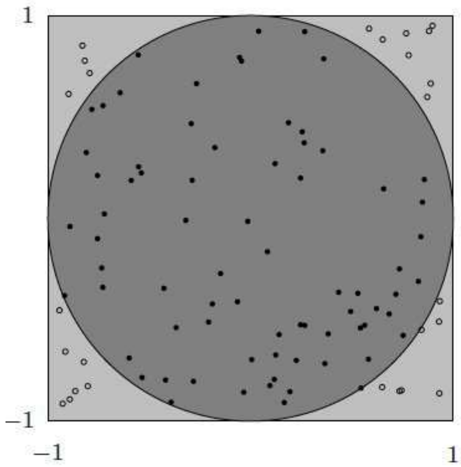
Introducción a los Métodos Monte Carlo

Ejercicio 1: Sobre el experimento de las gotas de lluvia



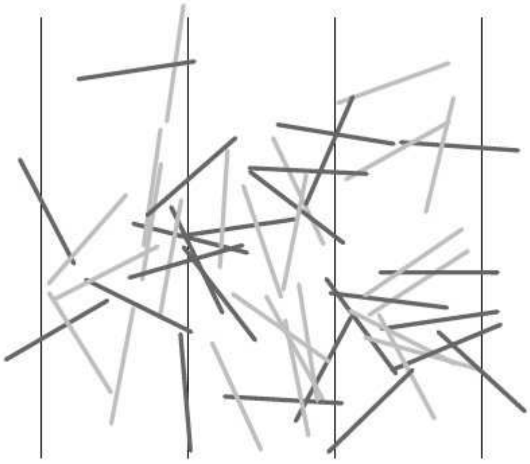
Nótese que, en el experimento de las gotas de lluvia, podemos dividir la figura en cuatro cuadrantes y que la probabilidad de que las gotas caigan dentro del círculo viene dada también por el cociente (nos fijamos sólo en el cuadrante superior derecho):

$$\mathrm{P} = \frac{\text{área del sector circular}}{\text{área del cuadrado pequeño}} = \int_0^1 \mathrm{d}x \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

i) Escribe un programa de ordenador que genere aleatoriamente N pares de coordenadas $x, y \in [0,1]$. Estima el valor de la integral anterior a partir de la fracción de puntos generados (x, y) que cumplan $y < f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

ii) Comprueba que el resultado de la integral converge lentamente como $1/\sqrt{N}$.

Ejercicio 2: Sobre el experimento de las agujas de Buffon



Sea φ el ángulo que forma una aguja (de longitud L) con la perpendicular a las rectas paralelas (separadas $d > L$).

i) Muestra que la probabilidad de que una aguja que forma un ángulo φ cruce una recta es

$$p(\varphi) = \frac{L \cos \varphi}{d}.$$

ii) Como todos los ángulos son equiprobables, demuestra que la probabilidad de que una aguja cruce una recta es

$$\mathrm{P} = \frac{2L}{\pi d}$$

integrando $p(\varphi)$ para todos los ángulos y dividiendo por el rango.

iii) Escribe un programa de ordenador que simule el lanzamiento de N agujas. Si p_N es la fracción de agujas que cortan las rectas paralelas, comprueba que

$$\pi_N = \frac{2L}{d} \frac{1}{p_N}$$

converge a π como $1/\sqrt{N}$. ¿Cuántas veces hay que “tirar la aguja" para obtener las primeras tres, cinco o siete cifras decimales de π?

Ejercicio 3: Coeficiente de correlación

Demuestra que el *coeficiente de correlación*

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

cumple $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$ y que si X e Y son independientes entonces $\varrho(X,Y) = 0$.

Ejercicio 4: Distribuciones más habituales

Dibuja las distribuciones más habituales (discretas: uniforme, binomial, geométrica, Poisson; continuas: uniforme, normal, exponencial, gamma) y familiarízate con las curvas.

Ejercicio 5: Suma de variables aleatorias discretas uniformes: tirada de dos dados

Encuentra cómo se distribuye la puntuación total al tirar dos dados no trucados y compara la distribución con la de la suma de variables uniformes continuas,

$$f_{S_2}(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s \mathrm{d}x = s & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ \displaystyle\int_{s-1}^1 \mathrm{d}x = 2 - s & \text{si } 1 \leq s \leq 2\,. \end{cases}$$

Ejercicio 6: Suma de variables continuas uniformes

Comprueba que la distribución de la suma de tres variables iid uniformes en $[0,1]$, $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$, viene dada por

$$f_{S_3}(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s \mathrm{d}x\ (s-x) = \frac{s^2}{2} & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ \displaystyle\int_0^{s-1} \mathrm{d}x\ (2-s+x) + \int_{s-1}^1 \mathrm{d}x\ (s-x) = -\frac{3}{2} + 3s - s^2 & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ \displaystyle\int_{s-2}^1 \mathrm{d}x\ (2-s+x) = \frac{(s-3)^2}{2} & \text{si } 2 \leq s \leq 3\,. \end{cases}$$