	$p(e_j)$	***0,40***	***0,40***	***0,20***	
Abastecimiento		***Demanda***			
		e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
	a_1 ***(200)***	800	800	800	800
	a_2 ***(300)***	300	1200	1200	**840**
	a_3 ***(400)***	-200	700	1600	520

$c_1 =$ me aseguran una demanda de 200

	$p(e_j / c_1)$	***1***	***0***	***0***	
Abastecimiento		***Demanda***			
		e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
	a_1 ***(200)***	800	800	800	**800**
	a_2 ***(300)***	300	1200	1200	300
	a_3 ***(400)***	-200	700	1600	-200

$c_2 =$ me aseguran una demanda de 300

	$p(e_j / c_2)$	***0***	***1***	***0***	
Abastecimiento		***Demanda***			
		e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
	a_1 ***(200)***	800	800	800	800
	a_2 ***(300)***	300	1200	1200	**1200**
	a_3 ***(400)***	-200	700	1600	700

$c_3 =$ me aseguran una demanda de 400

	$p(e_j / c_3)$	***0***	***0***	***1***	
Abastecimiento		***Demanda***			
		e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
	a_1 ***(200)***	800	800	800	800
	a_2 ***(300)***	300	1200	1200	1200
	a_3 ***(400)***	-200	700	1600	**1600**

$$VMEIP = p(c_1)\times 800 + p(c_2)\times 1200 + p(c_3)\times 1600 = 1120$$

$$VMEIP = 0,4\times 800 + 0,4\times 1200 + 0,2\times 1600 = 1120$$

$p(e_j)$	***0,40***	***0,40***	***0,20***	
Abastecimiento	***Demanda***			
	e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
a_1 ***(200)***	800	800	800	800
a_2 ***(300)***	300	1200	1200	**840**
a_3 ***(400)***	-200	700	1600	520

***VIP=VMEIP-VME(máximo)*=1120-840=280**

$p(e_j)$	***0,40***	***0,40***	***0,20***	
Abastecimiento	***Demanda***			
	e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
a_1 ***(200)***	800	800	800	800
a_2 ***(300)***	300	1200	1200	**840**
a_3 ***(400)***	-200	700	1600	520

$c_3 =$ todo parece indicar que este año la demanda será de 400

$p(e_j / c_3)$	***0,1***	***0,1***	***0,8***	
Abastecimiento	***Demanda***			
	e_1 ***(200)***	e_2 ***(300)***	e_3 ***(400)***	***VME***
a_1 ***(200)***	800	800	800	800
a_2 ***(300)***	300	1200	1200	1110
a_3 ***(400)***	-200	700	1600	**1330**

10. Decisión Bayesiana.

10.1 Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes.
10.2 Interpretaciones del concepto de probabilidad.
10.3 Modificación de las creencias del decisor.
10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta.
Valor de la información imperfecta.

10. Decisión Bayesiana.

10.1 Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes.

Sean *A* y *B* dos sucesos y sabemos que ocurre *A*, ¿cómo afecta esta información a la probabilidad de *B*?

Notamos como *P*(*B/A*) a la **probabilidad de *B* condicionada a *A***, es decir a la probabilidad de *B* dado que sabemos que se da el suceso *A*. Se define como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad P(B/A)P(A) = P(A \cap B)$$

Puede ocurrir que la probabilidad de *B* no se vea alterada por la ocurrencia de *A*, es decir, $P(B/A) = P(B)$ .En este caso se dice que *A* y *B* son **sucesos independientes**.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral, entonces para cualquier suceso *B* se tiene que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n) = P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n) = \sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j)$$

TEOREMA DE BAYES. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral y *B* un suceso cualquiera cuya probabilidad sea estrictamente mayor que cero. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j)}$$

La producción de una factoría se realiza en cuatro máquinas, $M_1, M_2, M_3\ y\ M_4$. Diariamente la producción de cada una de las máquinas es la siguiente:

M_1	M_2	M_3	M_4	TOTAL
600	500	350	250	1700

Además sabemos que los porcentajes de piezas defectuosas producidas por cada una de las máquinas son:

M_1	M_2	M_3	M_4
4%	3,5%	4,6%	2%

a) Si las piezas se almacenan conjuntamente, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar una pieza al azar ésta sea defectuosa?

b) Se ha seleccionado una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida en la máquina M_2?

$$\mathsf{P}(M_1)=\frac{600}{1700} \qquad \mathsf{P}(M_2)=\frac{500}{1700} \qquad \mathsf{P}(M_3)=\frac{350}{1700} \qquad \mathsf{P}(M_4)=\frac{250}{1700}$$

$$\mathsf{P}(D)=¿? \qquad \mathsf{P}\left(D/M_1\right)=0,04 \qquad \mathsf{P}\left(D/M_2\right)=0,035 \qquad \mathsf{P}\left(D/M_3\right)=0,046 \qquad \mathsf{P}\left(D/M_4\right)=0,02$$

$$\mathsf{P}(M_1)=\frac{600}{1700} \qquad \mathsf{P}(M_2)=\frac{500}{1700} \qquad \mathsf{P}(M_3)=\frac{350}{1700} \qquad \mathsf{P}(M_4)=\frac{250}{1700}$$

$$\mathsf{P}(D)=¿? \qquad \mathsf{P}\left(D/M_1\right)=0,04 \qquad \mathsf{P}\left(D/M_2\right)=0,035 \qquad \mathsf{P}\left(D/M_3\right)=0,046 \qquad \mathsf{P}\left(D/M_4\right)=0,02$$

a) Según la fórmula de la probabilidad total

$$\mathsf{P}(D)=\sum_{i=1}^{4}\mathsf{P}\left(D/M_i\right)\mathsf{P}(M_i)=\left(\frac{4}{100}\frac{600}{1700}\right)+\left(\frac{3,5}{100}\frac{500}{1700}\right)+\left(\frac{4,6}{100}\frac{350}{1700}\right)+\left(\frac{2}{100}\frac{250}{1700}\right)=\frac{6260}{170000}=0,03682353$$

PROBABILIDAD DE QUE UN EXPERTO NOS DÉ UNA DETERMINADA INFORMACIÓN IMPERFERCTA

b) Según la fórmula de Bayes

$$\mathsf{P}\left(M_2/D\right)=\frac{\mathsf{P}\left(D/M_2\right)\mathsf{P}(M_2)}{\mathsf{P}(D)}=\frac{\mathsf{P}\left(D/M_2\right)\mathsf{P}(M_2)}{\sum_{i=1}^{4}\mathsf{P}\left(D/M_i\right)\mathsf{P}(M_i)}=\frac{\frac{3,5}{100}\frac{500}{1700}}{\frac{6260}{170000}}=\frac{1750}{6260}=0,27955$$

PROBABILIDADES A POSTERIORI DE LOS ESTADOS DE LA NATURALEZA

10. Decisión Bayesiana.

10.2 Interpretación del concepto de probabilidad

Concepto clásico de la probabilidad o de Laplace.

Concepto Frecuentista.

Concepto Subjetivista.
La probabilidad representa el **grado de creencia** del observador sobre el estado que adoptará el sistema. Así en la Teoría de la Decisión, $P(e_i)$ representa el **grado de creencia del decisor sobre que acontezca ese estado**, cuanto mayor sea su creencia en que ocurrirá dicho suceso mayor será $P(e_i)$.

10. Decisión Bayesiana.

10.3 Modificación de las creencias del decisor.

- $P(e_i)$ es la probabilidad **a priori.**
- D es la información que nos dan y hace cambiar nuestro grado de creencia o probabilidad de que suceda un estado de la naturaleza u otro.
- $P(e_i/D)$ es la probabilidad **a posteriori.**

El **teorema de Bayes** permite obtener las probabilidades a posteriori a partir de las probabilidades a priori $P(e_i)$ y de las probabilidades de que nos den una información D, $P(D/e_i)$

$$P(e_i / D) = \frac{P(D / e_i) P(e_i)}{P(D)} = \frac{P(D / e_i) P(e_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(D / e_j) P(e_j)}$$

Las probabilidades $P(D/e_i)$, llamadas verosimilitudes, son conocidas o fáciles de obtener.

El Teorema de Bayes describe cómo aprendemos de la experiencia, cómo se modifican nuestras opiniones, expresadas mediante probabilidades sobre los estados de la naturaleza, al incorporar nueva información.

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Ejemplo 10.1. Una comunidad de vecinos desea incorporar una red local de internet en su edificio. Recibe los presupuestos de dos empresas instaladoras: el de la empresa A por 10000€ y el de la empresa B por 7500€. No obstante, la existencia de antenas colectivas en la inmediaciones, puede provocar interferencias; en el caso de que se produzcan, sería necesario añadir un nuevo aparato que generaría unos costes adicionales de 4000€ de los cuales la empresa A sólo incluiría el 20% de los mismos al presupuesto, mientras que la empresa B los incluiría en su totalidad.
Después de recabar información sobre las posibilidades de que haya o no interferencias, el presidente de la comunidad no logra obtenerla, por lo que considera que ambas situaciones son equiprobables.

a) ¿Cuál es la mejor alternativa para la comunidad de vecinos?
b) Supongamos ahora que el presidente puede contratar un perito quien, por 100 euros le realizaría unas mediciones. La probabilidad de que el perito acierte cuando no hay interferencias es de 0,9 y de que no acierte cuando hay interferencias es de 0,2 ¿cuál sería entonces la decisión a adoptar por la comunidad? La primera decisión que debe tomar el presidente es si contrata o no un perito.
c) ¿Qué cantidad estaríamos dispuestos a pagar por contar con la información adicional?

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Probabilidades	0,5	0,5	
ESTADOS → Alternativas ↓	NO HAY INTERFERENCIAS	SÍ HAY INTERFERENCIAS	VME
Empresa A	10000	10800	10400
Empresa B	7500	11500	9500

$10400 = (10000 \times 0,5) + (10800 \times 0,5)$ $\qquad 9500 = (7500 \times 0,5) + (11500 \times 0,5)$

La empresa escogida sería la B y el gasto medio asociado sería de 9500 euros.

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Las **probabilidades de acierto y fallo del experto** son:

ESTADOS → Informe del experto ↓	NO HAY INTERFERENCIAS	SÍ HAY INTERFERENCIAS
No hay interferencias	0,9	0,2
Sí hay interferencias	0,1	0,8

Obsérvese que la información no es perfecta, no hay una total seguridad en las afirmaciones del experto.

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

$e_1 =$ *NO HAY INTERFERENCIAS* $\quad e_2 =$ *SÍ HAY INTERFERENCIAS*

$c_1 =$ *Informa: no hay interferencias* $\quad c_2 =$ *Informa: sí hay interferencias*

Verosimilitudes

ESTADOS → Informe del experto ↓	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS
c_1 No hay interferencias	$P\left(c_1/e_1\right) = 0,9$	$P\left(c_1/e_2\right) = 0,2$
c_2 Sí hay interferencias	$P\left(c_2/e_1\right) = 0,1$	$P\left(c_2/e_2\right) = 0,8$
SUMA:	1	1

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Con la ayuda del teorema de Bayes obtenemos las **probabilidades a posteriori**:

$$P\left(e_1/c_1\right)=\frac{P\left(c_1/e_1\right)P(e_1)}{\sum_{j=1}^{2}P\left(c_1/e_j\right)P(e_j)}=\frac{0,9\times 0,5}{\left(0,9\times 0,5\right)+\left(0,2\times 0,5\right)}=0,81818$$

$$P\left(e_2/c_1\right)=\frac{P\left(c_1/e_2\right)P(e_2)}{\sum_{j=1}^{2}P\left(c_1/e_j\right)P(e_j)}=\frac{0,2\times 0,5}{\left(0,9\times 0,5\right)+\left(0,2\times 0,5\right)}=0,18182$$

$$P\left(e_1/c_2\right)=\frac{P\left(c_2/e_1\right)P(e_1)}{\sum_{j=1}^{2}P\left(c_2/e_j\right)P(e_j)}=\frac{0,1\times 0,5}{\left(0,1\times 0,5\right)+\left(0,8\times 0,5\right)}=0,11111$$

$$P\left(e_2/c_2\right)=\frac{P\left(c_2/e_2\right)P(e_2)}{\sum_{j=1}^{2}P\left(c_2/e_j\right)P(e_j)}=\frac{0,8\times 0,5}{\left(0,1\times 0,5\right)+\left(0,8\times 0,5\right)}=0,88889$$

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Informe del experto: No hay interferencias (c_1)			
	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS	suma
$P(e_i)$	**0,5**	**0,5**	**1**
$P(c_1/e_i)$	0,9	0,2	
$P(c_1/e_i)P(e_i)$	0,45	0,10	$P(c_1)=\sum_{i=1}^{n}P(c_1/e_i)P(e_i)=0,55$
$P\left(e_i/c_1\right)=\frac{P(c_1/e_i)P(e_i)}{P(c_1)}$	**0,81818**	**0,18182**	**1**

Informe del experto: Sí hay interferencias (c_2)			
	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS	suma
$P(e_i)$	**0,5**	**0,5**	**1**
$P(c_2/e_i)$	0,1	0,8	
$P(c_2/e_i)P(e_i)$	0,05	0,40	$P(c_2)=\sum_{i=1}^{n}P(c_2/e_i)P(e_i)=0,45$
$P\left(e_i/c_2\right)=\frac{P(c_2/e_i)P(e_i)}{P(c_2)}$	**0,11111**	**0,88889**	**1**

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Informe del experto: No hay interferencias (c_1)			
$P\left(e_i/c_1\right) \rightarrow$	**0,81818**	**0,18182**	
ESTADOS → Alternativas ↓	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS	VME/c_1
Empresa A	10000	10800	10145,456
Empresa B	7500	11500	**8227,28**

$$10145,456 = (10000 \times 0,81818) + (10800 \times 0,18182)$$

$$8227,28 = (7500 \times 0,81818) + (11500 \times 0,18182)$$

Si el informe del experto es que no hay interferencias, la empresa escogida sería la B y el gasto medio asociado sería de 8227,28 euros.

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Informe del experto: Sí hay interferencias (c_2)			
$P\left(e_i/c_2\right) \rightarrow$	**0,11111**	**0,88889**	
ESTADOS → Alternativas ↓	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS	VME/c_2
Empresa A	10000	10800	**10711,11**
Empresa B	7500	11500	11055,56

$$10711,112 = (10000 \times 0,11111) + (10800 \times 0,88889)$$

$$11055,56 = (7500 \times 0,11111) + (11500 \times 0,88889)$$

Si el informe del experto es que sí hay interferencias, la empresa escogida sería la A y el gasto medio asociado sería de 10711,11 euros.

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

El experto dirá que no hay interferencias (c_1) con una probabilidad:

$$P(c_1)=\sum_{j=1}^{2}P\left(c_1/e_j\right)P(e_j)=(0{,}9\times0{,}5)+(0{,}2\times0{,}5)=0{,}55$$

El experto dirá que si hay interferencias (c_2) con una probabilidad:

$$P(c_2)=\sum_{j=1}^{2}P\left(c_2/e_j\right)P(e_j)=(0{,}1\times0{,}5)+(0{,}8\times0{,}5)=0{,}45$$

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

Informe del experto: No hay interferencias (c_1)			
$P\left(e/c_1\right)\rightarrow$	**0,81818**	**0,18182**	
ESTADOS → Alternativas ↓	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS	VME/c_1
Empresa A	10000	10800	10145,456
Empresa B	7500	11500	**8227,28**
Informe del experto: Sí hay interferencias (c_2)			
$P\left(e/c_2\right)\rightarrow$	**0,11111**	**0,88889**	
ESTADOS → Alternativas ↓	e_1 NO HAY INTERFERENCIAS	e_2 SÍ HAY INTERFERENCIAS	VME/c_2
Empresa A	10000	10800	**10711,11**
Empresa B	7500	11500	11055,56

VMEII$=\left(8227{,}28\times P(c_1)\right)+\left(10711{,}11\times P(c_2)\right)=\left(8227{,}28\times0{,}55\right)+\left(10711{,}11\times0{,}45\right)=9345$

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

$$\textbf{\textit{VMEII}}=\left(8227{,}28\times P\left(c_1\right)\right)+\left(10711{,}11\times P\left(c_2\right)\right)=\left(8227{,}28\times 0{,}55\right)+\left(10711{,}11\times 0{,}45\right)=9345$$

Probabilidades	0,5	0,5	
ESTADOS → Alternativas ↓	NO HAY INTERFERENCIAS	SÍ HAY INTERFERENCIAS	VME
Empresa A	10000	10800	10400
Empresa B	7500	11500	**9500**

VII=VME(mínimo)-VMEII=9500-9345=155

10. Decisión Bayesiana.

10.4 Valor monetario esperado con información imperfecta. Valor de la información imperfecta.

VII=VME(mínimo)-VMEII=9500-9345=155

Cuando, en lugar de costes como en este ejemplo, trabajemos con beneficios, el valor de la información imperfecta *VII* se calculará restando al valor monetario esperado con información imperfecta *VMEII* (que será mayor) el valor monetario esperado sin dicha información *VME(máximo)* (que será menor).

VII = VMEII - VME(máximo)