Formalismo de integrales de camino (I)

Ejercicio 1: Aproximación de fase estacionaria

Considera la función oscilatoria

$$f(x,t) = \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)} \,, \quad \varphi(\omega) = k(\omega)x - \omega t \,.$$

Decimos que la fase φ es *estacionaria* si

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{t}{x} \,, \quad \text{lo que ocurre para cierto } \omega = \omega_0(x,t) \,.$$

Desarrollando $\varphi(\omega)$ en serie de Taylor alrededor de $\omega = \omega_0$ muestra que cuando x es relativamente grande entonces

$$f(x,t) \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega_0)} \,.$$

Ejercicio 2: Límite clásico

Considera una partícula de masa $m = 1$ g que se mueve libremente entre (x_i, t_i) y (x_f, t_f) a escalas macroscópicas $\Delta x = x_f - x_i = 1$ m y $\Delta t = t_f - t_i = 1$ s.

1) Encuentra su trayectoria $x(t)$ aplicando el principio de mínima acción (camino clásico): movimiento rectilíneo y uniforme. Halla la acción mínima.

2) Calcula la acción si la partícula siguiera un camino distinto dado, por ejemplo, por el movimiento uniformemente acelerado entre esos dos puntos. Nótese que este camino contribuye a la transición entre los estados inicial y final, pero la diferencia de fase $\delta S/\hbar$ con el camino clásico es enorme ($\hbar \simeq 6.6 \times 10^{-34}$ J s).

3) Calcula ahora la diferencia de fase entre ambos caminos si la partícula es muy ligera, e.g. un electrón ($m \sim 10^{-27}$ g), o bien, si la escala es muy pequeña, e.g. $\Delta x = 1$ fm.

Para los caminos que se alejan del camino clásico ($\delta S \gg \hbar$) la fase oscila muy rápidamente y por tanto no contribuyen a la transición, como hemos visto en el ejercicio anterior. En cambio, si las dimensiones del sistema son pequeñas, los otros caminos también contribuyen.

Ejercicio 3: Función de Green de cuatro puntos

Encuentra la función de Green de cuatro puntos de la teoría $\lambda\phi^4$ a primer orden en teoría de perturbaciones a partir del funcional generador $Z[J]$.

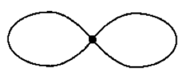
Ejercicio 4: Función de Green conectada de cuatro puntos

Utiliza el resultado anterior para comprobar que el funcional generador $W[J]$ genera la función de Green conectada de cuatro puntos, a partir de

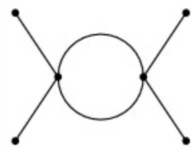
$$-\mathrm{i}G_c^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = (-\mathrm{i})^n \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} = (-\mathrm{i})^{n+1} \left.\frac{\delta^n \log Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}$$

Ejercicio 5: Factores de simetría

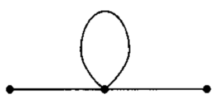
Usando el método funcional, encuentra los factores de simetría $1/S$ de los siguientes diagramas de Feynman de la teoría $\lambda\phi^4$:



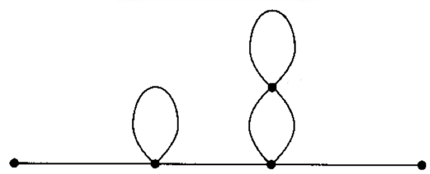
$S = 8$



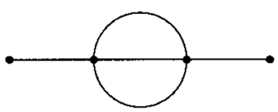
$S = 2$



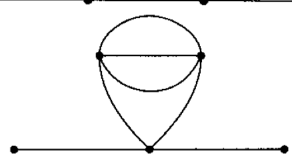
$S = 2$



$S = 8$



$S = 6$



$S = 12$