

4.- *Análisis descriptivo de series cronológicas.*

4.1 Definición de una serie cronológica. Representación numérica y gráfica.

4.2 Componentes de una serie cronológica. Modelos.

4.3 Tendencia secular.

4.4 Variación estacional.

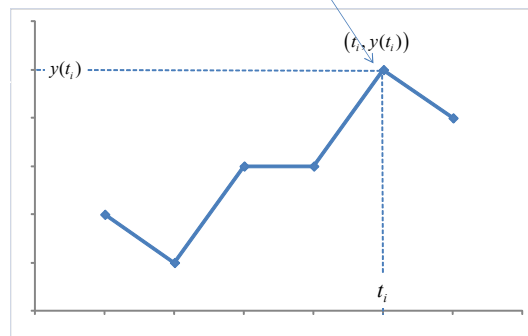
4.5 Desestacionalización.

4.6 Predicción.

1

serie cronológica o temporal

Tiempo	Observaciones
t_1	$y(t_1) = y_1$
t_2	$y(t_2) = y_2$
...	...
t_i	$y(t_i) = y_i$
...	...
t_n	$y(t_n) = y_n$

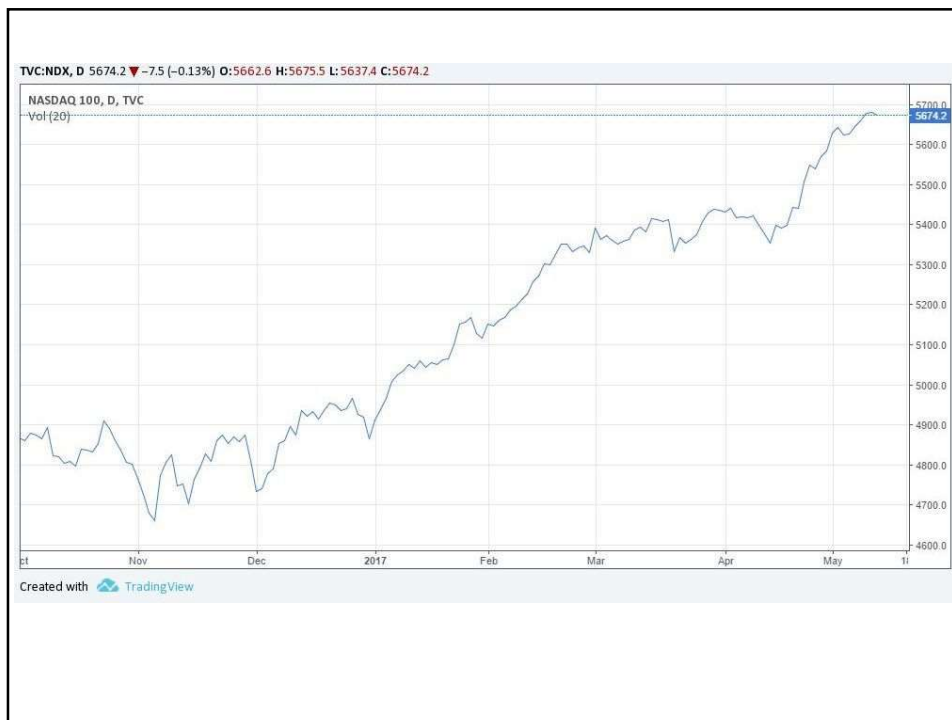


2

Año/estaciones	l	...	j	...	s
t_1	y_{1l}	...	y_{1j}	...	y_{1s}
...
t_i	y_{il}	...	y_{ij}	...	y_{is}
...
t_n	y_{nl}	...	y_{nj}	...	y_{ns}

	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	5	3,5	7
2014	8	5	9
2015	10	7	10,5
2016	11,5	10	13

3



4

Componentes de una serie cronológica.

- **Tendencia secular, $\tau(t)$.**
- **Variación estacional, $E(t)$.**
- **Variación cíclica, $C(t)$.**
- **Variación irregular, residual o aleatoria, $\varepsilon(t)$.**

5

- **Modelo aditivo:** $Y(t) = \tau(t) + E(t) + C(t) + \varepsilon(t)$

- **Modelo multiplicativo:** $Y(t) = \tau(t)E(t)C(t)\varepsilon(t)$

Análisis de la variabilidad de las diferencias y cocientes estacionales.

$$d_{ij} = y_{ij} - y_{(i-1)j} \qquad k_{ij} = \frac{y_{ij}}{y_{(i-1)j}}$$

Si $CV(d) < CV(k)$ se elegirá el modelo aditivo.

6

► EJEMPLO 4.2

Estudiamos la conveniencia del modelo aditivo o multiplicativo sobre los datos del ejemplo 4.1.

	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	5	3,5	7
2014	8	5	9
2015	10	7	10,5
2016	11,5	10	13

Solución:

$d_{ij} = y_{ij} - y_{(i-1)j}$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	---	---	---
2014	$8 - 5 = 3$	$5 - 3,5 = 1,5$	$9 - 7 = 2$
2015	2	2	1,5
2016	1,5	3	2,5

$k_{ij} = \frac{y_{ij}}{y_{(i-1)j}}$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	---	---	---
2014	$\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{5}{3,5} = 1,43$	$\frac{9}{7} = 1,29$
2015	1,25	1,4	1,17
2016	1,15	1,43	1,24

7

$$\bar{d} = 2,111 \quad S_d^2 = 0,321 \quad S_d = 0,567 \quad \Rightarrow \quad CV(d) = \frac{S_d}{\bar{d}} = 0,268$$

$$\bar{k} = 1,328 \quad S_k^2 = 0,019 \quad S_k = 0,138 \quad \Rightarrow \quad CV(k) = \frac{S_k}{\bar{k}} = 0,104$$

$CV(d) > CV(k)$, por tanto sería más adecuado el modelo multiplicativo.

8

Tendencia secular.

Método del ajuste de una recta de mínimos cuadrados.

t_i	y_i
2013	5,167
2014	7,333
2015	9,167
2016	11,50

$$\bar{y}_1 = \frac{5+3,5+7}{3} = 5,167 \quad \dots \quad \bar{y}_4 = \frac{11,5+10+13}{3} = 11,5$$

t_i	$x_i = t_i - 2012$	$y_i = \text{media}$	x_i^2	$x_i y_i$
2013	1	5,167	1	5,167
2014	2	7,333	4	14,666
2015	3	9,167	9	27,501
2016	4	11,50	16	46
<i>totales</i>	10	33,167	30	93,334

9

Tendencia secular. Método del ajuste de una recta de mínimos cuadrados.

X =año e Y =valor medio para cada año, obtenemos la **recta de regresión de Y/X** :

$$n = 4 \quad \bar{x} = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \bar{y} = \frac{33,167}{4} = 8,29175$$

$$S_x^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{30}{4} - 2,5^2 = 1,25$$

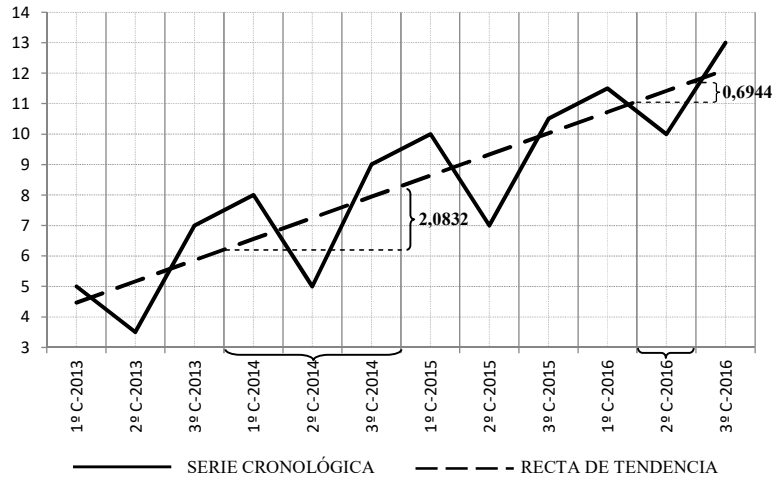
$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{93,334}{4} - (2,5 \times 8,29175) = 2,604$$

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x}) \Leftrightarrow y - 8,29175 = \frac{2,604}{1,25} (x - 2,5) \Leftrightarrow y = 3,0838 + 2,0832x$$

$$y = 3,0838 + 2,0832x \Leftrightarrow \tau(t) = 3,0838 + 2,0832(t - 2012) \Leftrightarrow \tau(t) = -4188,3146 + 2,0832t$$

10

Tendencia secular. Método del ajuste de una recta de mínimos cuadrados.



$$\tau(t) = -4188,3146 + 2,0832t$$

$$\frac{2,0832}{3} = 0,6944$$

11

Tendencia secular. Método de las medias móviles.

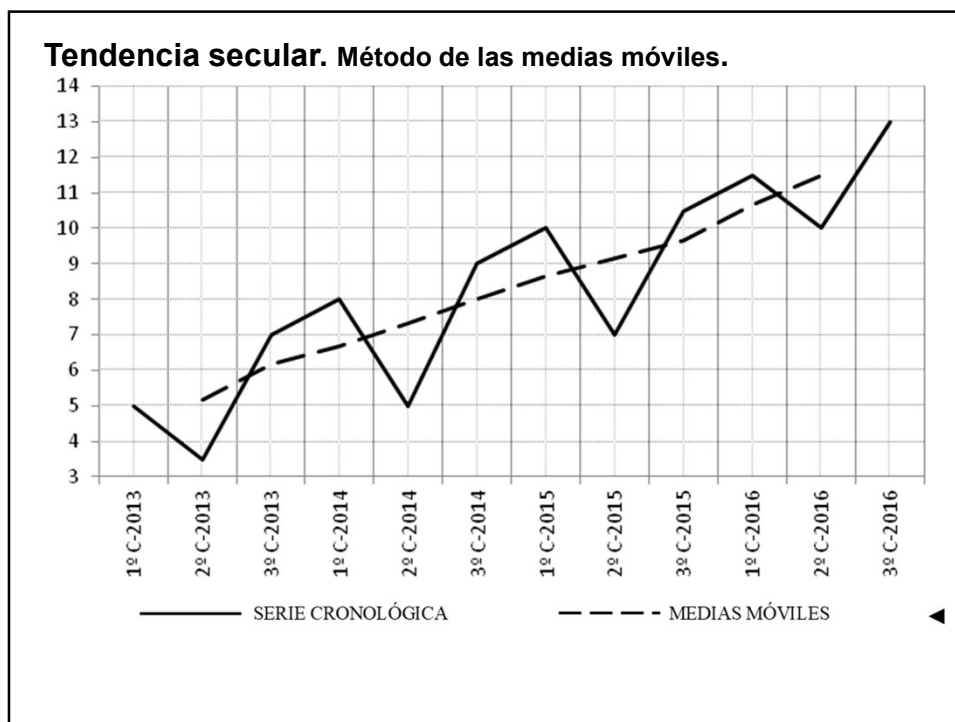
► EJEMPLO 4.4

	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	5	3,5	7
2014	8	5	9
2015	10	7	10,5
2016	11,5	10	13

$$\frac{5 + 3,5 + 7}{3} = 5,167 \quad \frac{3,5 + 7 + 8}{3} = 6,167 \quad \frac{7 + 8 + 5}{3} = 6,667 \quad \dots$$

medias móviles	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	---	5,167	6,167
2014	6,667	7,333	8
2015	8,667	9,167	9,667
2016	10,667	11,5	---

12



13

Tendencia secular. Método de las medias móviles.

Obtenga la *tendencia secular* mediante *medias móviles* sobre la siguiente serie cronológica.

	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
2012	7	5	2,4	1,1
2013	10	7,1	3,6	1,4
2014	13,5	8,9	4,5	1,6
2015	17	11,2	5,3	2
2016	18,1	12,7	6,6	2,4

media móvil amplitud 4	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	1º trimestre (año siguiente)
2012			3,875	4,625	5,15
2013		5,45	5,525	6,4	6,85
2014		7,075	7,125	8,0	8,575
2015		8,775	8,875	9,15	9,525
2016		9,85	9,95		

$3,875 = \frac{7+5+2,4+1,1}{4}$
 $4,625 = \frac{5+2,4+1,1+10}{4}$
 $5,15 = \frac{2,4+1,1+10+7,1}{4}$...

14

Tendencia secular. Método de las medias móviles.

media móvil amplitud 2	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	1º trimestre (año siguiente)		
2006	---	---	3,875	4,25	4,625	4,8875	5,15
2007	5,3	5,45	5,4875	5,525	5,9625	6,4	6,625
2008	6,9625	7,075	7,1	7,125	7,5625	8	8,2875
2009	8,675	8,775	8,825	8,875	9,0125	9,15	9,3375
2010	9,6875	9,85	9,9	9,95	---	---	---

$$4,25 = \frac{3,875 + 4,625}{2} \quad 4,8875 = \frac{4,625 + 5,15}{2} \quad 5,3 = \frac{5,15 + 5,45}{2} \quad \dots$$

medias móviles amplitud 2	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
2012	---	---	4,25	4,8875
2013	5,3	5,4875	5,9625	6,625
2014	6,9625	7,1	7,5625	8,2875
2015	8,675	8,825	9,0125	9,3375
2016	9,6875	9,9	---	---

15

Variación estacional: Método de las medias simples.

► EJEMPLO 4.6

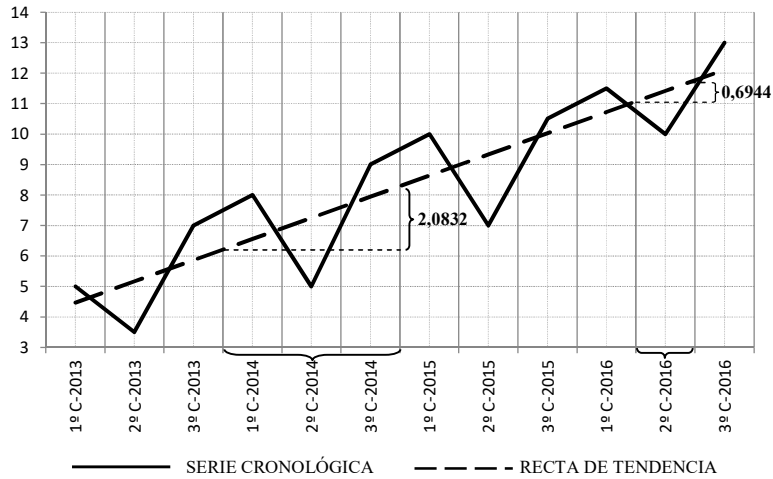
	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	media
2013	5	3,5	7	5,167
2014	8	5	9	7,333
2015	10	7	10,5	9,167
2016	11,5	10	13	11,50

$$y = 3,0838 + 2,0832x \Leftrightarrow \tau(t) = 3,0838 + 2,0832(t - 2012) \Leftrightarrow \tau(t) = -4188,3146 + 2,0832t$$

En este ejemplo la tendencia crece $\frac{2,0832}{3} = 0,6944 \cong 0,7$ cada cuatrimestre.

16

Tendencia secular. Método del ajuste de una recta de mínimos cuadrados.



$$\tau(t) = -4188,3146 + 2,0832t$$

$$\frac{2,0832}{3} = 0,6944$$

17

Variación estacional. Método de las medias simples.

$$\frac{5+8+10+11,5}{4} = 8,625$$

$$\frac{3,5+5+7+10}{4} = 6,375$$

$$\frac{7+9+10,5+13}{4} = 9,875$$

	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre
2013	5	3,5	7
2014	8	5	9
2015	10	7	10,5
2016	11,5	10	13
media	8,625	6,375	9,875
media corregida	8,625	5,681	8,487

$$\frac{b}{s} = \frac{2,0832}{3} = 0,6944$$

$$8,625 - \left(0 \times \frac{b}{s}\right) = 8,625$$

$$6,375 - \left(1 \times \frac{b}{s}\right) = 5,6806$$

$$9,875 - \left(2 \times \frac{b}{s}\right) = 8,48627$$

18

Variación estacional. Método de las medias simples.

$$7,5973 = \frac{8,625 + 5,6806 + 8,4862}{3}$$

	media corregida	8,625	5,6806	8,4862	Media global corregida 7,5973
I.V.E.	modelo multiplicativo	113,53%	74,77%	111,70%	
	modelo aditivo	1,0277	-1,9167	0,8889	

$$\frac{8,625}{7,5973} 100 = 113,53$$

$$\frac{5,6806}{7,5973} 100 = 74,77$$

$$\frac{8,4862}{7,5973} 100 = 111,70$$

$$8,625 - 7,5973 = 1,0277$$

$$5,6806 - 7,5973 = -1,9167$$

$$8,4862 - 7,5973 = 0,8889$$

19

$$Y(t) = \tau(t)E(t)C(t)\varepsilon(t) \Rightarrow \frac{Y(t)}{\tau(t)} = E(t)C(t)\varepsilon(t)$$

Método de la razón a la tendencia.
Método de la razón a las medias móviles.

CALCULAMOS MEDIAS PARA CADA ESTACIÓN

$$E(t)C(t)\varepsilon(t)$$

$$Y(t) = \tau(t) + E(t) + C(t) + \varepsilon(t) \Rightarrow Y(t) - \tau(t) = E(t) + C(t) + \varepsilon(t)$$

Método de la diferencia a la tendencia.
Método de la diferencia a las medias móviles.

CALCULAMOS MEDIAS PARA CADA ESTACIÓN

$$E(t) + C(t) + \varepsilon(t)$$

20

Método de la razón a la tendencia.

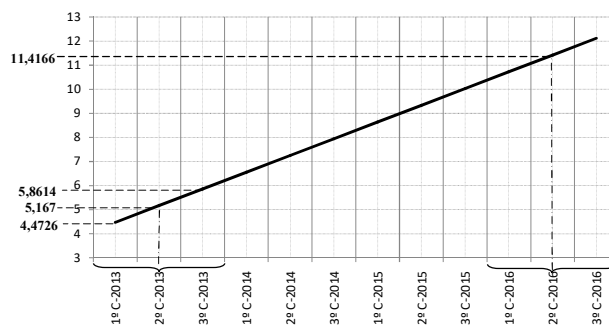
► **EJEMPLO 4.8**

	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	media
2013	5	3,5	7	5,167
2014	8	5	9	7,333
2015	10	7	10,5	9,167
2016	11,5	10	13	11,50

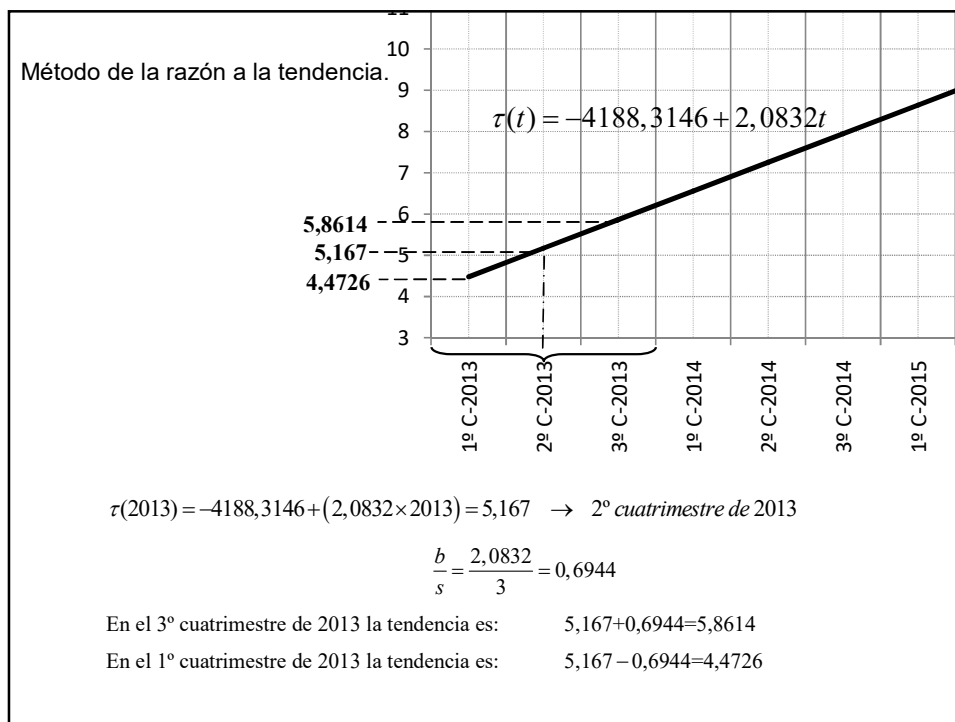
$$y = 3,0838 + 2,0832x \Leftrightarrow \tau(t) = 3,0838 + 2,0832(t - 2012) \Leftrightarrow \tau(t) = -4188,3146 + 2,0832t$$

$$\tau(2013) = -4188,3146 + (2,0832 \times 2013) = 5,167 \rightarrow \text{2º cuatrimestre de 2013}$$

$$\frac{b}{s} = \frac{2,0832}{3} = 0,6944 \text{ cada estación que pasa}$$



21



22

Método de la razón a la tendencia.

$Y(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	5	3,5	7	
2014	8	5	9	
2015	10	7	10,5	
2016	11,5	10	13	
$\tau(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	4,4726	5,1670	5,8614	
2014	6,5558	7,2502	7,9446	
2015	8,6390	9,3334	10,0278	
2016	10,7222	11,4166	12,1110	
$\frac{Y(t)}{\tau(t)}$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	1,1179	0,6774	1,1943	
2014	1,2203	0,6896	1,1328	
2015	1,1575	0,7500	1,0471	
2016	1,0725	0,8759	1,0734	media global
media	1,1421	0,7482	1,1119	1,0007
I.V.E.	114,13%	74,77%	111,11%	

23

Método de la diferencia a la tendencia.

$Y(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	5	3,5	7	
2014	8	5	9	
2015	10	7	10,5	
2016	11,5	10	13	
$\tau(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	4,4726	5,1670	5,8614	
2014	6,5558	7,2502	7,9446	
2015	8,6390	9,3334	10,0278	
2016	10,7222	11,4166	12,1110	
$Y(t) - \tau(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	0,5274	-1,6670	1,1386	
2014	1,4442	-2,2502	1,0554	
2015	1,3610	-2,3334	0,4722	
2016	0,7778	-1,4166	0,8890	media global
media	1,0276	-1,9168	0,8888	-0,0001
V.E.	1,0277	-1,9167	0,8889	

24

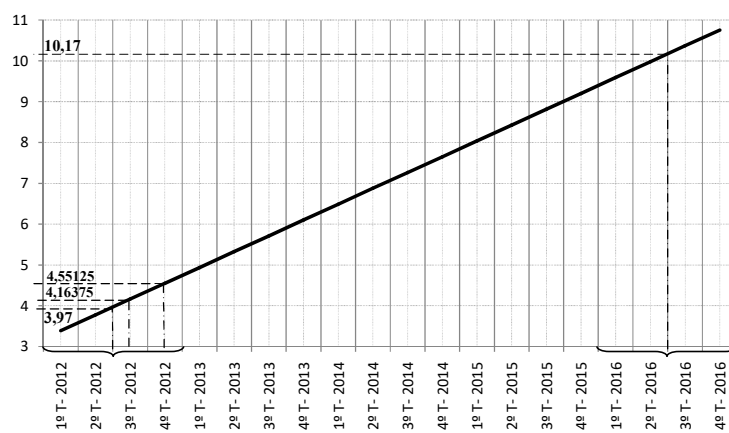
	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
2012	7	5	2,4	1,1
2013	10	7,1	3,6	1,4
2014	13,5	8,9	4,5	1,6
2015	17	11,2	5,3	2
2016	18,1	12,7	6,6	2,4

25

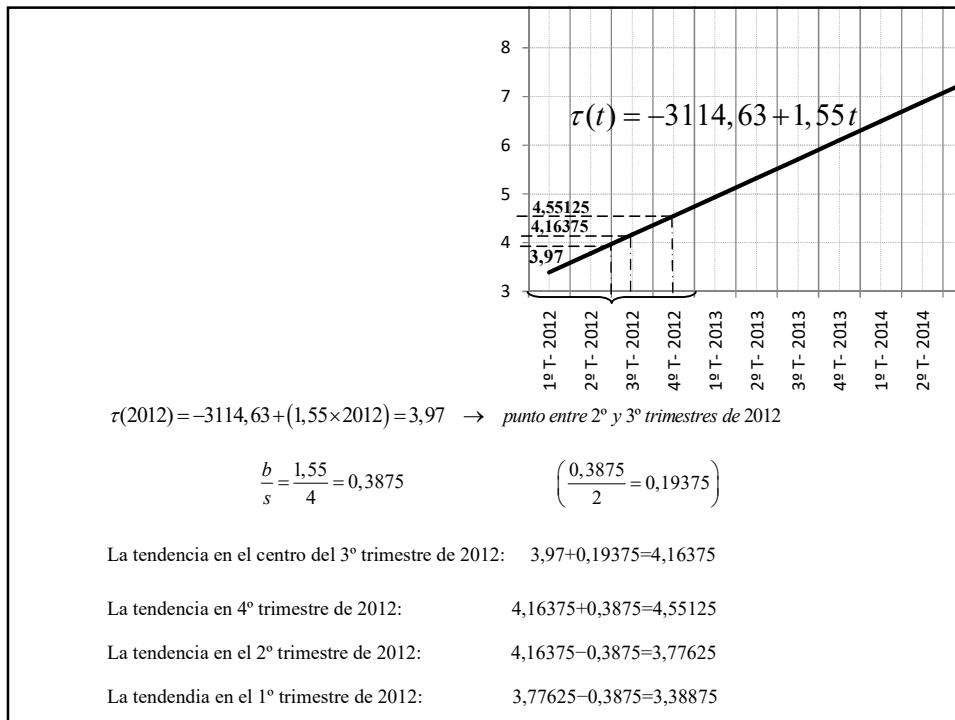
$$y = 2,42 + 1,55x \Leftrightarrow \tau(t) = 2,42 + 1,55(t - 2011) \Leftrightarrow \tau(t) = -3114,63 + 1,55t$$

$$\tau(2012) = -3114,63 + (1,55 \times 2012) = 3,97 \rightarrow \text{punto entre 2º y 3º trimestres de 2012}$$

$$\frac{b}{s} = \frac{1,55}{4} = 0,3875 \text{ cada estación que pasa y la mitad } \left(\frac{0,3875}{2} = 0,19375 \right) \text{ en media estación.}$$



26



27

Método de la razón a la tendencia.

$Y(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	media
2012	7	5	2,4	1,1	3,875
2013	10	7,1	3,6	1,4	5,525
2014	13,5	8,9	4,5	1,6	7,125
2015	17	11,2	5,3	2	8,875
2016	18,1	12,7	6,6	2,4	9,950
$\tau(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	3,38875	3,77625	4,16375	4,55125	
2013	4,93875	5,32625	5,71375	6,10125	
2014	6,48875	6,87625	7,26375	7,65125	
2015	8,03875	8,42625	8,81375	9,20125	
2016	9,58875	9,97625	10,36375	10,75125	
$\frac{Y(t)}{\tau(t)}$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	2,06566	1,32406	0,57640	0,24169	
2013	2,02480	1,33302	0,63006	0,22946	
2014	2,08052	1,29431	0,61951	0,20912	
2015	2,11476	1,32918	0,60133	0,21736	
2016	1,88763	1,27302	0,63684	0,22323	
media	2,03467	1,31072	0,61283	0,22417	1,0456
I.V.E.	194,59%	125,36%	58,61%	21,44%	

28

Método de la diferencia a la tendencia.

$Y(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	media
2012	7	5	2,4	1,1	3,875
2013	10	7,1	3,6	1,4	5,525
2014	13,5	8,9	4,5	1,6	7,125
2015	17	11,2	5,3	2	8,875
2016	18,1	12,7	6,6	2,4	9,950
$\tau(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	3,38875	3,77625	4,16375	4,55125	
2013	4,93875	5,32625	5,71375	6,10125	
2014	6,48875	6,87625	7,26375	7,65125	
2015	8,03875	8,42625	8,81375	9,20125	
2016	9,58875	9,97625	10,36375	10,75125	
$Y(t) - \tau(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	3,61125	1,22375	-1,76375	-3,45125	
2013	5,06125	1,77375	-2,11375	-4,70125	
2014	7,01125	2,02375	-2,76375	-6,05125	
2015	8,96125	2,77375	-3,51375	-7,20125	
2016	8,51125	2,72375	-3,76375	-8,35125	
media	6,63125	2,10375	-2,78375	-5,95125	0
V.E.	6,63125	2,10375	-2,78375	-5,95125	

El método de las medias simples (modelo aditivo) y el método de la diferencia a la tendencia coinciden

29

Variación estacional. Método de la razón a las medias móviles.

Modelo multiplicativo:

$Y(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	5	3,5	7	
2014	8	5	9	
2015	10	7	10,5	
2016	11,5	10	13	
$\tau(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	---	5,167	6,167	
2014	6,667	7,333	8	
2015	8,667	9,167	9,667	
2016	10,667	11,5	---	
$\frac{Y(t)}{\tau(t)}$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	---	0,67738	1,13507	
2014	1,19994	0,68185	1,12500	
2015	1,15380	0,76361	1,08617	
2016	1,07809	0,86957	---	
media	1,14394	0,74810	1,11541	1,0025
I.V.E.	114,11%	74,62%	111,26%	

30

Variación estacional. Método de la diferencia a las medias móviles.

Modelo aditivo:

$Y(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	5	3,5	7	
2014	8	5	9	
2015	10	7	10,5	
2016	11,5	10	13	
$\tau(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	---	5,167	6,167	
2014	6,667	7,333	8	
2015	8,667	9,167	9,667	
2016	10,667	11,5	---	
$Y(t) - \tau(t)$	1º cuatrimestre	2º cuatrimestre	3º cuatrimestre	
2013	---	-1,667	0,833	
2014	1,333	-2,333	1	
2015	1,333	-2,167	0,833	
2016	0,833	-1,5	---	
media	1,1663	-1,9168	0,8887	media global 0,0461
V.E.	1,1202	-1,9629	0,8426	

31

Variación estacional. Método de la razón a las medias móviles.

Modelo multiplicativo:

$Y(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	7	5	2,4	1,1	
2013	10	7,1	3,6	1,4	
2014	13,5	8,9	4,5	1,6	
2015	17	11,2	5,3	2	
2016	18,1	12,7	6,6	2,4	
$\tau(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	---	---	4,25	4,8875	
2013	5,3	5,4875	5,9625	6,625	
2014	6,9625	7,1	7,5625	8,2875	
2015	8,675	8,825	9,0125	9,3375	
2016	9,6875	9,9	---	---	
$\frac{Y(t)}{\tau(t)}$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre	
2012	---	---	0,56471	0,22506	
2013	1,88679	1,29385	0,60377	0,21132	
2014	1,93896	1,25352	0,59504	0,19306	
2015	1,95965	1,26912	0,58807	0,21419	
2016	1,86839	1,28283	---	---	
media	1,91345	1,27483	0,58790	0,21091	media global 0,99677
I.V.E.	191,96%	127,90%	58,98%	21,16%	

32

Desestacionalización

► EJEMPLO 4.12.

Desestacionalice la serie cronológica del ejemplo 4.5, considerando el modelo multiplicativo y los I.V.E. obtenidos con el método de la razón a las medias móviles.

$$\frac{7}{1,9196} = 3,6466 \quad \frac{5}{1,279} = 3,9093 \quad \dots$$

$Y(t)$	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
2012	7	5	2,4	1,1
2013	10	7,1	3,6	1,4
2014	13,5	8,9	4,5	1,6
2015	17	11,2	5,3	2
2016	18,1	12,7	6,6	2,4
I.V.E.	191,96%	127,90%	58,98%	21,16%
$\frac{Y(t)}{E(t)}$ Serie desestacionalizada	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
2012	3,6466	3,9093	4,0692	5,1985
2013	5,2094	5,5512	6,1038	6,6163
2014	7,0327	6,9586	7,6297	7,5614
2015	8,8560	8,7568	8,9861	9,4518
2016	9,4290	9,9296	11,1902	11,3422

33

Predicción.

$$Y(t) = \tau(t) + E(t) + C(t) + \varepsilon(t) \quad \hat{Y}(t) = \tau(t) + E(t).$$

$$Y(t) = \tau(t)E(t)C(t)\varepsilon(t) \quad \hat{Y}(t) = \tau(t)E(t) \quad (E(t) \text{ expresada en tanto por } 1)$$

► EJEMPLO 4.13.

¿Cuál sería el valor estimado de la serie del ejemplo 4.1 en el primer cuatrimestre de 2018? Utilice los diferentes métodos y modelos.

$$\tau(t) = -4188,3146 + 2,0832t$$

$$\tau(2018) = -4188,3146 + (2,0832 \times 2018) = 15,583 \quad \frac{2,0832}{3} = 0,6944$$

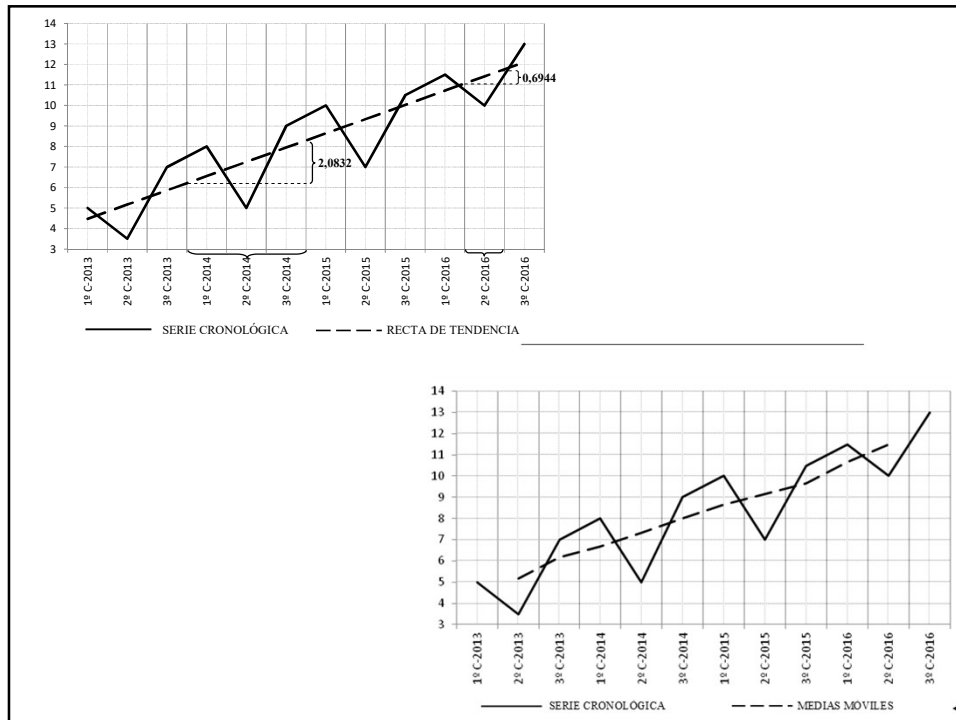
tendencia en el primer cuatrimestre del año 2018: $15,583 - 0,6944 = 14,8886$.

34

Predicción.

Modelo aditivo	
<i>Método de las media simples</i>	
$\hat{Y}(1^{er} C / 2018) = \tau(1^{er} C / 2018) + E(1^{er} C) = 14,8886 + 1,0277 = 15,9163$	
<i>Método de la diferencia a la tendencia</i>	
$\hat{Y}(1^{er} C / 2018) = \tau(1^{er} C / 2018) + E(1^{er} C) = 14,8886 + 1,0277 = 15,9163$	
Modelo multiplicativo	
<i>Método de las media simples</i>	
$\hat{Y}(1^{er} C / 2018) = \tau(1^{er} C / 2018)E(1^{er} C) = 14,8886 \times 1,1353 = 16,9030$	
<i>Método de la razón a la tendencia</i>	
$\hat{Y}(1^{er} C / 2018) = \tau(1^{er} C / 2018)E(1^{er} C) = 14,8886 \times 1,1413 = 16,9924$	
Modelo aditivo	
<i>Método de la diferencia a las medias móviles</i>	
$\hat{Y}(1^{er} C / 2018) = \tau(1^{er} C / 2018) + E(1^{er} C) = 14,8886 + 1,1202 = 16,0088$	
Modelo multiplicativo	
<i>Método de la razón a las medias móviles</i>	
$\hat{Y}(1^{er} C / 2018) = \tau(1^{er} C / 2018)E(1^{er} C) = 14,8886 \times 1,1411 = 16,9894$	

35



36