$ puede usarse siempre, aunque no suele hacerse cuando hay fuentes.

▷ Por ejemplo, consideremos un observador frente a una carga e en reposo a una distancia r. En ese caso se suele tomar

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) = \left(\frac{e}{4\pi r}, 0\right), \tag{194}$$

que conduce al campo electromagnético

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla\phi = \frac{e}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0. \tag{195}$$

Sin embargo, podríamos haber elegido un gauge en el que

$$A'^\mu = (\phi', \vec{A}') = \left(0, -\frac{et}{4\pi r^2}\hat{r}\right), \tag{196}$$

que conduce al mismo campo electromagnético,

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}' - \nabla\phi' = \frac{e}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = 0. \tag{197}$$

Ambas elecciones están conectadas mediante la transformación de gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad \theta(x) = \frac{et}{4\pi r}. \tag{198}$$

- Hallemos ahora el tensor energía-momento. Aplicando el teorema de Noether:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2, \quad F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{199}$$

que no es invariante gauge ni tampoco simétrico!

▷ Podemos simetrizarlo añadiéndole $\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$, que cumple $\partial_\mu\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu) = 0$ y además lo convierte en invariante gauge,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2 + \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu) \\ &= F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2\,, \quad \text{cuando } \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0\,. \end{aligned} \tag{200}$$

▷ Las cargas conservadas bajo transformaciones espaciotemporales son por tanto

$$E = \int \mathrm{d}^3x\ T^{00} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad \text{(energía)} \tag{201}$$

$$\mathbb{P}^i = \int \mathrm{d}^3x\ T^{0i} = \int \mathrm{d}^3x\ (\vec{E}\times\vec{B})^i \quad \text{(vector de Poynting).} \tag{202}$$

- En presencia de fuentes del campo electromagnético (cargas y corrientes) las ecuaciones de Maxwell son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + \vec{j}, \quad j^\mu \equiv (\rho, \vec{j}), \tag{203}$$

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \tag{204}$$

▷ Nótese que las dos últimas son las mismas que en ausencia de fuentes, debido a que $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = 0$ en cualquier caso. Estas ecuaciones se obtienen al minimizar la acción

$$S = \int \mathrm{d}^4x \, \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right) = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(x) \, . \tag{205}$$

- La acción es invariante gauge solo si j^μ es una corriente conservada, $\partial_\mu j^\mu = 0$, pues

$$j^\mu A_\mu \mapsto j^\mu A_\mu - j^\mu \partial_\mu \theta \tag{206}$$

y, como $\int \mathrm{d}^4x\ \partial_\mu(\theta j^\mu) = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}^4x\ j^\mu \partial_\mu \theta = -\int \mathrm{d}^4x\ \theta \partial_\mu j^\mu = 0$, tenemos que

$$\int \mathrm{d}^4x\ j^\mu A_\mu \mapsto \int \mathrm{d}^4x\ j^\mu A_\mu \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{207}$$

▷ La invariancia gauge es el principio que guía cómo deben ser las interacciones.

- Veamos cómo funciona el método aplicándolo al lagrangiano de Dirac en presencia de un campo electromagnético. El lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi \tag{208}$$

no es invariante bajo transformaciones de gauge U(1) (transformaciones de fase locales),

$$\psi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\psi, \quad \overline{\psi} \mapsto \overline{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta(x)}. \tag{209}$$

Sin embargo, el lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{210}$$

sí es invariante bajo la transformación de gauge

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \tag{211}$$

▷ Podemos conseguir un lagrangiano total invariante gauge si cambiamos la derivada ∂_μ por la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu \tag{212}$$

pues entonces

$$\begin{aligned} D_\mu\psi = (\partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu + \mathrm{i}q\partial_\mu\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\psi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}(-\mathrm{i}q\partial_\mu\theta + \partial_\mu + \mathrm{i}eqA_\mu + \mathrm{i}q\partial_\mu\theta)\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}D_\mu\psi \end{aligned} \tag{213}$$

y el lagrangiano resultante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eqA_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{214}$$

es invariante gauge.

- De esta forma, hemos introducido una interacción de la forma $j^\mu A_\mu$ (acoplamiento mínimo) entre la corriente fermiónica,

$$j^\mu = eq\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{215}$$

y el campo electromagnético, que nos permite restaurar la simetría local.

▷ Nótese que j^μ es una corriente conservada debida a la invariancia global de $\mathcal{L}_D$ bajo transformaciones de fase U(1). Por tanto, la carga conservada es:

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\ j^0(x) = eq\int \mathrm{d}^3x\ \overline{\psi}\gamma^0\psi = eq\int \mathrm{d}^3x\ \psi^\dagger\psi \quad \text{(carga eléctrica).} \tag{216}$$

▷ Otras interacciones invariantes gauge son posibles, pero involucran términos de interacción con dimensión canónica mayor que cuatro, que deben ir multiplicados por constantes con dimensiones de masa elevada a una potencia negativa.

Por ejemplo, la interacción dipolar magnética: $\mathcal{L} = a\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \quad [a] = M^{-1}$.

Tales acoplamientos surgirán de forma natural al cuantizar la teoría y son correcciones al acoplamiento mínimo de siguiente orden en TP.

- En general si $\{T^a\}$ son los generadores del grupo de simetrías gauge, $\{W^a_\mu(x)\}$ los bosones de gauge asociados a cada generador y $\{\theta^a(x)\}$ los parámetros de la transformación, es fácil comprobar que si los campos se transforman

$$\text{(irrep fundamental)} \qquad \psi \mapsto U\psi, \quad U = \exp\{-\mathrm{i}T^a\theta^a(x)\} \tag{217}$$

$$\text{(irrep adjunta)} \qquad \widetilde{W}_\mu \mapsto U\widetilde{W}_\mu U^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \quad \widetilde{W}_\mu \equiv T^a W^a_\mu, \tag{218}$$

introduciendo la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\widetilde{W}_\mu \tag{219}$$

se tiene que

$$D_\mu\psi \mapsto UD_\mu\psi \tag{220}$$

y el lagrangiano resultante

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\psi \tag{221}$$

queda invariante.

▷ Para un grupo de simetrías no abeliano, el lagrangiano invariante de los campos de gauge (210) debe generalizarse e incluye, además de los términos cinéticos, autointeracciones cúbicas y cuárticas fijadas por las constantes de estructura:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\widetilde{W}_{\mu\nu}\widetilde{W}^{\mu\nu}\right\} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a,\mu\nu} \tag{222}$$

$$= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{cubic}} + \mathcal{L}_{\text{quartic}} \tag{223}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu)(\partial^\mu W^{a,\nu} - \partial^\nu W^{a,\mu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{cubic}} = \frac{1}{2}g f^{abc}\,(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu)W^{b,\mu}W^{c,\nu} \tag{224}$$

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4}g^2 f^{abe}f^{cde}\,W^a_\mu W^b_\nu W^{c,\mu}W^{d,\nu} \tag{225}$$

y

$$\widetilde{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \widetilde{W}_\mu - \partial_\nu \widetilde{W}_\mu + \mathrm{i}g[\widetilde{W}_\mu, \widetilde{W}_\nu] \mapsto U\widetilde{W}_{\mu\nu}U^\dagger \tag{226}$$

$$\Rightarrow W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\, f^{abc}W^b_\mu W^c_\nu. \tag{227}$$

Campo electromagnético | Acoplamiento mínimo con la materia

▷ En el caso del grupo U(1) del electromagnetismo el único generador es un múltiplo de la identidad:

$$T = q \text{ (la carga del campo en unidades del acoplamiento } g = e\text{).}$$

En adelante la llamaremos Q_f, pues será la carga eléctrica (en unidades de e) del fermión f que aniquila el campo cuántico ψ.