Operadores lineales sobre espacios de Hilbert

Ejercicio 1: Definiciones básicas

i) Repasa las definiciones de cuerpo, anillo, espacio vectorial y álgebra.

ii) ¿Conoces algún ejemplo de cada uno?

Ejercicio 2: Autovalores y vectores propios de un operador hermítico

Demuestra que si un operador es hermítico entonces:

i) Sus autovalores son reales.

ii) Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Ejercicio 3: Conmutación y diagonalización simultánea de operadores hermíticos

i) Demuestra que si dos operadores hermíticos conmutan, entonces en alguna base ambos son simultáneamente diagonales.

ii) ¿Pueden los siguientes operadores diagonalizarse simultáneamente?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si es así, encuentra la base.

Ejercicio 4: Proyector

Considera los vectores

$$|v\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |w\rangle \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encuentra el proyector sobre el vector $|v\rangle$ y úsalo para encontrar la proyección de $|w\rangle$ en la dirección de $|v\rangle$.

Ejercicio 5: Bases ortonormales

Dada la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, comprueba que los vectores

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + \mathrm{i}\,|-\rangle), \quad |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - \mathrm{i}\,|-\rangle)$$

son también una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y encuentra la matriz del cambio de base. ¿Sabes qué sistema físico describe?

Ejercicio 6: Base de polinomios de Legendre

Las funciones $\varphi_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$, donde P_n son los polinomios de Legendre,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

definen una base ortonormal $\{|\varphi_n\rangle\} \doteq \{\langle x|\varphi_n\rangle\} = \{\varphi_n(x)\}$ de $L^2[-1,1]$ (funciones de cuadrado sumable en el intervalo $[-1,1]$).

i) Demuestra que $\langle \varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$.

ii) Calcula las componentes de la función $f(x) = x$ en la dirección de φ_0, φ_1 y φ_2.

Ejercicio 7: La delta de Dirac

La distribución delta de Dirac es una función generalizada definida por la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \delta(x - x_0) f(x) = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \mathrm{d}x\ \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

para toda función suave en $x = x_0$, o bien una función generalizada que verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \delta(x - x_0) = 1 \quad \text{y} \quad \delta(x) = 0,\ \forall x \neq 0.$$

i) Demuestra que la delta de Dirac se puede escribir como el límite cuando $L \to \infty$ ó $\epsilon \to 0^+$ de las siguientes funciones:

(a) $\delta_L(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-L}^{L} \mathrm{d}k\ \mathrm{e}^{ikx} = \dfrac{\sin Lx}{\pi x}$

(b) $\delta_\epsilon(x) = \dfrac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{1/2}}\ \mathrm{e}^{-x^2/2\epsilon^2}$

(c) $\delta_\epsilon(x) = \dfrac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$

(d) $\delta_\epsilon(x) = \dfrac{\theta(x+\frac{\epsilon}{2}) - \theta(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x}$,
donde $\theta(x) =$ es la función escalón de Heaviside.

ii) Comprueba las siguientes propiedades de la delta de Dirac:

(a) $\delta(x) = \delta(-x)$

(b) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$

(c) $x\delta(x) = 0$

(d) $x\delta'(x) = -\delta(x)$

(e) $x^2\delta'(x) = 0$

(f) $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x), \quad a \neq 0$

(g) $\delta(f(x)) = \displaystyle\sum_{f(x_i)=0} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i)$

(h) $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-a)\, \delta(x-b) = \delta(a-b)$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta'(x-a)\, \delta(x-b) = \delta'(b-a)$

(k) $\delta'(x) = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, k\mathrm{e}^{ikx}$