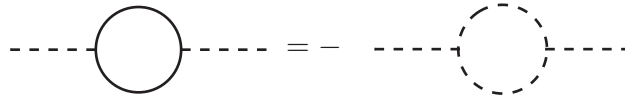


Formalismo de integrales de camino (II)

Ejercicio 1: Signo de un loop cerrado de fermiones

Comparando los siguientes diagramas con interacciones $\bar{\psi}\psi\phi$ y ϕ^3 , respectivamente, comprueba que un loop cerrado de fermiones tiene *signo contrario* que uno de escalares.



Ejercicio 2: Transformaciones gauge no abelianas

El lagrangiano de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2}\text{Tr} \left\{ \tilde{W}_{\mu\nu} \tilde{W}^{\mu\nu} \right\}$$

es obviamente invariante bajo transformaciones de gauge

$$\tilde{W}_{\mu\nu} \mapsto U \tilde{W}_{\mu\nu} U^\dagger, \quad U = \exp\{-iT_a \omega^a\}$$

donde los T_a son los N generadores del grupo con álgebra de Lie: $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$. Definimos los campos de gauge W_μ^a a partir de

$$\tilde{W}_{\mu\nu} \equiv T_a W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \tilde{W}_\nu - \partial_\nu \tilde{W}_\mu - ig[\tilde{W}_\mu, \tilde{W}_\nu], \quad \tilde{W}_\mu \equiv T_a W_\mu^a$$

1) Comprueba que podemos escribir

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu}$$

y que \mathcal{L}_{YM} contiene, además de los términos cinéticos, interacciones cúbicas y cuárticas entre los campos de gauge.

2) Comprueba que

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

3) Comprueba que bajo una transformación de gauge los campos se transforman

$$W_\mu^a \mapsto W_\mu^a - f_{abc} W_\mu^b \omega^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a$$

Ejercicio 3: El gauge axial

El gauge axial se define por la condición

$$t^\mu W_\mu^a = 0, \quad t_\mu t^\mu = -1$$

donde t^μ es un vector tipo espacial arbitrario.

- 1) Comprueba que en este gauge los fantasmas de Faddeev-Popov no se acoplan a los campos de gauge. Por tanto pueden integrarse y no aparecen ni siquiera en los *loops*.
- 2) Aparte de romper la invariancia Lorentz al fijar un vector t^μ , el precio que tenemos que pagar es un propagador de los campos de gauge muy complicado. Hállalo.

Ejercicio 4: Rotura espontánea de la simetría gauge y masas para los fantasmas de Faddeev-Popov

Considera el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi), \quad V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

donde ϕ es un campo escalar complejo, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y se ha introducido la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieqA_\mu$. Este lagrangiano es invariante bajo transformaciones de gauge U(1):

$$\phi(x) \mapsto e^{-iq\theta(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)$$

Si $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$ el potencial tiene un mínimo en $|\phi| = v/\sqrt{2}$ donde $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$. A nivel cuántico tenemos que redefinir entonces ϕ en términos de excitaciones η y χ sobre el vacío:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\chi(x)]$$

- 1) Encuentra el lagrangiano resultante y muestra que el campo de gauge A_μ adquiere una masa

$$M = |eqv|$$

También tenemos que añadir a \mathcal{L} un lagrangiano de *gauge fixing* (GF) y otro de Faddeev-Popov (FP).

- 2) Comprueba que, para cancelar términos de mezcla de A_μ y η en los propagadores, conviene introducir:

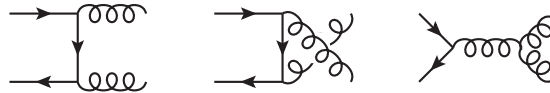
$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi}F^2[A_\mu] = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi M\chi)^2$$

- 3) Encuentra el lagrangiano de Faddeev-Popov asociado a la condición de gauge $F = 0$ que hemos impuesto. ¿Hay interacciones entre los fantasmas y el campo de gauge? ¿Pueden ignorarse los fantasmas en esta teoría abeliana espontáneamente rota?
- 4) Halla los propagadores de A_μ , η y χ . ¿Qué masa tienen los fantasmas en este gauge?

Ejercicio 5: Interpretación física de los fantasmas de Faddeev-Popov

★★

Considera la aniquilación de un quark y un antiquark (sin masa) en pares de gluones $q\bar{q} \rightarrow gg$. Calcula la sección eficaz de este proceso a nivel árbol en QCD, promediando (sumando) sobre las polarizaciones y los colores de los quarks (gluones). Hay tres diagramas: dos análogos a QED si cambiamos gluones por fotones y el tercero con una interacción cúbica de gluones:



En términos de variables de Mandelstam el resultado es:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{32\pi\alpha_s^2}{27s^2} \left[\frac{u}{t} + \frac{t}{u} - \frac{9}{4} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right) \right]$$

- 1) Realiza el cálculo primero sumando explícitamente las contribuciones de gluones físicos, tomando solamente las dos polarizaciones transversas de cada gluón:

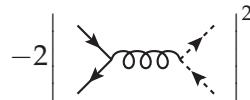
$$\epsilon^\mu(k, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon^\mu(k, 2) = (0, 0, 1, 0)$$

si su momento es $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$. Las polarizaciones longitudinales *forward* y *backward* $\epsilon^\mu(k, \pm) = (1, 0, 0, \pm 1)/\sqrt{2}$, respectivamente, no son físicas.

- 2) Si en cambio sustituyes la suma sobre polarizaciones de cada gluón por:

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(k, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(k, \lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu}$$

en el gauge de 't Hooft-Feynman, debe substraherse el efecto procedente de la aniquilación quark-antiquark en un par de fantasmas:



- 3) Argumenta este resultado.

La conclusión es que los fantasmas de Faddeev-Popov sirven para cancelar los efectos de las polarizaciones no físicas de los gluones.

Ayuda: Conviene usar la siguiente igualdad que involucra a las dos polarizaciones transversas y las dos longitudinales definidas anteriormente:

$$-g^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^2 \epsilon^\mu(k, i) \epsilon^\nu(k, i) - \epsilon^\mu(k, +) \epsilon^\nu(k, -) - \epsilon^\mu(k, -) \epsilon^\nu(k, +)$$

y comprobar que si $\mathcal{M}(i, j) = \mathcal{M}_{\mu\nu} \epsilon^\mu(k_1, i) \epsilon^\nu(k_2, j)$ entonces $\mathcal{M}(+, j) \propto k_2 \cdot \epsilon_2(j)$ y por tanto $\mathcal{M}(+, +) = \mathcal{M}(+, T) = 0$, pero $\mathcal{M}(+, -) = \mathcal{M}(-, +) \neq 0$.

Reglas de Feynman (índices de color: $i, j = 1, 2, 3$ y de gluón: $a, b, c = 1, \dots, 8$):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } = ig\gamma^\mu (t_a)_{ij} \\
 & \text{Diagram 2: } = gf_{abc}p^\mu \\
 & \text{Diagram 3: } = gf_{abc}[g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\nu\rho}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\rho\mu}(k_3 - k_1)_\nu] \quad (\text{entrantes})
 \end{aligned}$$

Relaciones de interés (se supone suma sobre índices repetidos):

$$\begin{aligned}
 \text{SU}(N) : \quad & [t_a, t_b] = if_{abc}t_c, \quad t_a^\dagger = t_a \quad (f_{abc} \text{ completamente antisimétrica}) \\
 & t_a t_a = C_2(r)\mathbb{1}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (\text{irrep fundamental}) \\
 & t_a t_b t_a = \left[C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G) \right] t_b, \quad C_2(G) = N \quad (\text{irrep adjunta}) \\
 & f_{abc}f_{abd} = C_2(G)\delta_{cd} \\
 & f_{abc}t_a t_b = \frac{i}{2}C_2(G)t_c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{SU}(3) : \quad & C_2(r) = \frac{4}{3} \quad (\text{irrep fundamental}), \quad C_2(G) = 3 \\
 & (t_b t_a)_{ij} (t_b t_a)_{ij}^* = (t_b t_a)_{ij} (t_b t_a)_{ji}^\dagger = (t_b t_a)_{ij} (t_a t_b)_{ji} = \text{Tr}(t_a t_a t_b t_b) \\
 & = 3(C_2(r))^2 = \frac{16}{3} \\
 & (t_b t_a)_{ij} (t_a t_b)_{ij}^* = (t_b t_a)_{ij} (t_a t_b)_{ji}^\dagger = (t_b t_a)_{ij} (t_b t_a)_{ji} = \text{Tr}(t_a t_b t_a t_b) \\
 & = \left[C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G) \right] \text{Tr}(t_b t_b) = 3C_2(r) \left[C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G) \right] = -\frac{2}{3} \\
 & f_{abc}f_{abd} (t_c)_{ij} (t_d^*)_{ij} = C_2(G)\text{Tr}(t_a t_a) = 3C_2(G)C_2(r) = 12 \\
 & f_{abc} (t_a t_b)_{ij} (t_c^*)_{ij} = \frac{i}{2}C_2(G)\text{Tr}(t_c t_c) = i\frac{3}{2}C_2(G)C_2(r) = 6i
 \end{aligned}$$

Para promediar sobre los colores de los quarks hay que multiplicar por $(1/3)^2 = 1/9$ las sumas anteriores.