Grupos de simetría

Ejercicio 1: Definiciones básicas

A partir de los axiomas de grupo demuestra las identidades:

i) $e^{-1} = e$.

ii) $a^{-1}a = e$.

iii) $ea = a, \forall a \in G$.

Demuestra también que e y a^{-1} son únicos y que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Ejercicio 2: Grupo de matrices

Sea S es el conjunto de las matrices 2×2 de determinante unidad:

$$A = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \ , \ wz - xy = 1 \ .$$

i) Demuestra que S con la multiplicación usual de matrices es un grupo.

ii) Encuentra los elementos de orden 2.

iii) Prueba que un elemento tiene orden 3 si $w + z + 1 = 0$.

Ejercicio 3: Tabla de multiplicar de un grupo

i) Encuentra la tabla de multiplicar del grupo $G = \{1, 2, 3, 4\}$ con la operación producto módulo 5 (se divide el resultado por 5 y se toma el resto).

ii) ¿Es G isomorfo a D_2 o a C_4?

Ejercicio 4: Clases de conjugación

i) Demuestra que cada elemento de un grupo pertenece a una clase y sólo a una.

ii) Demuestra que la identidad forma una clase de conjugación por sí misma.

Ejercicio 5: Clases de conjugación y subgrupos invariantes

i) Enumera los subgrupos y las clases de conjugación del grupo S_4. Encuentra sus subgrupos invariantes y sus grupos cocientes.

ii) Sabiendo que un *grupo simple* solo tiene subgrupos invariantes propios y que un *grupo semisimple* no tiene subgrupos invariantes propios abelianos. ¿Es S_4 un grupo simple? ¿Es un grupo semisimple?

Ejercicio 6: Producto directo y grupos cociente

Prueba que $G = H_1 \otimes H_2$ implica que $G/H_1 \simeq H_2$ y $G/H_2 \simeq H_1$.

Ejercicio 7: Grupo diédrico D_4

El grupo diédrico D_4 se compone de las simetrías de un cuadrado (rotaciones centrales y reflexiones respecto a los ejes vertical, horizontal y diagonales).

i) Encuentra los elementos del grupo, las clases, los subgrupos y los subgrupos invariantes. Identifica los grupos cocientes.

ii) ¿Es D_4 el grupo producto directo de alguno de sus subgrupos?

Ejercicio 8: Aplicación del teorema de Cayley

Usando el lema de reordenación, encuentra un subgrupo de S_4 isomorfo a D_2.

Ejercicio 9: Ciclos

Demuestra que todo grupo de orden n primo es isomorfo a C_n.