5.- Probabilidad.

5.1 Definición de probabilidad

5.2 Asignación de probabilidades

5.3 Probabilidad condicionada

5.4 Sucesos dependientes e independientes

5.5 Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes

1

5.1 Definición de probabilidad.

fenómenos determinísticos y aleatorios

x_i	n_i	f_i
1	45	0,15
2	57	0,19
3	51	0,17
4	48	0,16
5	54	0,18
6	45	0,15
total	*n=300*	1

x_i	p_i
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$0 \leq f_i \leq 1.$

$f(par) = f\left(x_2 \cup x_4 \cup x_6\right) = f_2 + f_4 + f_6 = 0,19 + 0,16 + 0,15 = 0,50$

$\sum_{i=1}^{6} f_i = 1$

2

5.1 Definición de probabilidad.

suceso

A={*obtener par*}, B={*obtener impar*}, C={*obtener un 3*},

D={*obtener un número mayor o igual que 4*}, E={*obtener un número menor que 4*}

suceso elemental, ω_i

suceso seguro, Ω

suceso imposible, $\varnothing$

ω_i	p_i
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

3

5.1 Definición de probabilidad.

Operaciones y relaciones con sucesos:

A **implica** B, $A \subseteq B$

unión de dos sucesos A y B, $A \cup B$ $\quad B=\{impar\}$, $D=\{mayor\ o\ igual\ que\ 4\}$, $B \cup D = \{1,3,4,5,6\}$

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cup A = A$$

intersección de dos sucesos A y B, $A \cap B$, $\quad B=\{impar\}$, $D=\{mayor\ o\ igual\ que\ 4\}$, $B \cap D = \{5\}$.

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cap A = A$$

propiedades distributivas:

5x(4+6)=(5x4)+(5x6)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

propiedad de absorción:

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

4

5.1 Definición de probabilidad.

diferencia de dos sucesos, $A-B$ $B=\{impar\}$, $E=\{menor\ que\ 4\}$, $B-E=\{5\}$, $E-B=\{2\}$.

suceso contrario (o complementario) de *A*, $\overline{A}=\Omega-A$. Propiedades:

$A=\{par\}$, $\overline{A}=B=\{impar\}$,

$$\overline{\overline{A}}=A$$

$$A\subseteq B \quad\Rightarrow\quad \overline{B}\subseteq\overline{A}$$

$$\overline{\varnothing}=\Omega \qquad \overline{\Omega}=\varnothing$$

$$A\bigcap\overline{A}=\varnothing \qquad A\bigcup\overline{A}=\Omega$$

$$A-B=A\bigcap\overline{B}$$

$$\overline{A_1\bigcup\ldots\bigcup A_n}=\overline{A_1}\bigcap\ldots\bigcap\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1\bigcap\ldots\bigcap A_n}=\overline{A_1}\bigcup\ldots\bigcup\overline{A_n}$$

A y *B* son **incompatibles** si $A\bigcap B=\varnothing$

$A=\{par\}$, $B=\{5\}$

5

5.1 Definición de probabilidad.

x_i	p_i
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Definición de probabilidad.

$$(\Omega,\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathbb{R}$$

$$A\in\mathscr{A} \quad\to\quad \mathsf{P}(A)\in\mathbb{R}$$

Condiciones:

1.- $\mathsf{P}(A)\geq 0 \qquad \forall A\in\mathscr{A}$

2.- Sean $A_1, ..., A_n$ sucesos incompatibles, $\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)$

3.- $\mathsf{P}(\Omega)=1$

$$0\leq f_i\leq 1.$$

$$f(par)=f(x_2\bigcup x_4\bigcup x_6)=f_2+f_4+f_6=0{,}19+0{,}16+0{,}15=0{,}50$$

$$\sum_{i=1}^{6}f_i=1$$

6

5.1 Definición de probabilidad.

Propiedades:

1.- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\quad 1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow 1 - P(A) = P(\overline{A})$

2.- $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

3.- Si $B \subseteq A \Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(B)$

4.- Si $B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

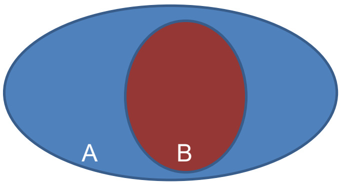
5.- $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$

6.- Sucesos compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7.- $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

7

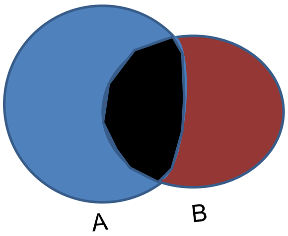
3.-



P(A-B)=P(A)-P(B)

8

6.-



P(A) +P(B) -P(A∩B)=P(AUB)

5.2 Asignación de probabilidades.

x_i	p_i
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Problema de la asignación de probabilidades.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}(\omega_i)$$

concepción clásica o de Laplace

$$\mathrm{P}(\omega_i) = \frac{1}{n} \quad \forall \omega_i$$

regla de Laplace

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

5.2 Asignación de probabilidades.

Problema de la asignación de probabilidades.

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathsf{P}(\omega_i)$$

concepción frecuentista

x_i	n_i	f_i
1	45	0,15
2	57	0,19
3	51	0,17
4	48	0,16
5	54	0,18
6	45	0,15
total	*n=300*	1

$\longrightarrow$

x_i	n_i	f_i
1	456	0,152
2	561	0,187
3	516	0,172
4	483	0,161
5	534	0,178
6	450	0,150
total	*n=3000*	1

concepción subjetiva

(la probabilidad de que la selección española gane el próximo mundial de fútbol es de 4/5)

11

►***EJEMPLO 5.1***

Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos en el lanzamiento de un dado según la concepción clásica de Laplace y según la concepción frecuentista (tomando para este último caso como valores estables de las frecuencias los observados en los 3000 lanzamientos). Expréselo de distintas formas donde se pueda.

A={obtener par}, B={obtener impar}, C={obtener un 3}, D={obtener un número mayor o igual que 4}, E={obtener un número menor que 4}.

12

A={obtener par}, B={obtener impar}, C={obtener un 3},

D={obtener un número mayor o igual que 4}, E={obtener un número menor que 4}.

Concepción clásica:

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{\omega_i\in A}\mathsf{P}(\omega_i)=\sum_{\omega_i\in A}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$\mathsf{P}(B)=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\mathsf{P}(\overline{A})=1-\mathsf{P}(A)=1-0,5=0,5$$

$$\mathsf{P}(C)=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{1}{6}=0,1\widehat{6}$$

$$\mathsf{P}(D)=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$\mathsf{P}(E)=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\mathsf{P}(\overline{D})=1-\mathsf{P}(D)=1-0,5=0,5$$

13

A={obtener par}, B={obtener impar}, C={obtener un 3},

D={obtener un número mayor o igual que 4}, E={obtener un número menor que 4}.

Concepción frecuentista:

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{\omega_i\in A}\mathsf{P}(\omega_i)=0,187+0,161+0,150=0,498$$

$$\mathsf{P}(B)=\sum_{\omega_i\in B}\mathsf{P}(\omega_i)=0,152+0,172+0,178=0,502=\mathsf{P}(\overline{A})=1-\mathsf{P}(A)=1-0,498=0,502$$

$$\mathsf{P}(C)=0,172$$

$$\mathsf{P}(D)=\sum_{\omega_i\in D}\mathsf{P}(\omega_i)=0,161+0,178+0,150=0,489$$

$$\mathsf{P}(E)=\sum_{\omega_i\in E}\mathsf{P}(\omega_i)=0,152+0,187+0,172=0,511=\mathsf{P}(\overline{D})=1-\mathsf{P}(D)=1-0,489=0,511$$

14

►***EJEMPLO 5.2***

En una ciudad se publican tres periódicos (*A, B* y *C*). Se sabe que un 60% de la población está suscrita al periódico *A*, un 40% a *B*, un 35% a *C*, un 20% a *A* y *B*, un 15% a *A* y *C*, un 25% a *B* y *C*, y un 10% a los tres periódicos. Se le pregunta a un individuo elegido al azar ¿qué probabilidad hay de que responda que está suscrito a algún periódico?

P(suscrito a A o suscrito a B o suscrito a C)=P(AUBUC)

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}\left(A\cup\left(B\cup C\right)\right)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\cup C)-\mathrm{P}\left(A\cap\left(B\cup C\right)\right)=$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}\left(A\cap\left(B\cup C\right)\right)=$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}\left(\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)\right)=$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)-\left(\mathrm{P}\left(A\cap B\right)+\mathrm{P}\left(A\cap C\right)-\mathrm{P}\left(A\cap B\cap C\right)\right)=$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}\left(A\cap B\right)-\mathrm{P}\left(A\cap C\right)+\mathrm{P}\left(A\cap B\cap C\right)=$$

$$=\frac{60}{100}+\frac{40}{100}+\frac{35}{100}-\frac{25}{100}-\frac{20}{100}-\frac{15}{100}+\frac{10}{100}=\frac{85}{100}=0,85$$

P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)

15

P(AUBUCUD)=
P(A)+P(B)+ P(C)+P(D)
-P(A∩B)-P(A∩C)-P(A∩D)-P(B∩C)-P(B∩D)-P(C∩D)
+P(A∩B∩C)+P(A∩B∩D)+P(A∩C∩D)+P(B∩C∩D)
-P(A∩B∩C∩D)

16

5.3 Probabilidad condicionada.

$$\mathrm{P}\left(B/A\right)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} \qquad \mathrm{P}(A)>0$$

Verifica las **condiciones de una medida de probabilidad**:

1.- $\mathrm{P}\left(B/A\right)\geq 0 \qquad \forall B\in \mathcal{A}$

2.- Sean $B_1,\dots,B_n$ sucesos incompatibles, $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i \Big/ A\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left(B_i/A\right)$

3.- $\mathrm{P}\left(\Omega/A\right)=1$

Demostración:

1.- $\mathrm{P}\left(B/A\right)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} \qquad \mathrm{P}(A)>0 \quad y \quad \mathrm{P}(B\cap A)\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}\geq 0$

2.- $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i \Big/ A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\cap A\right)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i\cap A)\right)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(B_i\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{P}(B_i\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left(B_i/A\right)$

3.- $\mathrm{P}\left(\Omega/A\right)=\frac{\mathrm{P}(\Omega\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$

	Enseñanza obligatoria	Bachillerato	Universitarios	TOTAL
hombres	250	160	40	450
mujeres	350	140	60	550
TOTAL	600	300	100	1000

Entre los hombres (*H* sería el suceso conocido o que ha ocurrido) la frecuencia relativa de los que completaron los estudios universitarios, *U,* es:

$$f\left(U/H\right)=\frac{40}{450}=\frac{\frac{40}{1000}}{\frac{450}{1000}}=\frac{f\left(U\cap H\right)}{f\left(H\right)}$$

Mientras que la frecuencia relativa de los que completaron los estudios universitarios (sin imponer ninguna condición sobre el sexo) es:

$$f\left(U\right)=\frac{100}{1000}$$

19

5.3 Probabilidad condicionada.

Por tanto, todas las propiedades de la probabilidad (no condicionada) también se cumplen:

$$\mathsf{P}\left(\overline{A}/C\right)=1-\mathsf{P}\left(A/C\right)$$

$$B\subseteq A \qquad \mathsf{P}\left(A-B/C\right)=\mathsf{P}\left(A/C\right)-\mathsf{P}\left(B/C\right)$$

$$\mathsf{P}\left(A\cup B/C\right)=\mathsf{P}\left(A/C\right)+\mathsf{P}\left(B/C\right)-\mathsf{P}\left(A\cap B/C\right)$$

$$\ldots$$

20

5.3 Probabilidad condicionada.

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad P(A)>0 \qquad\qquad P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)>0$$

fórmula de la probabilidad compuesta o **fórmula del producto de probabilidades:**

$$P(A\cap B)=P(A)P\left(B/A\right)=P(B)P\left(A/B\right)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P\left(B/A\right)P\left(C/A\cap B\right)$$

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P\left(A_2/A_1\right)P\left(A_3/A_1\cap A_2\right)\ldots P\left(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\right)$$

21

5.4 Sucesos dependientes e independientes.

En general $P\left(B/A\right)\neq P(B)$

Si $P\left(B/A\right)=P(B)$ B es **independiente** de A

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=P(B) \qquad \Rightarrow \qquad P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

22

5.4 Sucesos dependientes e independientes.

►***EJEMPLO 5.3***

En un dado con igual probabilidad de aparición para todas sus caras comprobar que los siguientes sucesos, de dos en dos, son dependientes.

A={obtener par}, B={obtener impar}, C={obtener un 3},

D={obtener un número mayor o igual que 4}, E={obtener un número menor que 4}.

$$\mathsf{P}(A\cap B)=0\neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \qquad \mathsf{P}(B\cap D)=\frac{1}{6}\neq \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\mathsf{P}(A\cap C)=0\neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12} \qquad \mathsf{P}(B\cap E)=\frac{2}{6}\neq \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\mathsf{P}(A\cap D)=\frac{2}{6}\neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \qquad \mathsf{P}(C\cap D)=0\neq \mathsf{P}(C)\mathsf{P}(D)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

$$\mathsf{P}(A\cap E)=\frac{1}{6}\neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \qquad \mathsf{P}(C\cap E)=\frac{1}{6}\neq \mathsf{P}(C)\mathsf{P}(E)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

$$\mathsf{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}\neq \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12} \qquad \mathsf{P}(D\cap E)=0\neq \mathsf{P}(D)\mathsf{P}(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

◄

23

5.4 Sucesos dependientes e independientes.

►***EJEMPLO 5.4*** $\quad P[E]=0,90 \quad P[C]=0,45 \quad P\left[C/E\right]=0,30$

En el bar de la Facultad de CC. EE. y EE. el 90% de los clientes son estudiantes. Se sabe que el 45% de los clientes toman café y que el 30% de los estudiantes toman café.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea estudiante y tome café? $P[E\cap C]$

b) Se elige al azar un cliente que toma café, ¿cuál es la probabilidad de que sea estudiante? $P\left[E/C\right]$

c) ¿Son independientes los sucesos *tomar café* y *ser estudiante*? $P\left[E/C\right]=P[E] \quad P\left[C/E\right]=P[C]$

$P[E\cap C]=P[E]P[C]$

Definimos los sucesos: *E={el cliente es estudiante}*, *C={el cliente toma café}*

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad compuesta:

$$\mathsf{P}(C\cap E)=\mathsf{P}(E)\mathsf{P}\left(C/E\right)=\frac{90}{100}\frac{30}{100}=0,27$$

b) Según la definición de probabilidad condicionada:

$$\mathsf{P}\left(E/C\right)=\frac{\mathsf{P}(C\cap E)}{\mathsf{P}(C)}=\frac{0,27}{0,45}=0,6$$

c)

$\mathsf{P}(C\cap E)=0,27\neq \mathsf{P}(C)\mathsf{P}(E)=0,45\times 0,90=0,405$, por lo tanto no son independientes

24

5.5 Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes.

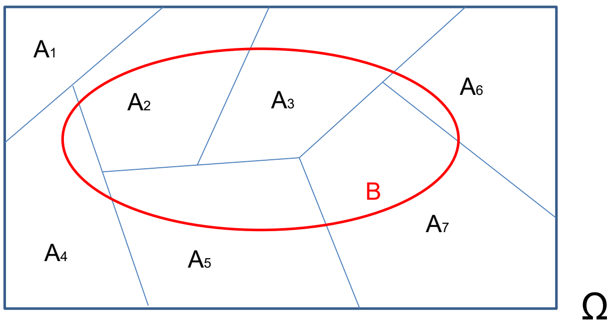
Sean los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ una *partición* de Ω

$$A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \forall i \neq j \qquad ; \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

fórmula de la probabilidad total:

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(B/_{A_i} \right) \mathrm{P}(A_i)$$

25



$$\left(A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j \, ; \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \right)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \qquad P(B \cap A_i) = P\left(B/_{A_i} \right) P(A_i)$$

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(B/_{A_i} \right) \mathrm{P}(A_i)$$

26

5.5 Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes.

$$\mathsf{P}(A_k \cap B) = \mathsf{P}(B)\cancel{\mathsf{P}\left(A_k/B\right)} = \mathsf{P}(A_k)\mathsf{P}\left(B/A_k\right)$$

fórmula de Bayes:

$$\mathsf{P}\left(A_k/B\right) = \frac{\mathsf{P}(A_k \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(A_k)\mathsf{P}\left(B/A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\left(B/A_i\right)\mathsf{P}(A_i)}$$

►***EJEMPLO 5.5***

La producción de una factoría se realiza en cuatro máquinas, M_1, M_2, M_3 *y* M_4. Diariamente la producción de cada una de las máquinas es la siguiente:

M_1	M_2	M_3	M_4	TOTAL
600	500	350	250	1700

Además sabemos que los porcentajes de piezas defectuosas producidas por cada una de las máquinas son:

M_1	M_2	M_3	M_4
4%	3,5%	4,6%	2%

a) Si las piezas se almacenan conjuntamente, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar una pieza al azar ésta sea defectuosa?

b) Se ha seleccionado una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida en la máquina M_2?

a) Según la fórmula de la probabilidad total

$$P(D)=\sum_{i=1}^{4}P\left(D/M_i\right)P(M_i)=\left(\frac{4}{100}\frac{600}{1700}\right)+\left(\frac{3,5}{100}\frac{500}{1700}\right)+\left(\frac{4,6}{100}\frac{350}{1700}\right)+\left(\frac{2}{100}\frac{250}{1700}\right)=\frac{6260}{170000}$$

b) Según la fórmula de Bayes

$$P\left(M_2/D\right)=\frac{P\left(D/M_2\right)P(M_2)}{\sum_{i=1}^{4}P\left(D/M_i\right)P(M_i)}=\frac{\frac{3,5}{100}\frac{500}{1700}}{\frac{6260}{170000}}=\frac{1750}{6260}=0,27955$$

29