Espacios tensoriales

Ejercicio 1: Base ortonormal de un espacio tensorial

Dado el espacio de Hilbert bidimensional V_2 con base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, construye la base ortonormal del espacio tensorial $V_2^3 = V_2 \otimes V_2 \otimes V_2$.

Ejercicio 2: Operador sobre un espacio tensorial

Considera el espacio tensorial V_2^2. En una base ortonormal de V_2 el operador A define la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

i) Encuentra cómo actúa $\mathcal{A} \equiv A \otimes A$ sobre los tensores de V_2^2.

ii) Determina la acción de $\mathcal{A}$ sobre el tensor $|\alpha_{\mathrm{A}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$.

Ejercicio 3: Tensor antisimétrico

Considera el espacio tensorial V_3^3 y $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ una base ortonormal de V_3. Se define el tensor antisimétrico $|\varepsilon\rangle = \varepsilon^{ijk} |e_i e_j e_k\rangle$, donde $|e_i e_j e_k\rangle = |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle \otimes |e_k\rangle$ y

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación par de } (123) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación impar de } (123) \\ \ \ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

i) Encuentra $\langle \varepsilon | \varepsilon \rangle$.

ii) Demuestra que $|\varepsilon\rangle$ es un tensor invariante (sus componentes ε^{ijk} no cambian) bajo transformaciones ortogonales especiales R ($R^T R = \mathbb{1}$, $\det R = 1$).

Ejercicio 4: Rotación en el espacio de tensores

Una rotación de ángulo θ alrededor del eje y actúa sobre el espacio V_2 con base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R|+\rangle &= \ \ \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle, \\ R|-\rangle &= -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle. \end{aligned}$$

Encuentra cómo actúa esa rotación ($R \equiv R \otimes R$) sobre los siguientes tensores de V_2^2:

$$|\alpha_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \quad |\alpha_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle).$$

Hazlo también utilizando las componentes de los tensores escritas de dos formas distintas,

$$|\alpha_S\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right], \quad |\alpha_A\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

y

$$|\alpha_S\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |\alpha_A\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5: Otro ejemplo de operador sobre espacio tensorial

Considera el espacio tensorial V_2 con base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Encuentra la acción del siguiente operador definido en la base producto directo,

$$A \doteq a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

sobre el tensor

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle \otimes |+\rangle + \mathrm{i}\,|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |-\rangle).$$