Teoría clásica de campos

Ejercicio 1: De sistemas discretos a campos continuos

Considera un sistema formado por un muelle o una cuerda elástica sobre la que se hallan situadas, regularmente espaciadas, un número n de partículas, todas ellas de masa m. Toma la constante característica de la cuerda τ/d, con τ la tensión de la cuerda y $d = L/(n+1)$ la distancia entre nodos.

1) Asumiendo oscilaciones pequeñas, calcula la ecuación de movimiento de la partícula j-ésima (a partir de la ecuación de Newton o de la energía potencial).

2) Escribe el Lagrangiano total del sistema y, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, la ecuación de movimiento de la partícula j-ésima. Comprueba que obtienes el mismo resultado que en *(i)*.

3) El límite continuo se obtiene haciendo $n \to \infty$, $d \to 0$ y $m \to 0$ con $(n+1)d = L$ y $m/d = \rho$ constantes. Toma el límite continuo de la solución de las ecuaciones de movimiento, dada por

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \eta_r(t) \sin[j\pi r/(n+1)], \qquad \eta_r(t) = \beta_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_r t}.$$

4) Haz el paso al continuo en la ecuación de movimiento para obtener la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}.$$

Comprueba que la solución del apartado anterior satisface la ecuación de onda, usando $\omega_r = \sqrt{\tau/\rho}\ \pi r/L$.

5) Por último, toma el límite continuo directamente en el Lagrangiano y calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo correspondiente.

Ejercicio 2: Dimensiones de los campos

1) La acción tiene las mismas dimensiones de masa que $\hbar$ y por tanto es adimensional en unidades naturales $\hbar = c = 1$. Usando los términos cinéticos como guía, encuentra las dimensiones de masa de campos escalares, espinoriales y campos de gauge en cuatro dimensiones espacio-temporales.

2) ¿Cómo se generalizan estas dimensiones a un número d arbitrario de dimensiones espacio-temporales?

Ejercicio 3: Propiedades de soluciones de la ecuación de Dirac

1) Escribe la forma explícita de los espinores de Dirac de cuadrimomento $p = (E, \vec{p})$ con $E = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ en la representación quiral y en la de Dirac.

2) Demuestra que

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p})\overline{u}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} + m,$$

$$\sum_{s=1,2} v^{(s)}(\vec{p})\overline{v}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} - m.$$

3) Usando la representación quiral, donde sea necesario, comprueba que son ciertas las siguientes (des)igualdades:

$$\overline{u}^{(r)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2m\delta_{rs}, \quad \overline{v}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(p) = -2m\delta_{rs},$$

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2E\delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 2E\delta_{rs},$$

$$\overline{u}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad u^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) \neq 0, \quad u^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(-\vec{p}) = 0.$$

Ejercicio 4: Base de bilineales covariantes de espinores de Dirac

1) Comprueba que las 16 matrices 4×4

$$\Gamma^\alpha = \{1, \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$$

tienen inversa $\Gamma_\beta \equiv (\Gamma^\beta)^{-1} = \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, -\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\}$ y que satisfacen $\mathrm{Tr}(\Gamma^\alpha\Gamma_\beta) = 4\delta^\alpha_\beta$.

2) Demuestra que son linealmente independientes y que cualquier matriz 4×4 se puede escribir como combinación lineal de ellas.

3) Muestra que los productos

$$\overline{\psi}\psi,\ \overline{\psi}\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi,\ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi,\ \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$$

definen representaciones de Lorentz, incluida la transformación de paridad.

Ejercicio 5: Campos vectoriales masivos

Considera el Lagrangiano de Proca,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.$$

1) Muestra que esta teoría no es invariante gauge y que las ecuaciones de movimiento que se derivan de este Lagrangiano son

$$(\Box + m^2)A^\mu = 0, \qquad \partial_\mu A^\mu = 0.$$

2) ¿Cuántos grados de libertad contiene el campo vectorial masivo? Compáralo con un campo vectorial sin masa (campo de gauge). Discute la diferencia entre el número de grados de libertad en espinores con y sin masa y escalares con y sin masa. Relaciónalo con las representaciones de estados de una partícula del grupo de Poincaré.