Grupos continuos

Ejercicio 1: Generadores y matrices de rotación

Halla los generadores y las matrices de rotación de las irreps de $j = 1/2$ y $j = 1$.

Ejercicio 2: Representación de $j = 1$

Demuestra que las matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

están relacionadas con

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

mediante una transformación de semejanza.

Ejercicio 3: Producto tensorial y coeficientes de Clebsch-Gordan

i) Considera el subespacio tensorial $T'_s(1) \subset V_2^2$ de tensores simétricos de rango 2. Comprueba que este subespacio permanece invariante bajo el grupo de las rotaciones $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Comprueba asimismo que el subespacio $T'_a(1) \subset V_2^2$ de tensores antisimétricos de rango 2 también es invariante.

ii) Encuentra los coeficientes de Clebsch-Gordan para el producto de las presentaciones de espines $j_1 = j_2 = 1/2$.

Ejercicio 4: Producto tensorial y matrices de rotación

Utilizando del producto tensorial de representaciones de SU(2) encuentra la matriz de rotación de la representación de espín $j = 3/2$.