Cuantización de campos libres

Ejercicio 1: Simetrías discretas C, P y T

1) Comprueba que los espinores de Dirac escritos en la representación quiral como

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{(s)} \\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\,\xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{(-s)} \\ -\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\,\xi^{(-s)} \end{pmatrix},$$

$$\text{con } \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(-s)} = -\mathrm{i}\sigma^2(\xi^{(s)})^*$$

(nótese que $-\mathrm{i}\sigma^2(\xi^{(-s)})^* = -\xi^{(s)}$) cumplen

$$u^{(s)}(\vec{p}) = -\mathrm{i}\gamma^2\big[v^{(s)}(\vec{p})\big]^*, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = -\mathrm{i}\gamma^2\big[u^{(s)}(\vec{p})\big]^*.$$
$$u^{(s)}(-\vec{p}) = \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}), \quad v^{(s)}(-\vec{p}) = -\gamma^0 v^{(s)}(\vec{p}),$$
$$u^{(-s)}(-\vec{p}) = -\gamma^1\gamma^3\big[u^{(s)}(\vec{p})\big]^*, \quad v^{(-s)}(-\vec{p}) = -\gamma^1\gamma^3\big[v^{(s)}(\vec{p})\big]^*,$$

2) Usando estas propiedades, estudia las propiedades de transformación bajo C, P y T del operador $\psi(x)$ (véanse apuntes de la asignatura),

$$C\psi(t,\vec{x})C = -\mathrm{i}\eta_C\,\gamma^2\big[\psi(t,\vec{x})\big]^*.$$
$$P\psi(t,\vec{x})P = \eta_a\gamma^0\psi(t,-\vec{x}),$$
$$T\psi(t,\vec{x})T = \gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}).$$

3) Usando las propiedades de transformación bajo C, P y T del operador $\psi(x)$, calcula la transformación bajo C, P y T de bilineales fermiónicos covariantes arbitrarios.

Ejercicio 2: Propiedades bajo C, P de sistemas ligados, reglas de suma

1) El positronio se puede considerar un estado ligado no relativista de e^- y e^+. Muestra que un positronio con momento angular orbital L es autoestado de paridad con autovalor $P = (-1)^{L+1}$.

2) El operador conjugación de carga intercambia electrón y positrón, el positronio debe pues ser un autoestado de C. Muestra que si el momento angular orbital y el espín total del positronio son, L y S, respectivamente, el autovalor bajo conjugación de carga es $C = (-1)^{L+S}$.

3) Usando que QED es invariante bajo C y P, discute las posibles desintegraciones de estados de positronio a un número arbitrario de fotones. En particular, muestra que el estado fundamental del para-positronio (espín total 0) puede decaer en dos fotones pero el orto-positronio (espín total 1) no puede hacerlo, pero puede decaer en tres fotones.