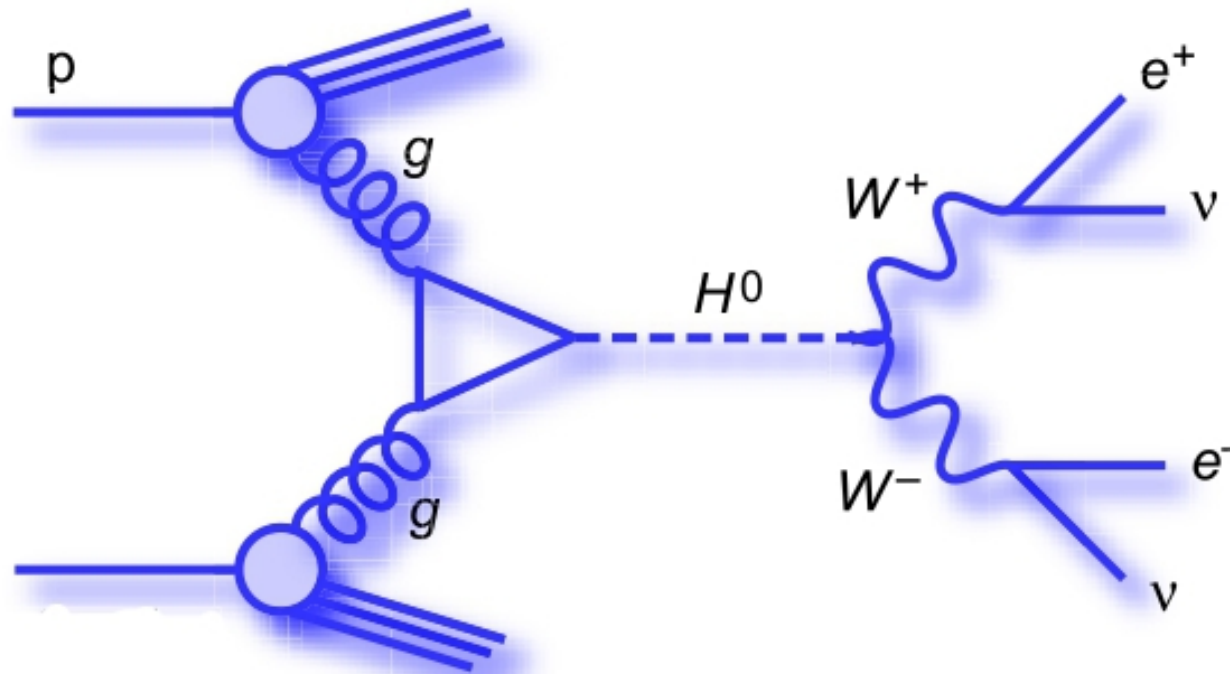


# Teoría de Campos y Partículas

José Ignacio Illana [jillana@ugr.es]

*Departamento de Física Teórica y del Cosmos  
Universidad de Granada*



[<http://www.ugr.es/~jillana/Docencia/TCP/>]

# Programa

1. Introducción. Simetrías de Lorentz y Poincaré
2. Teoría clásica de campos
3. Cuantización de campos libres
4. Interacciones de campos y diagramas de Feynman
5. Secciones eficaces y anchuras de desintegración
6. Cuantización del campo electromagnético.  
Procesos elementales en Electrodinámica Cuántica (QED)
7. Introducción a las correcciones radiativas. Fundamentos de renormalización
8. El Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles y fuertes.  
El bosón de Higgs

# 1. Introducción

- La **teoría cuántica de campos** (TQC) surge al combinar
  - relatividad especial y
  - mecánica cuántica

[Es posible escribir una versión relativista de la ecuación de Schrödinger. De hecho fue él el primero en encontrar lo que hoy se conoce como ecuación de Klein-Gordon, pero la desechó por no describir correctamente la estructura fina del átomo de hidrógeno, así que se quedó con su límite no relativista]

- Sin embargo, las **ecuaciones de ondas** (sean o no relativistas) **no pueden explicar procesos en los que cambia el número de partículas.**

Además las ecuaciones de ondas relativistas sufren *patologías*:

- existencia de “densidades” de **probabilidad negativa**
- existencia de soluciones de **energía negativa**
- **violación de causalidad**  
(probabilidad no nula de propagar partículas fuera del cono de luz)

- La TQC:
  - proporciona marco natural para manejar un **número arbitrario de partículas** (estados del espacio de Fock)
  - da sentido a las soluciones de **energía negativa** (**antipartículas**)
  - resuelve el problema de la **causalidad** (la propagación de un partícula fuera del cono de luz es indistinguible de la de su antipartícula viajando en dirección opuesta y sus amplitudes se cancelan)
  - explica la **relación entre espín y estadística** (consecuencia de la cuantización)
  - permite calcular observables con **elevadísima precisión** y de acuerdo con el experimento (secciones eficaces, vidas medias, momentos magnéticos, ...)

$$\left. \begin{array}{l} \text{exp: } g_e/2 = 1.001\,159\,652\,182\,032\,(720) \\ \text{teo: QED (5 loops!)} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha^{-1} = 137.035\,999\,150\,(33)$$

- Usaremos **unidades naturales**  $\hbar = c = 1$ . Entonces las siguientes magnitudes tienen las mismas dimensiones:  $[\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}$
- Una relación muy útil es:

$$\hbar c = 197.326\,9631(49) \text{ MeV fm}$$

$$\hbar c \simeq 200 \text{ MeV fm} \Rightarrow 25 \text{ GeV}^{-2} \simeq 10^{-30} \text{ m}^2 = 10 \text{ mbarn} \quad (1)$$

1 fm =  $10^{-15}$  m (un Fermi, del orden del radio del protón), 1 barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>

- Nuestra **convención de signos** para la **métrica de Minkowski** es

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- Usaremos la **convención de Einstein** de suma sobre índices repetidos:

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3, \quad (3)$$

donde se han usado índices **contravariantes**  $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$  y **covariantes**  $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -\vec{A}) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ .  
En particular,  $x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x})$  y

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (4)$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2, \quad \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (5)$$

Los índices griegos ( $\mu, \nu, \dots$ ) toman valores 0,1,2,3. Reservaremos índices latinos ( $i, j, \dots$ ) para las componentes espaciales. El cuadrimomento es entonces

$$p^\mu = i\partial^\mu = (p^0, \vec{p}) = (E, \vec{p}), \quad p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \quad (6)$$

$$p^0 = i\partial^0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p^k = i\partial^k = i\frac{\partial}{\partial x_k} = -i\frac{\partial}{\partial x^k} = -i\partial_k \equiv -i\nabla^k. \quad (7)$$

- Usaremos el **sistema de unidades de Heaviside-Lorentz** para el electromagnetismo, en el que la constante de estructura fina es

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = 1/137.035\,999\,074 \quad (44) . \quad (8)$$

Así la unidad de carga eléctrica si  $\hbar = c = 1$  es  $e = \sqrt{4\pi\alpha}$  (adimensional), las ecuaciones de Maxwell se escriben

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho , \quad \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \quad (9)$$

$$[\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0]$$

y el potencial de Coulomb entre dos cargas  $Q_1 = eq_1$  y  $Q_2 = eq_2$  es

$$V(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r} = q_1 q_2 \frac{\alpha}{r} . \quad (10)$$



# Grupos de Lie

- Un **grupo** es un conjunto de elementos  $G$ , no necesariamente numerable, con una ley de composición interna que satisface las propiedades asociativa, existencia de un elemento neutro  $e$ , y existencia del elemento inverso  $a^{-1}$  de cada elemento  $a$ .
- Los elementos  $g$  de un **grupo de Lie** dependen de forma continua y diferenciable de un conjunto de **parámetros reales**  $\theta_a$ ,  $a = 1, \dots, N$ , es decir  $g(\theta)$ , siendo:

$$g(0) = e \quad (\text{el elemento neutro})$$
$$g^{-1}(\theta) = g(-\theta) \quad (\text{elemento inverso}).$$

$N$  es la **dimensión del grupo**.

- Un **subgrupo** es un subconjunto de  $G$  que también es grupo.  
Un **subgrupo invariante**  $H$  es tal que  $\forall h \in H$  y  $\forall g \in G$ ,  $ghg^{-1} \in H$ .  
Un **grupo simple** es aquél que no tiene ningún subgrupo invariante **propio**.<sup>a</sup>  
Por ejemplo  $SU(n)$  es simple y  $U(n)$  no es simple.

---

<sup>a</sup>Un subgrupo propio es uno no trivial: ni el formado solo por el elemento neutro, ni todo  $G$ .

# Grupos de Lie

- Una **representación**  $R$  asigna a cada elemento  $g$  un operador lineal  $D_R(g)$  de un espacio vectorial,  $g \mapsto D_R(g)$ , tal que:
  - (i)  $D_R(e) = \mathbb{1}$  (operador identidad),
  - (ii)  $D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1g_2)$ .

En un espacio vectorial de dimensión finita,  $g$  está representado por una matriz  $n \times n$ ,  $[D_R(g)]^i_j$ , que induce una transformación lineal del espacio vectorial cuya actuación sobre la base  $(\phi^1, \dots, \phi^n)$  viene dada por  $\phi^i \mapsto [D_R(g)]^i_j \phi^j$ .

- Dos representaciones  $R$  y  $R'$  son **equivalentes** si  $\exists S$  tal que  $D_R(g) = S^{-1}D_{R'}(g)S$ ,  $\forall g$ . Es decir, están relacionadas mediante un cambio de base.
- La representación  $R$  es **reducible** si deja invariante un subespacio no trivial. De lo contrario es **irreducible** (**irrep**). Se dice que  $R$  es **completamente reducible** si  $\forall g$ ,  $D_R(g)$  puede escribirse a bloques, es decir, si puede elegirse una base  $\{\phi^i\}$  de forma que existan subespacios de vectores que no se mezclan con otros bajo la acción del grupo. En ese caso,  $R$  puede escribirse como **suma directa** de varias irreps:  $D_R = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots$

# Grupos de Lie

- Si un elemento del grupo de Lie es infinitesimalmente próximo a la identidad entonces  $D_R(\delta\theta) = \mathbb{1} - i\delta\theta_a T_R^a$ . Los operadores  $T_R^a = i\partial D_R / \partial\theta_a|_{\theta=0}$ , con  $a = 1, \dots, N$ , son los **generadores del grupo** en la representación  $R$ . El **número de generadores** es la **dimensión del grupo**. Para una transformación arbitraria:  $D_R(\theta) = \exp\{-i\theta_a T_R^a\}$ . Nótese que si  $D_R$  es una **representación unitaria** (el inverso de cada elemento es su adjunto) entonces los generadores son hermíticos. Además toda representación unitaria es completamente reducible. Recordemos que en física los **observables** son **operadores hermíticos**.
- Los generadores satisfacen el **álgebra de Lie**:  $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$ , donde  $f^{abc}$  son las **constantes de estructura** del grupo, que son independientes de la representación. Para hallar la representación del grupo **basta con encontrar las representaciones del álgebra**.
- Si  $G$  es **abeliano**,  $[T^a, T^b] = 0$  y  $\exp\{-i\alpha^a T^a\} \exp\{-i\beta^b T^b\} = \exp\{-i(\alpha^c + \beta^c) T^c\}$ . Las irreps de un grupo abeliano son unidimensionales.

# Grupos de Lie

- Los **operadores de Casimir** son aquéllos que conmutan con todos los generadores. Son múltiplos de la identidad y la constante de proporcionalidad  $\lambda$  sirve para etiquetar las irreps.

Por ejemplo, **SU(2)** (grupo de las rotaciones en tres dimensiones) tiene tres generadores, los operadores momento angular  $J^k$  con  $k = 1, 2, 3$ , que satisfacen el álgebra de Lie  $[J^k, J^\ell] = i\epsilon^{k\ell m} J^m$  **tiene un operador de Casimir:**

$\vec{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 = \lambda \mathbb{1}$ , con  $\lambda = j(j+1)$  y  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  etiquetando las irreps (cuya dimensión es  $2j+1$ ).

El tensor  $\epsilon$  es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita,

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación par de } (123), \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación impar de } (123), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (11)$$

# Grupos de Lie

- Hablamos de **grupo compacto** si su variedad paramétrica es compacta. Ejemplo: el grupo de las rotaciones es compacto (el de las traslaciones no lo es).
- Si un grupo es compacto el parámetro que etiqueta cada irrep toma valores discretos (e.g. el espín  $j$  del grupo de las rotaciones) y si no es compacto toma valores continuos (e.g. el momento  $p$  de las traslaciones espaciales).
- Las reps de dimensión finita de un grupo compacto son unitarias. Las reps de dimensión finita de un grupo no compacto simple no son unitarias.<sup>a</sup>
- El **grupo de Lorentz**, que repasaremos a continuación, es un grupo de Lie **simple y no compacto**. Sus representaciones de dimensión finita no son unitarias y sus representaciones unitarias son de dimensión infinita (espacio de Hilbert de una partícula).

---

<sup>a</sup>Pero si no es simple pueden ser unitarias o no. Ejemplo de grupo no compacto no simple con representaciones de dimensión finita unitarias son las traslaciones espaciales en una dimensión; y con representaciones no unitarias son los **boosts** a lo largo de una dirección dada. Nótese que éste último es un subgrupo no invariante, no simple, del grupo de Lorentz, que es simple.

# Grupo de Lorentz

- Se define como el grupo de las transformaciones lineales de coordenadas

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad x^\mu = (t, x, y, z) \quad (12)$$

que dejan invariante la cantidad

$$x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (13)$$

Es por tanto isomorfo al grupo  $O(1, 3)$ . Formalmente,

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\rho x^\rho) (\Lambda^\nu_\sigma x^\sigma) = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \quad (\forall x) \quad (14)$$

$$\Rightarrow g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = (\Lambda^T)_\rho^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma \quad (15)$$

$$\Rightarrow g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (16)$$

## Grupo de Lorentz

- Por otro lado, mirando la componente 00 de (15),

$$1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \Lambda^0_0 \geq 1 \\ \Lambda^0_0 \leq -1 \end{cases} \quad (17)$$

y a partir de (16),

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (18)$$

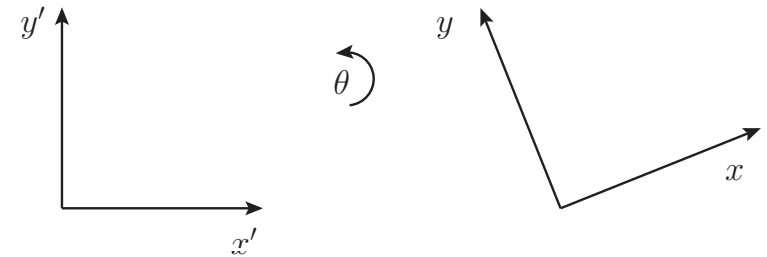
Así que podemos distinguir cuatro tipos de transformaciones de Lorentz:

# Grupo de Lorentz

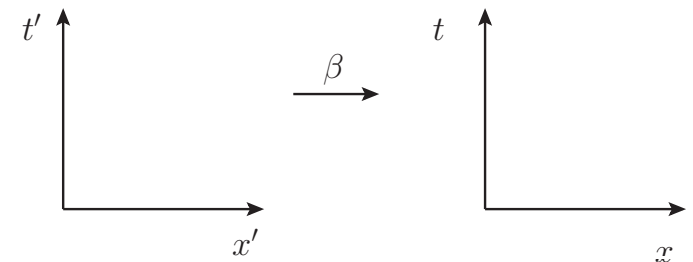
## 1. Ortocronas ( $\Lambda^0_0 \geq 1$ ) propias ( $\det \Lambda = +1$ )

Forman grupo. Es isomorfo a  $SO(1,3)$ . En adelante llamaremos *grupo de Lorentz* a este grupo. Sus elementos son transformaciones continuas (**grupo de Lie**) que se pueden conectar con la identidad mediante sucesivas transformaciones infinitesimales. Sus elementos son:

- **rotaciones** en las tres dimensiones espaciales:



- **boosts** (transformaciones de Lorentz puras):



Las demás transformaciones obviamente no forman grupo y se pueden escribir como producto de inversiones (transformaciones discretas) y transformaciones de Lorentz ortocronas propias  $\Lambda_P$ . Son las siguientes.



## Grupo de Lorentz

2. **No ortocronas** ( $\Lambda^0_0 \leq -1$ ) **propias** ( $\det \Lambda = +1$ )

Transformaciones tipo:

$$\Lambda_P \times \{\text{diag}(-, -, -, -), \text{diag}(-, -, +, +), \text{diag}(-, +, -, +), \text{diag}(-, +, +, -)\}.$$

Incluye a las inversiones totales,  $\text{diag}(-, -, -, -)$ .

3. **Ortocronas** ( $\Lambda^0_0 \geq 1$ ) **impropias** ( $\det \Lambda = -1$ )

Transformaciones tipo:

$$\Lambda_P \times \{\text{diag}(+, +, +, -), \text{diag}(+, +, -, +), \text{diag}(+, -, +, +), \text{diag}(+, -, -, -)\}.$$

Incluye a las inversiones espaciales,  $\text{diag}(+, -, -, -)$ .

4. **No ortocronas** ( $\Lambda^0_0 \leq -1$ ) **impropias** ( $\det \Lambda = -1$ )

Transformaciones tipo:

$$\Lambda_P \times \{\text{diag}(-, -, -, +), \text{diag}(-, -, +, -), \text{diag}(-, +, -, -), \text{diag}(-, +, +, +)\}.$$

Incluye a las inversiones temporales,  $\text{diag}(-, +, +, +)$ .

## Grupo de Lorentz

- Veamos cuántos parámetros tiene el grupo de Lorentz (de transformaciones ortocronas propias), tomando una transformación infinitesimal arbitraria  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ , la ecuación (15) implica:

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\mu\nu} (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho) (\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) \\ &= g_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \mathcal{O}(\omega^2) \Rightarrow \omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (19)$$

Por tanto,  $\omega$  es antisimétrica y tiene 6 parámetros independientes.

Cualquier  $\Lambda$  puede escribirse como producto de **rotaciones** ( $R$ ), que se pueden parametrizar con 3 ángulos  $\theta \in [0, 2\pi]$  en torno a ejes  $x, y, z$  en sentido dextrógiro, y **boosts** ( $L$ ), que se pueden parametrizar especificando las 3 componentes de la velocidad  $\beta \in (-1, 1)$  a lo largo de los ejes  $x, y, z$ .

$$\Lambda = RL$$

# Grupo de Lorentz

- En particular,

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & 0 & s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}, R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$L_x = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (21)$$

con  $c_\theta = \cos \theta$ ,  $s_\theta = \sin \theta$  y  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ .

## Grupo de Lorentz

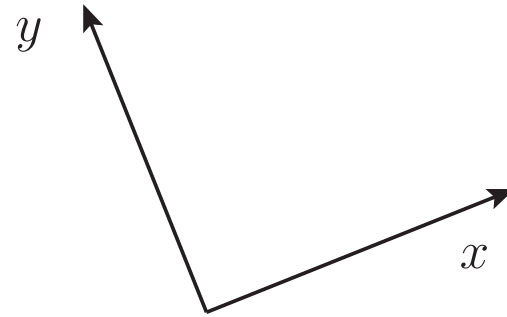
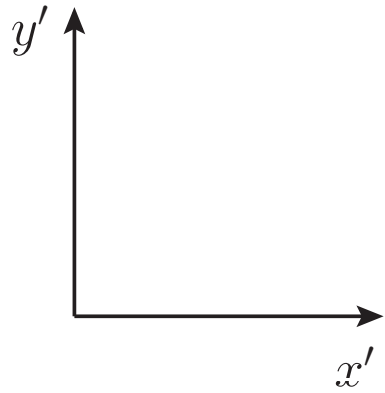
- Conviene sustituir el parámetro de velocidad  $\beta$  por la **rapidity**  $\eta \in (-\infty, \infty)$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (22)$$

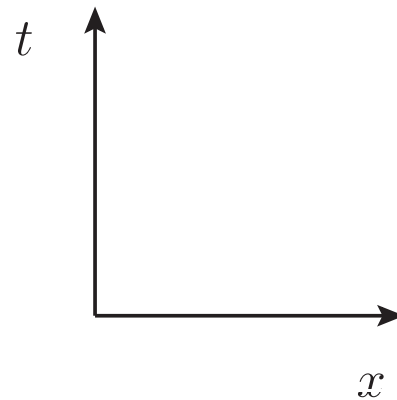
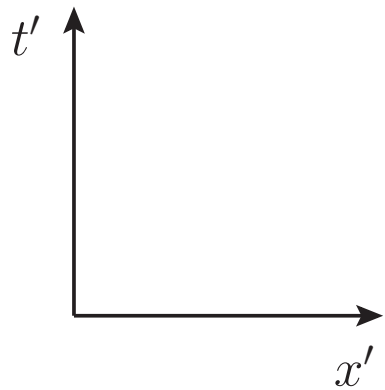
que es un parámetro **aditivo**, como lo es también  $\theta$ . Es decir, si hacemos dos **boosts** con **rapidities**  $\eta_A$  y  $\eta_B$  a lo largo de una **misma dirección**  $\hat{n}$  entonces  $L_{\hat{n}}(\eta_A)L_{\hat{n}}(\eta_B) = L_{\hat{n}}(\eta_A + \eta_B)$ . Esto es fácil de comprobar a partir de las propiedades de las funciones hiperbólicas, pues

$$\gamma = \cosh \eta, \quad \gamma\beta = \sinh \eta. \quad (23)$$

# Grupo de Lorentz



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \cosh \eta, \quad \gamma\beta = \sinh \eta$$

# Grupo de Lorentz

- Hallemos el álgebra de los generadores tomando transformaciones infinitesimales:

$$R_x(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\delta\theta \\ 0 & 0 & \delta\theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\theta J^1 \Rightarrow J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$R_y(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\delta\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\theta J^2 \Rightarrow J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$R_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta & 0 \\ 0 & \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\theta J^3 \Rightarrow J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

# Grupo de Lorentz

$$L_x(\delta\eta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\eta & 0 & 0 \\ \delta\eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\eta K^1 \Rightarrow K^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$L_y(\delta\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \delta\eta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\eta K^2 \Rightarrow K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$L_z(\delta\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta\eta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\eta K^3 \Rightarrow K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

# Grupo de Lorentz

- Nótese que, como la variedad paramétrica de los **boosts** no es compacta, sus generadores no son hermíticos ( $(K^m)^\dagger = -K^m$ ).
- El álgebra de Lie es

$$[J^k, J^\ell] = i\epsilon^{klm} J^m, \quad [K^k, K^\ell] = -i\epsilon^{klm} J^m, \quad [J^k, K^\ell] = i\epsilon^{klm} K^m \quad (k, \ell, m \in \{1, 2, 3\}) \quad (30)$$

- Vemos que las rotaciones cierran álgebra, pues SU(2) es un subgrupo del grupo de Lorentz. Sin embargo, los **boosts** no son un subgrupo.
- Conviene reescribir estos 6 generadores como

$$A^m = \frac{1}{2}(J^m + iK^m), \quad B^m = \frac{1}{2}(J^m - iK^m). \quad (31)$$

$A^m$  y  $B^m$  son hermíticos y verifican el álgebra de Lie:

$$[A^k, A^\ell] = i\epsilon^{klm} A^m, \quad [B^k, B^\ell] = i\epsilon^{klm} B^m, \quad [A^k, B^\ell] = 0. \quad (32)$$



# Grupo de Lorentz

- Es decir, el grupo de Lorentz es localmente isomorfo a  $SU(2) \times SU(2)$  pues tienen el mismo álgebra.
- ▷ Esto nos permite etiquetar sus irreps como  $(j_1, j_2)$ , de dimensión  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .
- ▷ Nótese que hemos encontrado irreps del grupo de Lorentz de dimensión finita, pero no son unitarias, porque no es compacto:

$$\Lambda = \exp\{-i(\theta^m J^m + \eta^m K^m)\} \equiv \exp\{-i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K})\}, \quad (33)$$

$$\Lambda^{-1} = \exp\{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K})\} \neq \Lambda^\dagger = \exp\{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} - \vec{\eta} \cdot \vec{K})\}. \quad (34)$$

## Grupo de Lorentz

- Otra forma de escribir los generadores del grupo de Lorentz es la siguiente. Tomamos como parámetros los 6 elementos independientes de una matriz antisimétrica  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Los generadores son entonces las 6 componentes independientes del operador antisimétrico  $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ ,

$$\Lambda = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right\} \quad (35)$$

(el factor  $\frac{1}{2}$  compensa el hecho de que sumamos  $\forall \mu, \nu$  en vez de  $\forall \mu < \nu$ ) con

$$J^k = \frac{1}{2} \epsilon^{klm} J^{lm} \Rightarrow \begin{cases} J^1 = J^{23} = -J^{32} \\ J^2 = J^{31} = -J^{13} \\ J^3 = J^{12} = -J^{21} \end{cases} \quad (36)$$

$$K^k = J^{0k} = -J^{k0}. \quad (37)$$

# Grupo de Lorentz

- Los parámetros se relacionan con **ángulos** y **rapidities** mediante

$$\theta^k = \frac{1}{2} \epsilon^{klm} \omega^{\ell m} \Rightarrow \begin{cases} \theta^1 = \omega^{23} = -\omega^{32} = \omega_{23} = -\omega_{32} \\ \theta^2 = \omega^{31} = -\omega^{13} = \omega_{31} = -\omega_{13} \\ \theta^3 = \omega^{12} = -\omega^{21} = \omega_{12} = -\omega_{21} \end{cases} \quad (38)$$

$$\eta^k = \omega^{0k} = -\omega^{k0} = -\omega_{0k} = \omega_{k0}. \quad (39)$$

- Los generadores pueden escribirse de forma covariante como

$$(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(g^{\mu\rho} \delta_\sigma^\nu - g^{\nu\rho} \delta_\sigma^\mu). \quad (40)$$

▷ El álgebra de Lie de estos generadores es:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (41)$$

- Lo que acabamos de ver es la representación en cuatro dimensiones del grupo de Lorentz, que nos ha servido para definir el grupo. Podemos plantearnos si es irreducible (lo es) y si es su representación no trivial de dimensión más pequeña (veremos que no lo es). Se llama **representación vectorial** del grupo de Lorentz:

$$4: \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \left[ \exp\{-i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K})\} \right]^\mu{}_\nu = \left[ \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right\} \right]^\mu{}_\nu \quad (42)$$

Un cuadrivector  $V^\mu$  (ó  $V_\mu$ ) es un vector del espacio vectorial invariante e irreducible sobre el que actúa  $\Lambda$ ,

$$V^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu, \quad V_\mu \mapsto \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu. \quad (43)$$

Nótese que  $\Lambda^\mu{}_\nu$  y  $\Lambda_\mu{}^\nu$  son representaciones equivalentes, pues están relacionadas mediante una transformación de semejanza  $S = g_{\mu\nu}$ ,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} \Lambda_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu}. \quad (44)$$

Con frecuencia se identifica el término representación con el de espacio de representación. Así, diremos que  $V^\mu$  y  $V_\mu$  son irreps equivalentes.

- $V_\mu$  es el vector asociado al  $V^\mu$  en el espacio dual, así que la matriz  $\Lambda_\mu^\nu$  es la inversa de  $\Lambda^\mu_\nu$ . En efecto, usando (15):

$$\Lambda_\tau^\nu \Lambda^\mu_\nu = \Lambda_\tau^\nu g^{\mu\rho} \Lambda_\rho^\sigma g_{\sigma\nu} = \Lambda_\tau^\nu g_{\nu\sigma} \Lambda_\rho^\sigma g^{\mu\rho} = g_{\tau\rho} g^{\mu\rho} = \delta_\tau^\mu. \quad (45)$$

- Pueden construirse representaciones de dimensiones mayores mediante el producto tensorial  $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \dots$ . Se llaman **representaciones tensoriales** y sus vectores son **tensores** con varios índices (su número se llama **rango**). Así, un tensor de dos índices (contravariantes)  $T^{\mu\nu}$  se transforma como:

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} : \quad T^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} T^{\mu'\nu'}. \quad (46)$$

La representación producto tensorial es reducible. En particular, si  $T^{\mu\nu}$  es simétrico (antisimétrico) su transformado también es simétrico (antisimétrico). Además, su traza es invariante (**escalar**).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>En efecto,  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma} = T$ , donde se ha usado (15).

- De hecho, los tensores de rango dos pueden escribirse como suma directa de subespacios invariantes e irreducibles:

$$4 \otimes 4 = 1 \oplus 6 \oplus 9, \quad (47)$$

de modo que cualquier tensor de rango dos puede descomponerse en

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}T + A^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (48)$$

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu \quad (\text{traza}), \quad (49)$$

$$A^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (\text{parte antisimétrica}), \quad (50)$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}T \quad (\text{parte simétrica de traza nula}). \quad (51)$$

Por el mismo razonamiento de antes,  $T^{\mu\nu}$ ,  $T^\mu{}_\nu$ ,  $T_\mu{}^\nu$  y  $T_{\mu\nu}$  son representaciones (reducibles) equivalentes del grupo de Lorentz. Un ejemplo de tensor de rango dos es el tensor  $g_{\mu\nu}$  que además es invariante, por definición de transformación de Lorentz (15).

- Una irrep importante de cualquier grupo de Lie es la **representación adjunta**, cuya dimensión es igual al número de generadores, que se construye a partir de las constantes de estructura,

$$(T_{\text{adj}}^a)^{bc} = -if^{abc}. \quad (52)$$

En el caso del grupo de Lorentz, que es localmente isomorfo a  $SU(2) \times SU(2)$ , la representación adjunta es precisamente la de los tensores antisimétricos  $A^\rho_\sigma$ , que son combinaciones lineales de la base de generadores  $(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma$  de la ecuación (40). (Las constantes de estructura de  $SU(n)$  son antisimétricas en los tres índices). Puede comprobarse que, en general, las constantes de estructura satisfacen el álgebra de Lie del grupo usando la identidad de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (53)$$

sustituyendo  $A = T^a$ ,  $B = T^b$ ,  $C = T^c$ , lo que implica

$$f^{abd} f^{cde} + f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} = 0. \quad (54)$$

- Es interesante ver cómo se transforman las irreps del grupo de Lorentz bajo el **subgrupo de las rotaciones**. En general, son representaciones reducibles que se pueden escribir como suma directa de varias irreps del grupo de las rotaciones, etiquetadas cada una de ellas por un valor del espín  $j$  (recordemos que su dimensión es  $2j + 1$ ). Así,

$$V^\mu = (V^0, \vec{V}) \in \mathbf{4} \text{ bajo el grupo de Lorentz,} \quad (55)$$

$$V^\mu \in 0 \oplus 1 \text{ etiquetadas por } j = 0, 1 \text{ bajo el grupo de las rotaciones,} \quad (56)$$

i.e.  $V^0$  es un escalar bajo rotaciones (espín 0) y  $\vec{V}$  un 3-vector (espín 1). Por otro lado,

$$T^{\mu\nu} \in \mathbf{4} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{9} \text{ bajo Lorentz} \quad (57)$$

$$= (0 \oplus 1) \otimes (0 \oplus 1) = 0 \oplus (1 \oplus 1) \oplus (0 \oplus 1 \oplus 2) \text{ bajo rotaciones,} \quad (58)$$

donde se ha usado que el producto directo de irreps del grupo de las rotaciones es

$$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2 + 1| \oplus \dots \oplus |j_1 + j_2|. \quad (59)$$



■ De modo que,

$$1: \quad T \in 0 \quad (\text{es también un escalar bajo rotaciones}) \quad (60)$$

$$6: \quad A^{\mu\nu} \in 1 \oplus 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{0i} \\ \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A^{jk} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{dos 3-vectores indptes bajo rotaciones} \\ \text{que se mezclan bajo Lorentz}) \end{array} \quad (61)$$

Por ejemplo, el tensor electromagnético  $F^{\mu\nu}$  contiene a los 3-vectores campo eléctrico  $E^i = -F^{0i}$  y campo magnético  $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F^{jk}$ .

Otro ejemplo son los propios generadores (36,37).

$$9: \quad S^{\mu\nu} \in 0 \oplus 1 \oplus 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} S^{00} \\ S^{0i} \\ S^{ij} \text{ con } \sum_i S^{ii} = -S^{00} \end{array} \right. \quad (62)$$

En general, un tensor  $T^{\mu\nu\rho\dots}$  con  $N$  índices contiene espines  $j = 0, 1, \dots, N$ .

- Hemos visto que la representación vectorial y todas las representaciones tensoriales del grupo de Lorentz contienen representaciones de espín  $j$  entero ( $0, 1, \dots$ ) bajo el grupo de las rotaciones. Estrictamente, las representaciones de  $j$  semientero ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) no son válidas, pues para ellas  $R^j(0) \neq R^j(2\pi) = -\mathbb{1}$ . Sin embargo, como los observables en mecánica cuántica son cuadráticos en la función de onda, un signo menos global es admisible y podemos aceptarlas. El grupo de las rotaciones físicamente relevante no es entonces  $SO(3)$  sino  $SU(2)$  (ambos tienen el mismo álgebra y, por tanto, las mismas irreps). La representación fundamental de  $SU(2)$  (grupo de las matrices  $2 \times 2$  unitarias de determinante unidad) tiene  $j = \frac{1}{2}$  (dimensión 2) y se llama **representación espinorial** o **espinor**. Sus generadores son las matrices de Pauli:

$$J^k = \frac{1}{2}\sigma^k, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

- Todas las representaciones de  $SU(2)$  pueden obtenerse a partir del producto tensorial de espinores. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1. \quad (64)$$

- Del mismo modo, las representaciones  $(j_1, j_2)$  del grupo de Lorentz pueden construirse a partir del producto tensorial de las **representaciones espinoriales**  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$ , que tienen dimensión  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = 2$ . Sus vectores se llaman **espinores de Weyl**  $\psi_L \in (\frac{1}{2}, 0)$ ,  $\psi_R \in (0, \frac{1}{2})$  y tienen dos componentes. Por razones que veremos pronto se denominan **left-handed** y **right-handed**.

- Hallemos la forma explícita de las **representaciones espinoriales**  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$ :

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}), \quad \vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \Rightarrow \vec{J} = \vec{A} + \vec{B}, \quad \vec{K} = -i(\vec{A} - \vec{B}) \quad (65)$$

y recordando (33) tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \psi_L : \quad \vec{A} &= \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \\ \Lambda_L &= \exp \left\{ (-i\vec{\theta} - \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \psi_R : \quad \vec{A} &= 0, \quad \vec{B} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2} \\ \Lambda_R &= \exp \left\{ (-i\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

- Nótese que  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$  son **representaciones conjugadas**:

$$\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 = \Lambda_R. \quad (68)$$

Para comprobarlo, úsese que  $\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -\sigma^{i*}$ . Podemos entonces definir el **espinor conjugado** de  $\psi_L$ , que se transforma como un  $\psi_R$ , del siguiente modo:

$$\psi_L^c \equiv i\sigma^2 \psi_L^* \in (0, \frac{1}{2}) \quad (\text{se introduce } i \text{ por convenio}) \quad (69)$$

pues  $\sigma^2 \psi_L^* \mapsto \sigma^2 (\Lambda_L \psi_L)^* = \sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R (\sigma^2 \psi_L^*)$ .

- Entonces tenemos que definir **consistentemente** el conjugado de  $\psi_R$ , que se transforma como un  $\psi_L$  del siguiente modo, usando  $\sigma^{2*} = -\sigma^2$ ,

$$\psi_R^c \equiv -i\sigma^2 \psi_R^* \in (\frac{1}{2}, 0). \quad (70)$$

- Es importante notar que las **representaciones espinoriales** son **complejas**, ya que

$$\psi_L \mapsto \exp \left\{ (-i\vec{\theta} - \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \psi_L, \quad (71)$$

$$\psi_R \mapsto \exp \left\{ (-i\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \psi_R, \quad (72)$$

de modo que, aunque  $\psi_L$  y  $\psi_R$  sean reales en un sistema de referencia no lo serán en otro.

- Sin embargo, en la **representación vectorial** y sus **representaciones tensoriales de rango superior** se puede imponer la condición de ser **reales**,  $V_\mu^* = V_\mu$ ,  $T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu}$ , etc., que es consistente para cualquier sistema de referencia pues  $\Lambda^\mu_\nu$  es real.

- Por cierto, la representación espinorial  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  tiene dimensión compleja 4. Sus vectores están compuestos por dos espinores de Weyl independientes  $((\psi_L)_\alpha, (\tilde{\zeta}_R)_\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ . Puede verse que

$$\tilde{\zeta}_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \quad \text{y} \quad \tilde{\zeta}_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L$$

se transforman como cuadvectores contravariantes donde

$$\tilde{\zeta}_L \equiv -i\sigma^2 \tilde{\zeta}_R^*, \quad \psi_R \equiv i\sigma^2 \psi_L^*, \quad \sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma}).$$

- Un campo es una función de las coordenadas con propiedades de transformación bien definidas bajo el grupo de Lorentz. En general, si las coordenadas se transforman

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\text{infinitesimalmente: } x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu) \quad (73)$$

un campo  $\phi(x)$  (que puede tener o no índices Lorentz u otros) se transforma

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x'). \quad (74)$$



- Nuestro objetivo es construir **teorías de campos invariantes Lorentz**. Para hallar las representaciones del grupo de Lorentz en este espacio de funciones tenemos que comparar  $\phi(x)$  con su **transformación infinitesimal**  $\phi'(x) = \phi'(x' - \delta x)$ :

$$\begin{aligned}
 \delta\phi(x) &\equiv \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x' - \delta x) - \phi(x) \\
 &= \phi'(x') - \delta x^\rho \partial_\rho \phi(x) - \phi(x) \\
 &= \phi'(x') - \phi(x) + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho \phi(x) \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J_\phi^{\mu\nu} \phi(x),
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

donde  $J_\phi^{\mu\nu}$  son los generadores de la **representación infinito-dimensional** del grupo de Lorentz sobre el campo  $\phi$ . En el penúltimo paso hemos aproximado  $\partial_\rho \phi'(x)$  por  $\partial_\rho \phi(x)$ , pues difieren a siguiente orden en  $\delta x$ , y en el último hemos escrito

$$\delta x^\rho = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma, \quad (J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(g^{\mu\rho} \delta_\sigma^\nu - g^{\nu\rho} \delta_\sigma^\mu).
 \tag{76}$$

- Bajo transformaciones de Lorentz, los **campos escalares** cumplen

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (77)$$

- Entonces, a partir de (75),

$$\delta\phi(x) = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho \phi(x) \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\phi(x) \quad (78)$$

$$\Rightarrow L^{\mu\nu} = -(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (79)$$

- Recordando que  $p^\mu = i\partial^\mu$ , vemos que los generadores son  $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ . En particular, el generador de las rotaciones es el **momento angular orbital**, como era de esperar:

$$L^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}L^{jk} = \epsilon^{ijk}x^j p^k. \quad (80)$$

- Nótese que las representaciones de dimensión infinita del grupo de Lorentz **sí** pueden ser unitarias y **ésta es unitaria** porque los  $L^{\mu\nu}$  son hermíticos.

- Bajo transformaciones de Lorentz, los **campos de Weyl** cumplen

$$\psi_L(x) \mapsto \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x), \quad \psi_R(x) \mapsto \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x). \quad (81)$$

- Entonces, a partir de (75) y centrándonos en  $\psi_L(x)$ ,

$$\begin{aligned} \delta\psi_L(x) &= (\Lambda_L - \mathbb{1})\psi_L(x) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho \psi_L(x) \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S_L^{\mu\nu}\psi_L(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi_L(x) \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_L^{\mu\nu}\psi_L(x), \end{aligned} \quad (82)$$

donde hemos aplicado (78) al segundo sumando y hemos sustituido

$$\Lambda_L - \mathbb{1} \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S_L^{\mu\nu} = -i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K}), \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (83)$$

- Por tanto, los generadores en la representación de campos de Weyl son  $J_L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S_L^{\mu\nu}$ . En particular, los generadores de las rotaciones (momento angular total) son  $J_L^i = L^i + S^i$ , que tiene **dos contribuciones**: la orbital,  $L^i = \epsilon^{ijk}x^j p^k$ , y la debida al espín,  $S^i = \frac{1}{2}\sigma^i$ .

- Los generadores de los **boosts** son  $J_L^{0k} = L^{0k} - \frac{i}{2}\sigma^k$ , que no son hermíticos, y por tanto la representación infinito-dimensional del grupo de Lorentz en campos de Weyl  $\psi_L$  **no es unitaria**.
- Del mismo modo, puede verse que para el  $\psi_R(x)$ ,

$$\delta\psi_R(x) = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}\psi_R(x), \quad J_R^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S_R^{\mu\nu}, \quad (84)$$

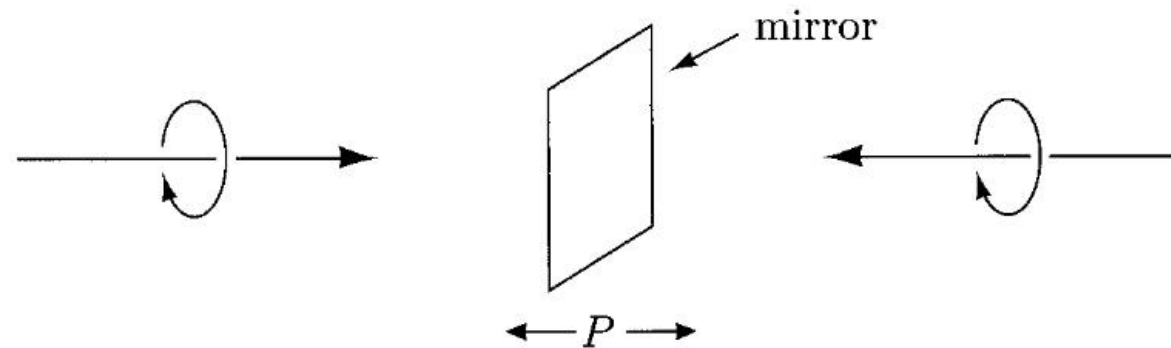
donde

$$\Lambda_R - \mathbb{1} \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S_R^{\mu\nu} = -i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K}), \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (85)$$

Sus generadores de las **rotaciones**,  $J_R^i = L^i + S^i$ , son los mismos que para el  $\psi_L(x)$ . Los generadores de los **boosts** son  $J_R^{0k} = L^{0k} + \frac{i}{2}\sigma^k$ , que no son hermíticos, y por tanto la representación infinito-dimensional del grupo de Lorentz en campos de Weyl  $\psi_R$  **no es unitaria** tampoco.

- Nótese que bajo una inversión de las coordenadas espaciales, que llamamos transformación de **paridad** (la hemos excluido en nuestra definición de grupo de Lorentz),

$$(t, \vec{x}) \mapsto (t, -\vec{x}) \Rightarrow \vec{\beta} \mapsto -\vec{\beta} \Rightarrow \vec{J} \mapsto \vec{J}, \quad \vec{K} \mapsto -\vec{K} \Rightarrow \vec{A} \leftrightarrow \vec{B} \quad (86)$$



- Esto significa que la representación  $(j_1, j_2)$  del grupo de Lorentz no es una representación válida si incluimos la paridad, a no ser que  $j_1 = j_2$ , pues el transformado bajo paridad de un vector de  $(j_1, j_2)$  es un vector de  $(j_2, j_1)$ . En particular, los espinores de Weyl, ya sean de  $(\frac{1}{2}, 0)$  o de  $(0, \frac{1}{2})$ , no forman subespacios invariantes bajo paridad.

- Sin embargo, podemos definir el **campo de Dirac**, de cuatro componentes complejas:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad (87)$$

que bajo transformaciones de Lorentz (ortocronas, propias),  $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ ,

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x') = \Lambda_D \psi(x), \quad \Lambda_D = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} \quad (88)$$

y bajo paridad,  $x^\mu = (t, \vec{x}) \mapsto \tilde{x}^\mu = (t, -\vec{x})$ ,

$$\psi(x) \mapsto \psi'(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \psi_R(\tilde{x}) \\ \psi_L(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \psi(\tilde{x}). \quad (89)$$

- El **conjugado de carga** de un espinor de Dirac es otro espinor de Dirac,

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \psi_R^* \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \psi^* \quad (90)$$

y, por supuesto,  $(\psi^c)^c = \psi$ . Nótese que las coordenadas  $x^\mu$  no cambian bajo conjugación de carga.

- Los campos de Dirac y no los de Weyl son los objetos básicos en las teorías de campos invariantes bajo paridad, como la QED y la QCD.

- Finalmente, un **espinor de Majorana** es un espinor de Dirac en el que  $\psi_L$  y  $\psi_R$  no son independientes sino que

$$\psi_R = \zeta i\sigma^2 \psi_L^* \Rightarrow \psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \zeta i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix}, \quad |\zeta|^2 = 1. \quad (91)$$

Tiene dos grados de libertad, como un espinor de Weyl, pero es **autoconjugado de carga**,

$$\psi_M^c = \begin{pmatrix} \zeta^* \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = \zeta^* \psi_M. \quad (92)$$



- Bajo transformaciones de Lorentz, los **campos vectoriales** cumplen

$$V^\mu(x) \mapsto V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x). \quad (93)$$

- Entonces, a partir de (75) y (78),

$$\delta V^\mu(x) = (\Lambda^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu) V^\nu(x) - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} L^{\rho\sigma} V^\mu(x) \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J_V^{\rho\sigma} V^\mu(x). \quad (94)$$

- Si escribimos, como antes,  $J_V^{\rho\sigma} = L^{\rho\sigma} + S_V^{\rho\sigma}$ , vemos que

$$\Lambda^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (S_V^{\rho\sigma})^\mu_\nu = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu \Rightarrow S_V^{\rho\sigma} = J^{\rho\sigma}. \quad (95)$$

## Grupo de Poincaré

- El **grupo de Poincaré** incluye las transformaciones de Lorentz y las traslaciones espacio-temporales,

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (96)$$

- Si tomamos una traslación infinitesimal  $a^\mu = \epsilon^\mu$ ,

$$\begin{aligned} x'^\mu &\equiv (\mathbb{1} - i\epsilon_\rho P^\rho)x^\mu \Rightarrow \delta x^\mu = \epsilon^\mu = -i\epsilon_\rho P^\rho x^\mu \\ &\Rightarrow P^\rho = i\partial^\rho. \end{aligned} \quad (97)$$

Así que los generadores de las traslaciones son las 4 componentes del **operador cuádrimomento**  $P^\mu$ . La traslación (96) se escribe, por tanto,  $\exp\{-ia_\mu P^\mu\}$ .

# Grupo de Poincaré

- El álgebra de Poincaré, escrita en forma covariante, es

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (98)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho), \quad (99)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (100)$$

- La última línea corresponde al álgebra del subgrupo de Lorentz (41). Las traslaciones son también un subgrupo. Conviene explicitar las relaciones de conmutación entre los generadores de las traslaciones y los de rotaciones y boosts:

$$[P^0, J^k] = 0, \quad (101)$$

$$[P^k, J^\ell] = i\epsilon^{klm} P^m, \quad (102)$$

$$[P^0, K^k] = iP^k, \quad (103)$$

$$[P^k, K^\ell] = iP^0 \delta^{k\ell}. \quad (104)$$

## Grupo de Poincaré

- Así que, como el hamiltoniano es  $H = P^0$  (generador de las traslaciones temporales), tenemos que  $[H, P^k] = [H, J^k] = 0$  pero  $[H, K^k] \neq 0$ . Esto no significa que solo momento lineal y momento angular total son cantidades conservadas, porque  $K^i$  depende explícitamente del tiempo de tal forma que

$$\frac{d}{dt}K^k = i[H, K^k] + \frac{\partial}{\partial t}K^k = 0. \quad (105)$$

Así que también hay cantidades conservadas asociadas a los **boosts**, como veremos al estudiar el teorema de Noether en el siguiente tema.

- Ya hemos visto que los campos forman representaciones de dimensión infinita del grupo de Lorentz, con generadores

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (106)$$

donde  $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$  y  $S^{\mu\nu}$  depende de si el campo es escalar, espinorial, ...

- Hallemos ahora la representación de las traslaciones. Para ello, imponemos que para cualquier componente, ya sea tensorial o espinorial del campo, se cumple

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (107)$$

Entonces, haciendo una translación infinitesimal  $a^\mu = \epsilon^\mu$ ,

$$\delta\phi(x) = \phi'(x' - \epsilon) - \phi(x) = \phi'(x') - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (108)$$

Por tanto, comparando esta expresión con

$$\phi'(x' - \epsilon) = \exp\{-i(-\epsilon_\mu)P^\mu\}\phi'(x') \Rightarrow \delta\phi(x) = i\epsilon_\mu P^\mu \phi(x) \quad (109)$$

tenemos que  $P^\mu = i\partial^\mu$ .

- Para ver que lo que hemos obtenido es consistente, podemos comprobar la regla de conmutación (99) usando la representación sobre campos de los generadores del grupo de Lorentz (106) y de las traslaciones (109) y teniendo en cuenta que  $S^{\mu\nu}$  es independiente de las coordenadas espaciotemporales y por tanto conmuta con  $\partial^\mu$ ,

$$\begin{aligned}
 [P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= [P^\mu, L^{\rho\sigma}] = [i\partial^\mu, i(x^\rho\partial^\sigma - x^\sigma\partial^\rho)] \\
 &= -(g^{\mu\rho}\partial^\sigma - g^{\mu\sigma}\partial^\rho) = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (110)
 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la regla  $[A, BC] = [A, B]C + A[B, C]$  y sustituido  $[\partial^\mu, x^\nu] = g^{\mu\nu}$ .

- Ya hemos visto todo lo que necesitamos para construir lagrangianos de campos invariantes bajo Poincaré. Cuando cuanticemos los campos veremos que éstos crean y destruyen partículas (y antipartículas). Es conveniente entonces identificar el espacio de Hilbert de estados de una partícula, invariante bajo Poincaré, es decir, irreps del grupo de Poincaré etiquetadas por sus operadores de Casimir y cuyos vectores vienen especificados por números cuánticos que son autovalores de un conjunto de generadores que conmuten entre sí (y de otros operadores que conmuten con ellos),  $|\vec{p}, j_3, \dots\rangle$ .
- El grupo de Poincaré tiene dos **operadores de Casimir**:

$$m^2 = P_\mu P^\mu \quad \text{y} \quad W_\mu W^\mu, \quad (111)$$

donde  $W^\mu$  es el **cuadrivector de Pauli-Lubanski** definido por

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma. \quad (112)$$

- Ambos operadores conmutan, pues

$$\begin{aligned}
 [W^\mu, P^\alpha] &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [J_{\nu\rho} P_\sigma, P^\alpha] \\
 &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (J_{\nu\rho} [P_\sigma, P^\alpha] + [J_{\nu\rho}, P^\alpha] P_\sigma) \\
 &= -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (g_\rho^\alpha P_\nu - g_\nu^\alpha P_\rho) \\
 &= -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} P_\nu + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} P_\rho = 0.
 \end{aligned} \tag{113}$$

- Además  $m^2 = P_\mu P^\mu$  y  $W_\mu W^\mu$  son invariantes Lorentz. Por tanto, son operadores de Casimir (conmutan con  $P^\rho$  y  $J^{\rho\sigma}$ ) y podemos usar sus autovalores para etiquetar las irreps y calcularlos en el sistema de referencia que queramos. Tenemos que distinguir dos casos:



- Caso  $m \neq 0$

Usemos el sistema de referencia en reposo,  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ . Entonces,

$$\left. \begin{aligned} W^0 &= 0 \\ W^i &= -\frac{m}{2}\epsilon^{ijk0}J^{jk} = \frac{m}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} = mJ^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_\mu W^\mu = -m^2 j(j+1). \quad (114)$$

Es decir, las irreps están etiquetadas por  $m, j$  y los vectores por  $|j_3 = -j \dots j\rangle$ , donde  $j$  es el espín. Vemos que las partículas masivas de espín  $j$  tienen  $2j + 1$  grados de libertad. Esto es así porque, una vez que hemos hecho un **boost** para llevar la partícula masiva al sistema de referencia en el que su cuadrimomento es  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ , tenemos total libertad para **rotar en tres dimensiones** el sistema. Decimos que el grupo SU(2) es su **grupo de Lorentz pequeño** (conjunto de transformaciones de Lorentz que dejan invariante una elección dada de  $p^\mu$ ).

## ■ Caso $m = 0$

No existe el sistema de referencia en reposo. Podemos elegir uno en el que  $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ , que describe una partícula sin masa que se mueve en la dirección del eje  $z$ . Entonces,

$$\left. \begin{aligned} -W^0 &= W^3 = \omega J^3 \\ W^1 &= \omega(J^1 + K^2) \\ W^2 &= \omega(J^2 - K^1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_\mu W^\mu = -\omega^2 [(J^1 + K^2)^2 + (J^2 - K^1)^2]. \quad (115)$$

En este caso el grupo pequeño son las **rotaciones en el plano perpendicular a la dirección del movimiento** (el plano  $(x, y)$  en nuestra elección), que es  $SO(2)$ , cuyas irreps son unidimensionales (grupo abeliano) y se etiquetan por un número  $h \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots\}$  llamado **helicidad** (proyección del momento angular en la dirección del movimiento):<sup>a</sup>

$$h = \hat{p} \cdot \vec{J}. \quad (116)$$

<sup>a</sup>Los elementos de  $SO(2)$  en la irrep  $h$  vienen dados por  $R(\theta) = \exp\{-ih\theta\}$ .

### ■ Caso $m = 0$

Nótese que  $h = j_3$  en nuestra elección de dirección del movimiento, con  $j_3 = \pm j$ .

Las irreps  $h$  y  $-h$  son distintas (no se mezclan bajo transformaciones de Poincaré), aunque en teorías simétricas bajo  $P$  las partículas sin masa correspondientes reciben el mismo nombre; se dice que están en dos estados distintos de helicidad.

Así se habla de fotón ( $m = 0, j = 1$ ) dextrógiro/levógiro si  $h = \pm 1$ . También decimos que el fotón es una partícula sin masa de espín 1, aunque en realidad no existe el estado con  $j_3 = 0$ . Del mismo modo, veremos que los campos de Weyl sin masa  $\psi_L$  y  $\psi_R$  ( $m = 0, j = \frac{1}{2}$ ) tienen helicidad  $h = -\frac{1}{2}$ ,  $h = +\frac{1}{2}$ , respectivamente y representan a partículas distintas si la teoría no es simétrica bajo paridad (e.g. en el SM si no tiene masa el neutrino es  $\nu_L$  y el  $\nu_R$  podría no existir).

Un último comentario: siempre podemos hablar de helicidad como la proyección del momento angular en la dirección del movimiento, pero solamente es una cantidad invariante bajo transformaciones de Poincaré para partículas sin masa.

A veces se usa el término *quiralidad*, que tiene que ver con si la partícula se transforma bajo la representación *left-handed* o la *right-handed* del grupo de Lorentz. La quiralidad coincide con la helicidad para partículas sin masa.