Representaciones de grupos

Ejercicio 1: Representación bidimensional de D_3

Considera las seis transformaciones asociadas al grupo diédrico D_3. Si V es el espacio euclídeo 2-dim generado por $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, encuentra la representación unitaria de los elementos de D_3 en V con respecto a esa base. Demuestra que es irreducible.

Ejercicio 2: Reducción de representaciones

Determina la transformación de semejanza que reduce la representación de C_2

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a forma diagonal.

Ejercicio 3: Clases de conjugación

Sea T una rep matricial irred del grupo finito G y sea C una clase de conjugación en G. Demuestra que $\sum_{g\in C} T(g)$ es un múltiplo de la matriz identidad.

Ejercicio 4: Caracteres^n

Sea G un grupo de orden N y sea $\chi(g)$ un carácter de G. Probar que $N^{-1}\sum_{g\in G}[\chi(g)]^n$ es un entero no negativo para cualquier número natural n.

Ejercicio 5: Representación producto directo

Encuentra la representación producto directo de la irrep 2-dim del grupo D_3 del Ejercicio 1 por sí misma. Reduce la representación 4-dim resultante a sus componentes irreducibles.

Ejercicio 6: Irreps del grupo tetraédrico

El grupo tetraédrico T está formado por las rotaciones que dejan invariante un tetraedro regular (4 ejes triples y 3 ejes dobles). Enumera sus elementos, clases y subgrupos invariantes. Encuentra sus irreps y construye su tabla de caracteres.

Ejercicio 7: Tabla de caracteres

Enumera las irreps y construye la tabla de caracteres de los grupos S_4 y D_4.