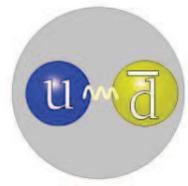


Los hadrones y el modelo de quarks



Introducción

Conceptos básicos de Teoría de Grupos

El grupo SU(2)

El grupo SU(3)

El modelo de quarks

Bariones

Mesones

Masas y momentos magnéticos de los hadrones

Los quarks pesados

■ Introducción

- En la década de 1960 se descubrieron un gran número de **hadrones**. Sus propiedades pudieron entenderse al *postular* que no eran elementales sino **compuestos** de **quarks** lo que permitió su **clasificación**
- Los **hadrones** forman multipletes de una simetría *aproximada* $SU(m)$ de sabor
 - * Los **bariones** están compuestos por tres quarks
 - * Los **mesones** están compuestos por un quark y un antiquark
- Los **quarks** (**antiquarks**) viven en la representación \mathbf{m} (\mathbf{m}^*) de $SU(m)$
- Los quarks son **fermiones** de espín $\frac{1}{2}$ bajo rotaciones $SU(2)$
- Las **interacciones fuertes** no distinguen el sabor: **partículas idénticas**
- Para respetar el **postulado de simetrización** se introduce el grupo $SU(3)$ de color
- Nos centraremos en $m = 3$ **sabores: u, d, s**

■ Conceptos básicos de Teoría de Grupos

- **Grupo** ↔ **Simetrías**

Espaciotemporales:	Continuas	traslaciones, rotaciones, Lorentz, ...
	Discretas	paridad, inversión temporal, ...
Internas:	Globales	conservación de la carga, ...
	Gauge	interacciones fundamentales
Bajo permutaciones:	Intercambio	partículas idénticas, ...

Ejemplo: **Modelo de quarks** ↔ Simetría interna global y bajo permutaciones

- **Representaciones (irreps):**

Transformaciones de simetría ↔ Operadores

Sistema físico ↔ Espacio vectorial (**invariante e irreducible**)

- El grupo $S_n = \{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\}$ [ciclos: $e, (12), (132), \dots$]
- **Grupos de Lie** (continuos): **Generadores** (J_a) y **álgebra de Lie** $[J_a, J_b] = if^{abc} J_c$
- El grupo $SU(m) = \{\text{matrices } m \times m \text{ complejas unitarias con det. unidad}\}$

- **Representación fundamental** de $SU(m)$: $\square = \mathbf{m}$ (sobre V_m)
- Representación **producto directo** (sobre V_m^n) descomponible gráficamente en irreps (tanto de $SU(m)$ como de S_n) mediante **Tableros de Young** de n casillas

$$|i\rangle \in \text{base de } V_m, \quad |\alpha\rangle = |i_1 i_2 \dots i_n\rangle \in \text{base de } V_m^n, \quad i_k = 1, \dots, m$$

- Cada Tablero de Young θ_λ^p tiene asociado una irrep λ de $SU(m)$ de dimensión $\frac{F}{H}$. Al Tablero de Young Normal θ_λ se asocia el **simetrizador irreducible** e_λ

Ejemplo con $n = 3, m = 2$: $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ $\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \theta_\lambda : e_\lambda = [e + (12)][e - (13)] \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \theta_\lambda^p, p = (23) \end{array} \right.$

$$\text{Hay } 2 = \frac{n!}{H} \text{ de dimensión } 2 = \frac{F}{H} = \frac{2 \times 3 \times 1}{3 \times 1 \times 1}$$

- Los siguientes **subespacios vectoriales** de V_m^n son **invariantes e irreducibles**

$$T'_\lambda(a) = \{pe_\lambda |\alpha\rangle; |\alpha\rangle \in V_m^n, p \in \theta_\lambda^p \text{ fijo}\} \equiv \left\{ |\lambda\alpha a\rangle; \alpha = 1, \dots, \frac{F}{H} \right\} \text{ bajo } SU(m)$$

■ El grupo SU(2)

$$2^2 - 1 = 3 \text{ generadores} \quad : \quad J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$2 - 1 = 1 \text{ generador diagonal} \quad : \quad J_3$$

$$\text{Matrices de Pauli } \sigma_i: \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Álgebra de SU(2): } [J_a, J_b] = i\epsilon^{abc}J_c \quad (\epsilon^{abc} = \text{símbolo de Levi-Civita})$$

\Rightarrow SU(2) es isomorfo a SO(3) = rotaciones en 3D

– Los **vectores base** $|j, j_3\rangle$ de una irrep son propios de $J = \sum_{i=1}^3 J_i^2$ y de J_3

$$J^2 |j, j_3\rangle = j(j+1) |j, j_3\rangle, \quad J_3 |j, j_3\rangle = j_3 |j, j_3\rangle$$

$$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}, \quad j_3 \in \{j, j-1, \dots, -j\}$$

Operador escalera $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$: sube/baja j_3 en 1 unidad, ya que $[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$

– Cada irrep se caracteriza por j y tiene dimensión $d = 2j + 1$

– Las irreps de SU(2) son **reales** (equivalentes a sus complejo-conjugadas)

■ El grupo SU(3)

$$3^2 - 1 = 8 \text{ generadores} \quad : \quad F_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad i = 1, \dots, 8$$

$$3 - 1 = 2 \text{ generadores diagonales} \quad : \quad F_3, F_8 \text{ (conmutan entre sí)}$$

Matrices de Gell-Mann λ_i :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \text{SU}(2) \subset \text{SU}(3)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Álgebra de SU(3): $[F_a, F_b] = if^{abc}F_c$. Las constantes de estructura no nulas son:

$$f^{123} = 1, f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f^{147} = f^{156} = f^{246} = f^{247} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2} \text{ y perm. cicl.}$$

Los **vectores base** $|I, I_3, Y\rangle$ de una irrep son propios de $I = \sum_{i=1}^3 F_i^2$, $I_3 = F_3$, $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$

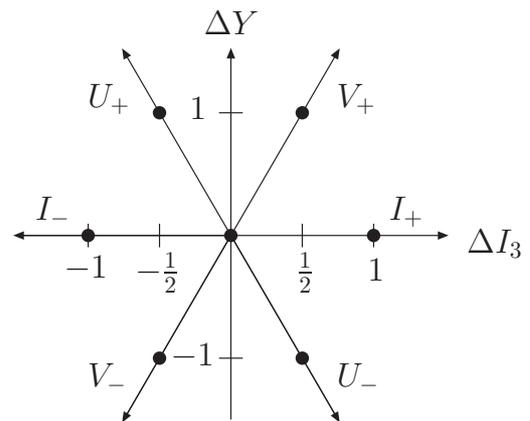
Hay tres operadores escalera (tres subgrupos con simetría SU(2)):

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2 \quad : \quad \text{sube/baja } I_3 \text{ en 1 unidad y no cambia } Y$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7 \quad : \quad \text{baja/sube } I_3 \text{ en } \frac{1}{2} \text{ unidad y sube/baja } Y \text{ en 1 unidad}$$

$$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5 \quad : \quad \text{sube/baja } I_3 \text{ en } \frac{1}{2} \text{ unidad y sube/baja } Y \text{ en 1 unidad}$$

$$\begin{aligned} [I_3, I_{\pm}] &= \pm I_{\pm} & [Y, I_{\pm}] &= 0 \\ [I_3, U_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} U_{\pm} & [Y, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm} \\ [I_3, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} V_{\pm} & [Y, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm} \end{aligned}$$



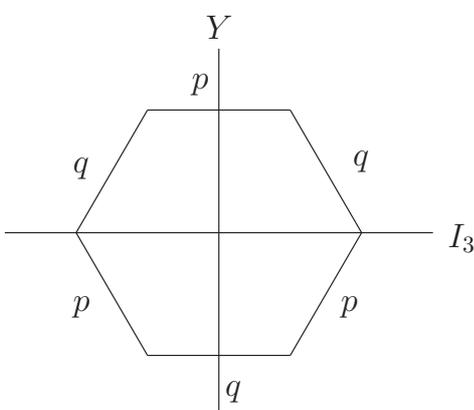
Notación de pesos:

Cada irrep se caracteriza por dos números naturales (p, q)

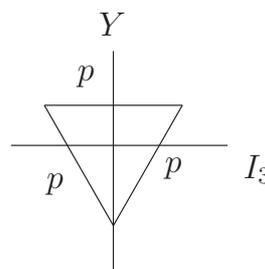
La dimensión de la irrep es $d = \frac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2}$.

La irrep complejo-conjugada de la (p, q) es la (q, p) y no son equivalentes, en general.

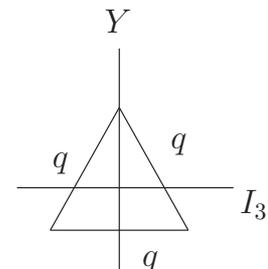
Cada irrep (p, q) está generada por los estados dados por los puntos en el plano (I_3, Y) cuya frontera son el hexágono o triángulo siguientes:



(p, q)



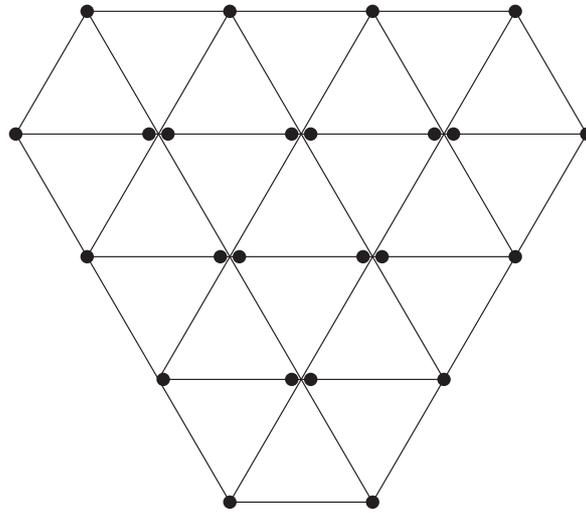
$(p, 0)$



$(0, q)$

Puede haber más de un estado con los mismos (I_3, Y) (tienen distinto I).

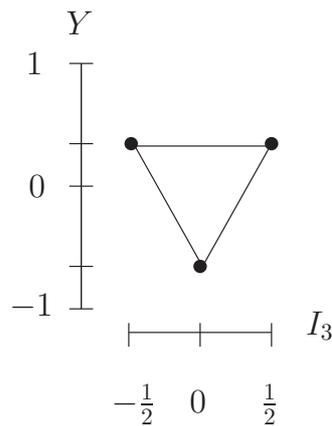
Los estados del borde exterior de (p, q) tienen **ocupación** 1, los de la capa siguiente $(p - 1, q - 1)$ ocupación 2, y así sucesivamente hasta que se alcanza un nivel en el que la ocupación permanece $q + 1$ si $p > q$ o $p + 1$ si $p < q$:



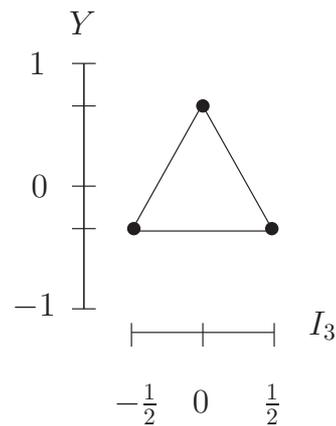
$$24 = (3, 1)$$

$$I_{\text{máx}} = \frac{p+q}{2}$$

Ejemplos:

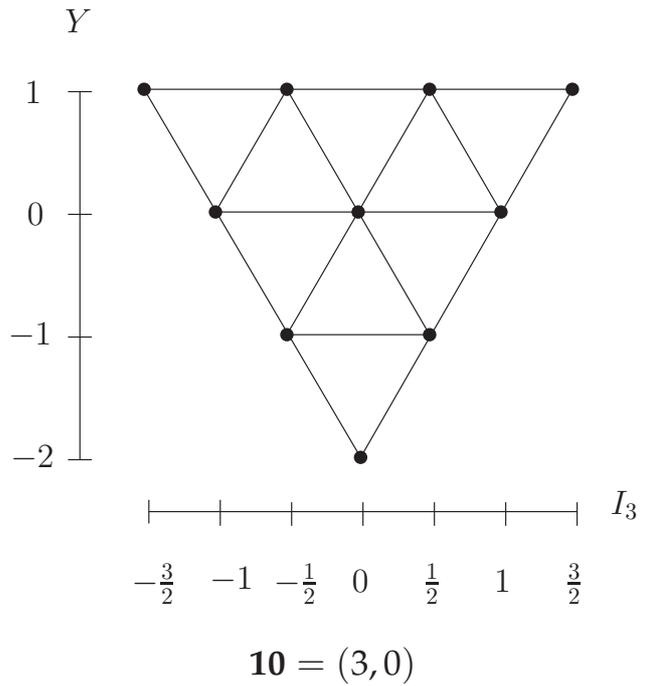
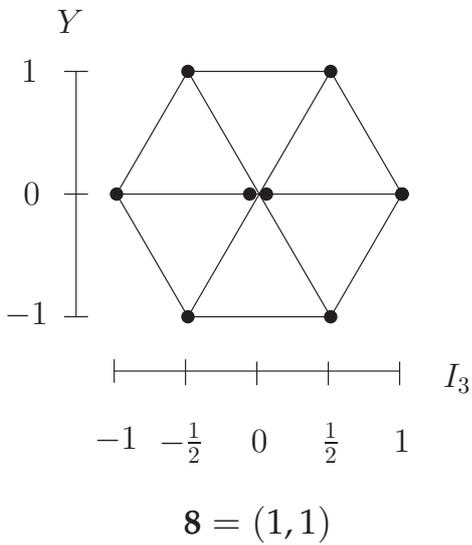


$$3 = (1, 0)$$



$$3^* = (0, 1)$$

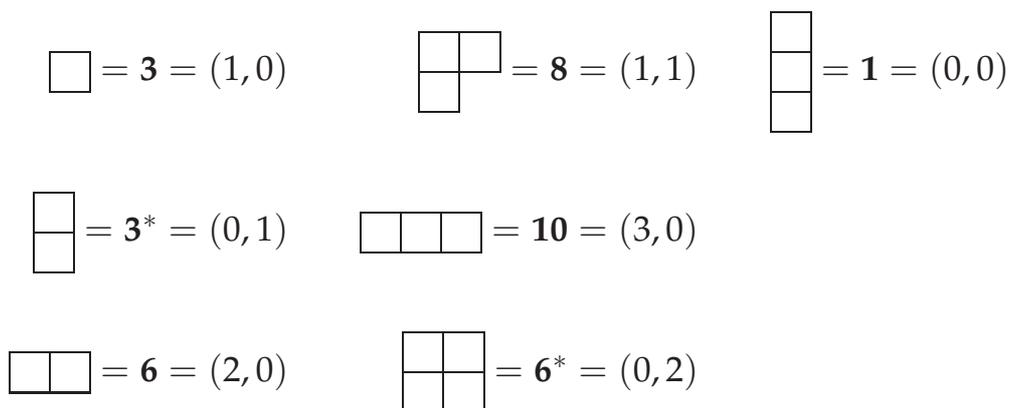
Ejemplos:



Relación entre la notación de pesos (p, q) y los tableros de Young:

p es el número de casillas de la primera fila que sobrepasan a las de la segunda fila y q es el número de casillas de la segunda fila que sobrepasan a las de la tercera fila.

Ejemplos:



El modelo de quarks

[Gell-Mann '62, Neeman '61, Zweig '64]

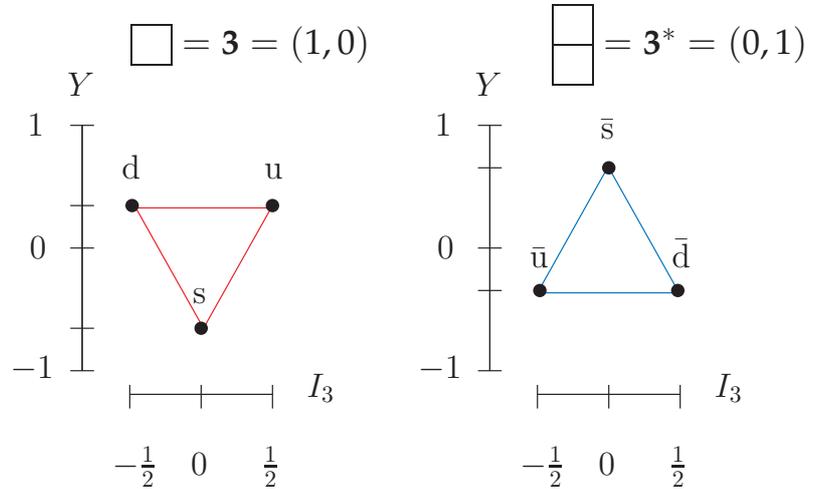
- Los quarks (u, d, s) son base de la representación fundamental de SU(3)
Sus números cuánticos (isospín I e hipercarga Y) son:

[Se toma: $I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \text{diag}\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$, $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\lambda_8 = \text{diag}\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\}$]

Quark	Q	I	I_3	Y
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
s	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$

$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$

[Q = carga eléctrica/(e > 0)]



Los antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) tienen todas las cargas opuestas

- Cada quark tiene espín $\frac{1}{2}$ bajo el grupo SU(2) de las rotaciones

Bariones

SU(2): Tres quarks de espín $\frac{1}{2}$ {↑, ↓}

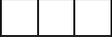
$\square \times \square \times \square = 2 \otimes 2 \otimes 2 = 4_S \oplus 2_{M_S} \oplus 2_{M_A}$

λ		$\{ \lambda\alpha a\rangle\}$	Bases ortonormales	Espín S
	4_S	$e_s \uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ $e_s \uparrow\uparrow\downarrow\rangle$ $e_s \downarrow\downarrow\uparrow\rangle$ $e_s \downarrow\downarrow\downarrow\rangle$	$\chi_S(+\frac{3}{2}) = \uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ $\chi_S(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$ $\chi_S(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \uparrow\downarrow\downarrow\rangle)$ $\chi_S(-\frac{3}{2}) = \downarrow\downarrow\downarrow\rangle$	$\frac{3}{2}$
	2_{M_S}	$e_m \uparrow\uparrow\downarrow\rangle$ $e_m \downarrow\downarrow\uparrow\rangle$	$\chi_{M_S}(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$ $\chi_{M_S}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \downarrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$	$\frac{1}{2}$
	$2_{M_A}^\#$	$(23)e_m \uparrow\uparrow\downarrow\rangle$ $(23)e_m \downarrow\downarrow\uparrow\rangle$	$\chi_{M_A}(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$ $\chi_{M_A}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - \uparrow\downarrow\downarrow\rangle)$	

Con $|1\rangle \equiv e_m |\alpha\rangle$ y $|2\rangle \equiv (23)e_m |\alpha\rangle$ se construye el vector unitario $\frac{|2\rangle - \langle 1|2\rangle |1\rangle}{\| |2\rangle - \langle 1|2\rangle |1\rangle \|} \perp |1\rangle$

SU(3): Tres quarks $q_1 q_2 q_3$ con sabores $q_i \in \{u, d, s\}$

$$\square \times \square \times \square = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A$$

λ		$\{ \lambda\alpha a\rangle\}$	Base ortonormal
	10_S	$e_s uuu\rangle$	$\psi_S(uuu) = uuu\rangle$
Simétrica		$e_s uud\rangle$	$\psi_S(uud) = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud\rangle + udu\rangle + duu\rangle)$
		$e_s ddu\rangle$	$\psi_S(ddu) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + udd\rangle)$
		$e_s ddd\rangle$	$\psi_S(ddd) = ddd\rangle$
		$e_s uus\rangle$	$\psi_S(uus) = \frac{1}{\sqrt{3}}(uus\rangle + usu\rangle + sus\rangle)$
		$e_s uds\rangle$	$\psi_S(uds) = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds\rangle + dus\rangle + usd\rangle + sdu\rangle + sud\rangle + dsu\rangle)$
		$e_s dds\rangle$	$\psi_S(dds) = \frac{1}{\sqrt{3}}(dds\rangle + dsd\rangle + sds\rangle)$
		$e_s ssu\rangle$	$\psi_S(ssu) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ssu\rangle + sus\rangle + uss\rangle)$
		$e_s ssd\rangle$	$\psi_S(ssd) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ssd\rangle + sds\rangle + dss\rangle)$
		$e_s sss\rangle$	$\psi_S(sss) = sss\rangle$

λ		$\{ \lambda\alpha a\rangle\}$	Bases ortonormales
	8_{M_S}	$e_m uud\rangle$	$\psi_{M_S}(uud) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle - duu\rangle - udu\rangle)$
		$e_m ddu\rangle$	$\psi_{M_S}(ddu) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ddu\rangle - udd\rangle - dud\rangle)$
		$e_m uus\rangle$	$\psi_{M_S}(uus) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 uus\rangle - suu\rangle - usu\rangle)$
		$e_m dds\rangle$	$\psi_{M_S}(dds) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 dds\rangle - sdd\rangle - dsd\rangle)$
		$e_m uds\rangle$	$\psi_{M_S}(uds) = \frac{1}{2}(uds\rangle + dus\rangle - sdu\rangle - dsu\rangle)$
		$e_m usd\rangle$	$\psi_{M_S}^\perp(usd) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 usd\rangle + 2 sud\rangle - uds\rangle)$
		$e_m ssu\rangle$	$\psi_{M_S}(ssu) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssu\rangle - uss\rangle - sus\rangle)$
		$e_m ssd\rangle$	$\psi_{M_S}(ssd) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssd\rangle - dss\rangle - sds\rangle)$
	8_{M_A}	$(23)e_m uud\rangle$	$\psi_{M_A}(uud) = \frac{1}{\sqrt{2}}(udu\rangle - duu\rangle)$
		$(23)e_m ddu\rangle$	$\psi_{M_A}(ddu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dud\rangle - udd\rangle)$
		$(23)e_m uus\rangle$	$\psi_{M_A}(uus) = \frac{1}{\sqrt{2}}(usu\rangle - suu\rangle)$
		$(23)e_m dds\rangle$	$\psi_{M_A}(dds) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dsd\rangle - sdd\rangle)$
		$(23)e_m uds\rangle$	$\psi_{M_A}(uds) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 usd\rangle - 2 sud\rangle + uds\rangle - dus\rangle + dsu\rangle - sdu\rangle)$
		$(23)e_m usd\rangle$	$\psi_{M_A}^\perp(usd) = \frac{1}{2}(uds\rangle - dus\rangle + sdu\rangle - dsu\rangle)$
		$(23)e_m ssu\rangle$	$\psi_{M_A}(ssu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(uss\rangle - suu\rangle)$
$(23)e_m ssd\rangle$	$\psi_{M_A}(ssd) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dss\rangle - duu\rangle)$		

Estados simetrizados

Decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$

$$\psi_S(q_1 q_2 q_3) \chi_S(m_J)$$

$$m_J \in \left\{ +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$$

Barión	Quarks	Función de onda
Δ^{++}	uuu	$ uuu\rangle \chi_S(m_J)$
Δ^+	uud	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud\rangle + udu\rangle + duu\rangle) \chi_S(m_J)$
Δ^0	udd	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + udd\rangle) \chi_S(m_J)$
Δ^-	ddd	$ ddd\rangle \chi_S(m_J)$
Σ^{*+}	uus	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus\rangle + usu\rangle + sus\rangle) \chi_S(m_J)$
Σ^{*0}	uds	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds\rangle + dus\rangle + sud\rangle + sdu\rangle + sud\rangle + dsu\rangle) \chi_S(m_J)$
Σ^{*-}	dds	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds\rangle + dsd\rangle + sds\rangle) \chi_S(m_J)$
Ξ^{*0}	uss	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssu\rangle + sus\rangle + uss\rangle) \chi_S(m_J)$
Ξ^{*-}	dss	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssd\rangle + sds\rangle + dss\rangle) \chi_S(m_J)$
Ω^-	sss	$ sss\rangle \chi_S(m_J)$

Octete $J^P = \frac{1}{2}^+$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{M_S}(q_1 q_2 q_3) \chi_{M_S}(m_J) + \psi_{M_A}(q_1 q_2 q_3) \chi_{M_A}(m_J)]$$

$$m_J \in \left\{ +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

Barión	Quarks	Función de onda ($m_J = +\frac{1}{2}$)
p	uud	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \{ 2(u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle) - (u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle + u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle) - (u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle) \}$
n	udd	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \{ 2(d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle) - (d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle + d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle) - (d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow\rangle + d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle) \}$
Σ^+	uus	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \{ 2(u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle + s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle + u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow\rangle) - (u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle + u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle) - (u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle + s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle) \}$
Σ^-	dds	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \{ 2(d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle + s^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle) - (d^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle + s^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle + d^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle) - (d^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle + d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle + d^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle) \}$

Octete $J^P = \frac{1}{2}^+$ (cont.) Nota: Σ^0 y Λ^0 elegidas para dar isospín correcto

Barión	Quarks	Función de onda ($m_J = +\frac{1}{2}$)
Σ^0	uds	$\frac{1}{6}\{(\text{usd}\rangle + \text{sdu}\rangle)(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle) + (\text{dus}\rangle + \text{usd}\rangle)(2 \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle) + (\text{sdu}\rangle + \text{dus}\rangle)(2 \uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)\}$
Λ^0	uds	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(\text{usd}\rangle - \text{sdu}\rangle)(\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle) + (\text{dus}\rangle - \text{usd}\rangle)(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle) + (\text{sdu}\rangle - \text{dus}\rangle)(\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle)\}$
Ξ^0	uss	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\{2(\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{u}^\downarrow\rangle + \text{u}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{u}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle) - (\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{u}^\uparrow\rangle + \text{u}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{u}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle) - (\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{u}^\uparrow\rangle + \text{u}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\downarrow\text{u}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle)\}$
Ξ^-	dss	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\{2(\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{d}^\downarrow\rangle + \text{d}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{d}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle) - (\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\text{d}^\uparrow\rangle + \text{d}^\uparrow\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle + \text{s}^\uparrow\text{d}^\uparrow\text{s}^\downarrow\rangle) - (\text{s}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{d}^\uparrow\rangle + \text{d}^\uparrow\text{s}^\downarrow\text{s}^\uparrow\rangle + \text{s}^\downarrow\text{d}^\uparrow\text{s}^\uparrow\rangle)\}$

- El **estado fundamental** tiene **momento angular orbital** $L = 0$. Por tanto el momento angular total del barión (su espín) J coincide con la suma vectorial de los espines de los tres quarks S . Su **paridad** es $P = (-1)^L$
- La total simetría del estado fundamental [espacial] \times [espín] \times [sabor] ocasiona un conflicto con el **postulado de simetrización**: esperamos que bajo el intercambio de **fermiones idénticos** la **función de onda** debe ser **antisimétrica**.

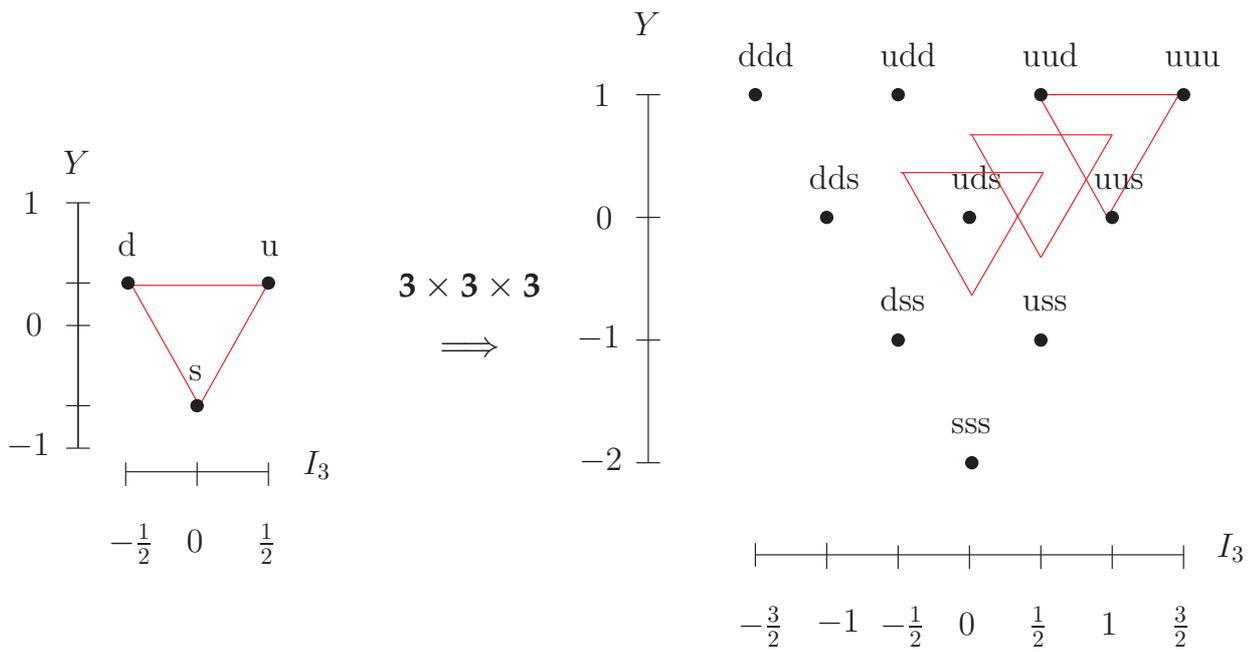
Para solucionar este problema se supone que los quarks son la representación fundamental de una **simetría SU(3) de color** que, a diferencia de la SU(3) de sabor, es **exacta**: los quarks pueden tener color rojo (**R**), verde (**G**) o azul (**B**). Se postula que **los hadrones son neutros de color**, es decir, pertenecen a la representación singlete de SU(3) de color.

Así los bariones pertenecen a la representación antisimétrica $\mathbf{1}_A$ de SU(3) de color:

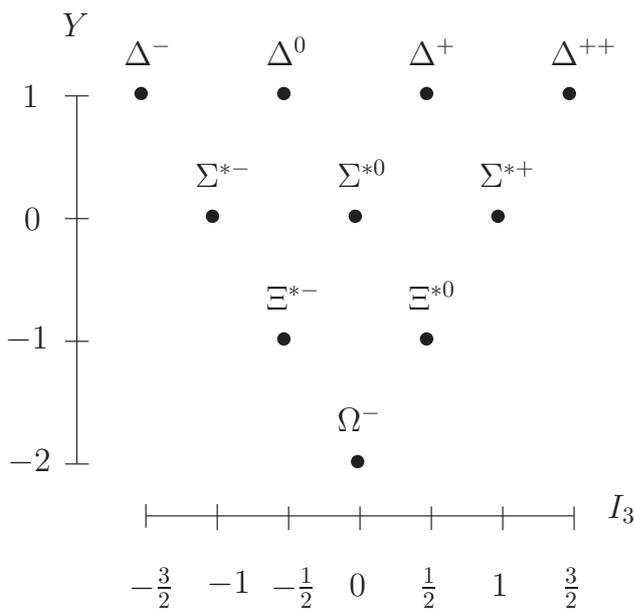
$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} e_a |\mathbf{RGB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\mathbf{RGB}\rangle - |\mathbf{GRB}\rangle - |\mathbf{RBG}\rangle - |\mathbf{BGR}\rangle + |\mathbf{BRG}\rangle + |\mathbf{GBR}\rangle)$$

de modo que la función de onda [espacial] \times [espín] \times [sabor] \times [color] es en efecto antisimétrica.

Los números cuánticos de los multipletes de bariones

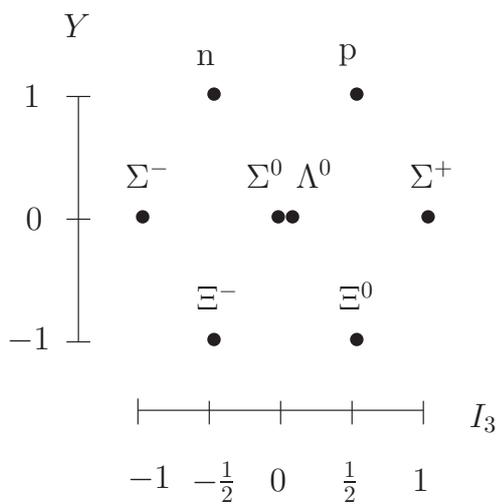


Decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$ ($L = 0, S = \frac{3}{2}$)



	Quarks	I	I_3	Y	M [MeV]
Δ^{++}	uuu	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1232
Δ^+	uud	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1232
Δ^0	udd	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1232
Δ^-	ddd	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	1232
Σ^{*+}	uus	1	1	0	1383
Σ^{*0}	uds	1	0	0	1384
Σ^{*-}	dds	1	-1	0	1387
Ξ^{*0}	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1530
Ξ^{*-}	dss	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1530
Ω^-	sss	0	0	-2	1672

Octete $J^P = \frac{1}{2}^+$ ($L = 0, S = \frac{1}{2}$)



	Quarks	I	I_3	Y	M [MeV]
p	uud	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	938
n	udd	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	939
Λ^0	uds	0	0	0	1115
Σ^+	uus	1	1	0	1189
Σ^0	uds	1	0	0	1192
Σ^-	dds	1	-1	0	1197
Ξ^0	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1314
Ξ^-	dss	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1321

Mesones

SU(2): Un quark y un antiquark, ambos de espín $\frac{1}{2}$

$$\square \times \square = 2 \otimes 2 = 3_S \oplus 1_A$$

λ		$\{ \lambda\alpha\alpha\rangle\}$	Base ortonormales	Espín S
 Simétrica	3_S	$e_s \uparrow\uparrow\rangle$ $e_s \uparrow\downarrow\rangle$ $e_s \downarrow\downarrow\rangle$	$\chi_S(+1) = \uparrow\uparrow\rangle$ $\chi_S(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle)$ $\chi_S(-1) = \downarrow\downarrow\rangle$	1
 Antisimétrica	1_A	$e_a \uparrow\downarrow\rangle$	$\chi_A(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$	0

SU(3): Un quark q y un antiquark \bar{q} de sabores $q \in \{u, d, s\}$, $\bar{q} \in \{\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}\}$

$$\square \times \square = 3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

- Nota: El grupo SU(3) de sabor posee un subgrupo SU(2) de isospín I . Los **multipletes de isospín** de las **antipartículas** deben ser definidos con cuidado (deben transformarse igual y tener I_3 opuesto). Así, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_2}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

I	I_3	Estado
1	1	$-u\bar{d}$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$
1	-1	$d\bar{u}$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$

	Base ortonormal	I	I_3	Y
1	$ C\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	0	0	0
8	$ B\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	0	0	0
	$ A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	1	0	0
	$-u\bar{d}$	1	1	0
	$d\bar{u}$	1	-1	0
	$u\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	$d\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	$s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	

(No hay simetría de intercambio)

← Este deber ser el singlete

} Ortogonales a $|C\rangle$ con $I_3 = Y = 0$

↓ Los seis estados restantes

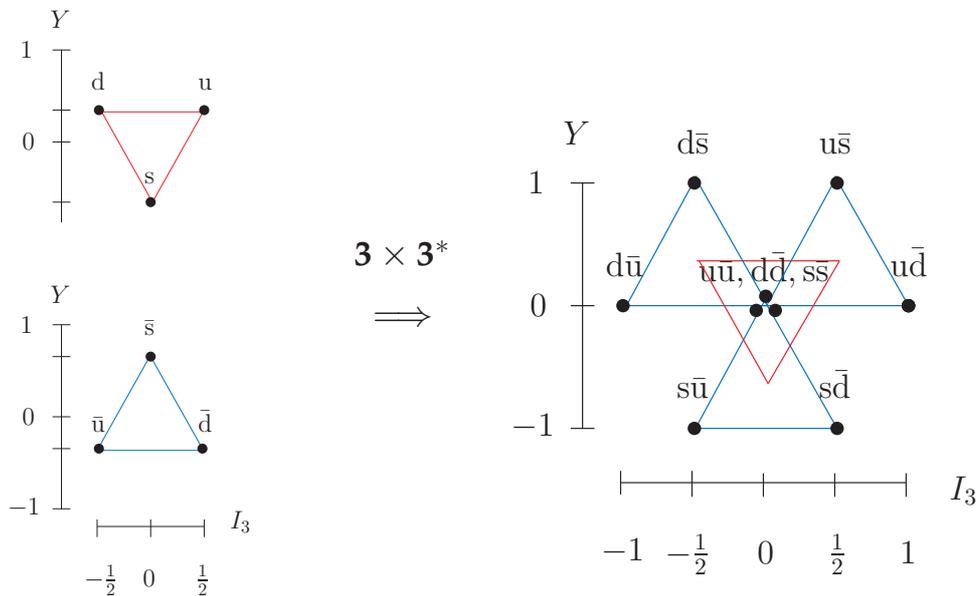
- Los estados $|B\rangle$ (octete) y $|C\rangle$ (singlete) no se mezclan bajo transformaciones de SU(3) pero tienen los mismos $I = Y = 0$. Pueden superponerse. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} L = 0, S = 0: & \quad |\eta\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), & \quad |\eta'\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \\ L = 1, S = 0: & \quad |\omega\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), & \quad |\phi\rangle \approx s\bar{s} \end{aligned}$$

Los números cuánticos de los multipletes de mesones

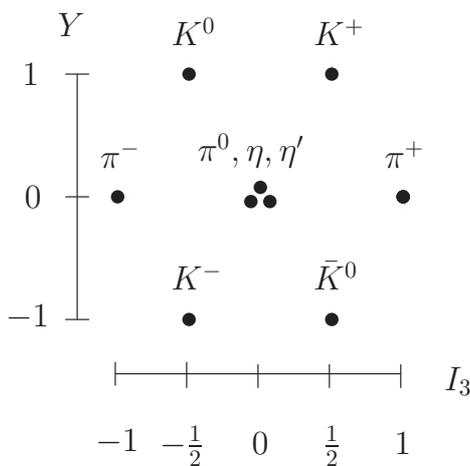
– El **espín** J del mesón es la suma vectorial de L y S del sistema quark-antiquark.
 La **paridad** es el producto de la paridad intrínseca y la extrínseca $P = -(-1)^L$

– Un mesón **neutro** es autoestado de **conjugación de carga** con $C = (-1)^{L+S}$



Nonete $J^P = 0^-$ ($L = 0, S = 0$)

(octete y **singlete** casi **no se mezclan**)



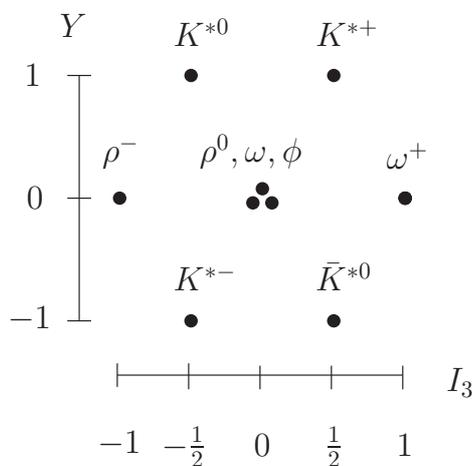
	Función de onda*	I	I_3	Y	M [MeV]
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	1	0	0	135
π^+	$-u\bar{d}$	1	1	0	140
π^-	$d\bar{u}$	1	-1	0	140
η	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	0	0	0	547
K^+	$u\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	493
K^-	$s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	493
K^0	$d\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	498
\bar{K}^0	$-s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	498
η'	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	0	0	0	958

*[multiplicar por $\chi_A(0)$]

Nota: π^0, η y η' tienen $J^{PC} = 0^{-+}$

Nonete $J^P = 1^-$ ($L = 1, S = 0$)

(octete y singlete se mezclan)



	Función de onda*	I	I_3	Y	M [MeV]
ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	1	0	0	775
ρ^+	$-u\bar{d}$	1	1	0	775
ρ^-	$d\bar{u}$	1	-1	0	775
ω	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	0	0	0	782
K^{*+}	$u\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	892
K^{*-}	$s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	892
K^{*0}	$d\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	892
\bar{K}^{*0}	$-s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	892
ϕ	$s\bar{s}$	0	0	0	1020

*[multiplicar por $\chi_S(m_J)$]

Nota: ρ^0, ω y ϕ tienen $J^{PC} = 1^{--}$

Masas y momentos magnéticos de los hadrones

Diferencias de masa en multipletes de isospín

Atribuir las a la **interacción eléctrica** entre **quarks constituyentes** y $m_u \neq m_d \neq m_s$.

Por **ejemplo**, para los hiperones Σ :

$$\Sigma^+(1189) = uus \quad \Sigma^0(1192) = uds \quad \Sigma^-(1197) = dds$$

tendríamos, suponiendo interacción eléctrica entre pares de quarks,

$$M_{\Sigma^+} = M_0 + m_s + 2m_u + (Q_u^2 + Q_u Q_s + Q_u Q_s)\delta$$

$$M_{\Sigma^0} = M_0 + m_s + m_d + m_u + (Q_u Q_d + Q_u Q_s + Q_d Q_s)\delta, \quad \delta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$M_{\Sigma^-} = M_0 + m_s + 2m_d + (Q_d^2 + Q_d Q_s + Q_d Q_s)\delta$$

de donde

$$m_d - m_u = \frac{1}{3} [M_{\Sigma^-} + M_{\Sigma^0} - 2M_{\Sigma^+}] = 3.7 \text{ MeV}$$

que confirma la similitud entre los quarks del doblete de isospín $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$.

■ Masas de los bariones

Las masas de los hadrones de un mismo multiplete no son iguales. Suponer que el hamiltoniano de la interacción fuerte H contiene un término H' que rompa $SU(3)$:

$$H = H_0 + H'$$

donde H' conmuta con los generadores diagonales I_3 e Y . [vid. valores tablas]

Fórmula de Gell-Mann–Okubo (empírica, consistente con lo anterior)

$$\text{para bariones: } M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

⇒ **Decuplete** de bariones $J^P = \frac{3}{2}^+$, cumplen $Y = 2(I-1)$:

$$M = A + BY \quad [A \approx 1380 \text{ MeV}, \quad B \approx -150 \text{ MeV}]$$

⇒ **Octete** de bariones $J^P = \frac{1}{2}^+$:

$$3M_{\Lambda^0} + M_{\Sigma^0} = 2M_n + 2M_{\Xi^0} \quad [\text{se cumple con una precisión del } 5\%]$$

■ Masas de los mesones

Suponer que la relación entre masas es cuadrática.

Fórmula de Gell-Mann–Okubo

$$\text{para mesones: } M^2 = M_0^2 + M_1^2 Y + M_2^2 \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

⇒ **Octete** de mesones pseudoescalares $J^P = 0^-$:

$$3M_{\eta}^2 + M_{\pi^0}^2 = 2M_{K^0}^2 + 2M_{\bar{K}^0}^2$$

y como $M_{K^0} = M_{\bar{K}^0}$ se obtiene finalmente

$$3M_{\eta}^2 + M_{\pi^0}^2 = 4M_{K^0}^2$$

que se cumple con una precisión del 8%.

■ Momentos magnéticos de los bariones

El operador momento dipolar magnético de un **fermión** sin estructura, de espín $\frac{1}{2}$, carga Q y masa m es:

$$\vec{\mu} = Q \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \equiv \mu \vec{\sigma}$$

Para un **barión** constituido por tres quarks $i = 1, 2, 3$ el modelo de quarks predice

$$\vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i \implies \boxed{\mu_{\text{barión}} = \langle \psi | \sum_i \mu_i \sigma_{3_i} | \psi \rangle}$$

donde ψ es su función de onda en el estado de $m_J = J$.

Teniendo en cuenta que sólo se están considerando las contribuciones de los quarks de valencia (quarks constituyentes), el éxito del modelo es bastante bueno, como muestra la siguiente tabla.

	Modelo de quarks	μ/μ_N	Experimento μ/μ_N
p	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$	—	$+2.792\,847\,351 \pm 0.000\,000\,028$
n	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$	—	$-1.913\,042\,7 \pm 0.000\,000\,5$
Λ^0	μ_s	—	-0.613 ± 0.004
Σ^+	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s)$	+2.67	$+2.458 \pm 0.010$
Σ^0	$\frac{1}{3}(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)$	+0.79	—
Σ^-	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s)$	-1.09	-1.160 ± 0.025
Ξ^0	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u)$	-1.43	-1.250 ± 0.014
Ξ^-	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d)$	-0.49	-0.6507 ± 0.0025
Ω^-	$3\mu_s$	-1.84	-2.02 ± 0.05

donde se ha usado como unidad el magnetón nuclear $\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p}$

Nota: Si suponemos $m_u = m_d$, el modelo de quarks predice $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} \approx -0.667$, bastante de acuerdo con el valor experimental $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -0.685$

