TEMA 4. Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad

4.1 Concepto de variable aleatoria y distribución de probabilidad

4.2 Funciones de distribución. Variables aleatorias discretas y continuas

4.3 Valor esperado de una variable aleatoria. Momentos

4.4 Otras medidas de posición, dispersión y forma

4.5 Variables aleatorias bidimensionales. Independencia

1

4.1 Concepto de variable aleatoria y distribución de probabilidad

Sea el conjunto de sucesos elementales de un fenómeno aleatorio. Se define una variable aleatoria ***X*** como una función

$$\Omega \overset{X}{\rightarrow} \mathrm{R}$$

$$\omega_i \quad \rightarrow \quad X(\omega_i) = x_i \in \mathrm{R}$$

Es decir, mediante una variable aleatoria transformamos los resultados de un fenómeno aleatorio en valores numéricos que miden aquella característica del fenómeno que nos interesa destacar

Ejemplo: En el lanzamiento de dos monedas podemos definir la variable aleatoria *X* como el número de caras obtenidas en el experimento.

$$\Omega \rightarrow R$$

(C,C) →X(C,C)=2

(C,X) →X(C,X)=1

(X,C) →X(X,C)=1

(X,X) →X(X,X)=0

2

4.1 Concepto de variable aleatoria y distribución de probabilidad

Se denomina distribución de probabilidad de la variable X a las probabilidades asociadas a los distintos valores que puede tomar la variable aleatoria: $p_i = P[X = x_i]$

Ejemplo: Obtener distribución de probabilidad del ejemplo anterior

X	$p_i = P[X = x_i]$
0	1/4
1	2/4
2	1/4
	1

Toda distribución de probabilidad ha de cumplir:

- $p_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\sum_{\forall i} p_i = 1$

3

4.2 Función de distribución. V.A. discretas y V.A. continuas

Se define la **función de distribución** de una variable aleatoria X como:

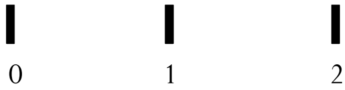
$$F(x) = \mathrm{P}[X \leq x] = \mathrm{P}[\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x] \qquad \forall x \in \mathrm{R}$$

Propiedades:

- Si $x_i < x_j \quad \Rightarrow \quad F(x_i) \leq F(x_j)$
- $F(-\infty) = 0 \qquad F(+\infty) = 1$
- $\mathrm{P}[X > x] = 1 - F(x)$
- $\mathrm{P}[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$

Ejemplo: Obtenga la función de distribución de la variable aleatoria *Número de caras en el lanzamiento de dos monedas.*

4



$$F(0) = P[X \le 0] = P[X = 0] = \frac{1}{4}$$

$$F(0.5) = P[X \le 0.5] = P[X = 0] = \frac{1}{4}$$

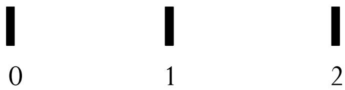
$$F(1) = P[X \le 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(1.5) = P[X \le 1.5] = P[X = 0] + P[X = 1] = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = P[X \le 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \le x < 1 \\ 3/4 & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

5



$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \le x < 1 \\ 3/4 & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

$$P[X \le 1] = F(1) = \frac{3}{4}$$

$$P[0 < X \le 2] = P[X \le 2] - P[X \le 0] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P[X > 1] = 1 - P[X \le 1] = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

6

Sea X una v.a. con distribución de probabilidad:

X	$p_i=P[X=x_i]$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1

a) Hallar la función de distribución
b) Hallar $P[0 \le X \le 1], P[1 < X \le 2], P[2 < X < 4]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

$$P[0 \le X \le 1] = P[X \le 1] - P[X < 0] = \frac{4}{8} - 0 = P[X = 0] + P[X = 1] = \frac{4}{8}$$

$$P[1 < X \le 2] = P[X \le 2] - P[X \le 1] = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8} = P[X = 2]$$

$$P[2 < X < 4] = P[X \le 3] - P[X \le 2] = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = P[X = 3]$$

7

Variables Aleatorias Discretas y continuas.

Si la variable aleatoria toma un conjunto de valores aislados diremos que es una **variable aleatoria discreta.** En este caso la función de distribución es escalonada:

$$F(x) = \mathrm{P}[X \le x] = \sum_{x_i \le x} p_i$$

Si la variable aleatoria toma un conjunto continuo de valores diremos que es una **variable aleatoria continua**.

La derivada de la función de distribución de una variable aleatoria continua se denomina función de densidad:

$$F'(x) = f(x)$$

Propiedades de la función de densidad:

- $f(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \mathrm{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

8

Sea la función de distribución de la v.a. X:

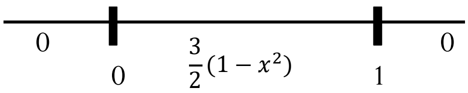
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x - x^3}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Hallar su función de densidad y demostrar sus propiedades:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{3 - 3x^2}{2} = \dfrac{3}{2}(1 - x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f(x) es\ mayor\ que\ 0\ porque\ \frac{3}{2} > 0 \quad y \quad (1 - x^2) > 0\ dado\ que\ 0 \le x \le 1$$

9



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \frac{3}{2}(1 - x^2)\, dx + \int_{1}^{\infty} 0dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - 0\right] = 1$$

10

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en un determinado conjunto es igual a la integral de la función de densidad definida sobre dicho conjunto:

$$\mathrm{P}[X = a] = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\mathrm{P}[a < X < b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

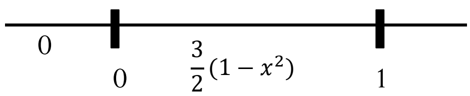
$$\mathrm{P}[a < X] = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\mathrm{P}[X < a] = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

11

Ejemplo. Sea la función de distribución y la función de densidad de la v.a. X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x - x^3}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$



$$P\left(\tfrac{1}{3} < X < \tfrac{1}{2}\right) = F\left(\tfrac{1}{2}\right) - F\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{3\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3}{2} - \frac{3\frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^3}{2} = 0.206$$

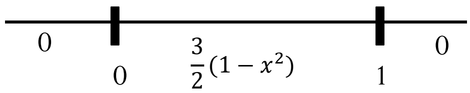
$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/3}^{1/2} \frac{3}{2}(1 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{1/3}^{1/2} = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1^3}{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{\frac{1^3}{3}}{3}\right)\right] = 0.206$$

12

Sea la función de distribución y la función de densidad de la v.a. X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x - x^3}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$



$$P\left(\frac{1}{2} < X\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3}{2} = 0.3125$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{3}{2}(1 - x^2)\, dx + \int_{1}^{\infty} 0\, dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{1/2}^{1} = \frac{3}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1^3}{2}}{3}\right)\right] = 0.3125$$

13

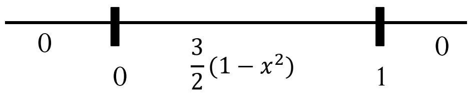
La función de distribución se puede obtener a partir de la de densidad:

$$F(x) = \mathsf{P}[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

14

Ejemplo. Sea la función de densidad de X, obtener la función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$



$$Si\ x < 0, \qquad F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$$

$$Si\ 0 \le x \le 1, \qquad F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{3}{2}(1-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^x = \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

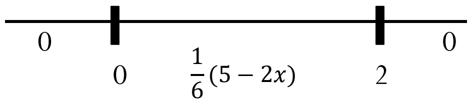
$$Si\ x > 1, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} \frac{3}{2}(1-x^2)\,dx + \int_{1}^{x} 0\,dx = 1$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x - x^3}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}}$$

15

Ejemplo. Sea la función de densidad de X, obtener la función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(5-2x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$



$$P(1 < X < 4) = \int_{1}^{2} \frac{1}{6}(5-2x)\,dx + \int_{2}^{4} 0\,dx = \left[\frac{1}{6}(5x - x^2)\right]_1^2 = \frac{1}{6}(6-4) = 0.333$$

Obtener la función de distribución:

$$Si\ x < 0, \qquad F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$$

$$Si\ 0 \le x \le 2, \qquad F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{6}(5-2x)dx =$$

$$= \frac{1}{6}(5x - x^2)$$

16

$$Si\ x > 2, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{6}(5-2x)dx + \int_{2}^{x} 0\,dx = 1$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{6}(5x - x^2) & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}}$$

17

4.3 Valor esperado de una variable aleatoria. Momentos

Los momentos no centrados o respecto del origen: $\alpha_r = E\left[X^r\right] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i$

Se definen los momentos centrados respecto a la esperanza o respecto a la media como:

$$\mu_r = E\left[\left(X - E[X]\right)^r\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i - E[X]\right)^r p_i$$

Se define el **valor esperado, esperanza matemática o media** de una **v.a. discreta** como:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Se define la **varianza** de una v.a. discreta como:

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - EX)^2] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - EX)^2 p_i = E[X^2] - EX^2$$

18

Ejemplo. Sea X el número de llantas defectuosas en un lote de 4. La función de distribución es:

X	$F(x_i)$	$p_i=P(X=x_i)$	x_i*p_i	$x^2_i*p_i$
0	0.8	0.8	0	0
1	0.9	0.1	0.1	0.1
2	0.95	0.05	0.1	0.2
3	0.98	0.03	0.09	0.27
4	1	0.02	0.08	0.32
		1	0.37	0.89

$E[X] = 0.37$

$Var[X]=E[X^2]-EX^2=0.89-(0.37)^2=0.7531$

(Ir a R)

19

Se definen los momentos no centrados y centrados para una **v.a. continua** X como:

$$\alpha_r = E\left[X^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

$$\mu_r = E\left[\left(X - E[X]\right)^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E[X]\right)^r f(x)\,dx$$

Se define el **valor esperado, esperanza matemática o media** de una **v.a. continua** como

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Se define la **varianza** de una v.a. continua como:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - EX^2$$

20

Ejemplo. Sea la función de densidad de X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(5-2x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

0	0	$\frac{1}{6}(5-2x)$	2	0

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{1}{6}(5-2x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{6}(5x-2x^2)\,dx = \frac{1}{6}\left[5\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 0.7778$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\frac{1}{6}(5-2x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{6}(5x^2-2x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[5\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 0.8889$$

$$Var(X) = 0.8889 - (0.7778)^2 = 0.284$$

21 (Ir a R)

Ejemplo. Dada la siguiente función de densidad de la variable :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 < x \le 2 \\ 3-x & 2 < x \le 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

0	1	$x-1$	2	$3-x$	3	0

a. Hallar la esperanza y la varianza de X

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^2 x\,(x-1)\,dx + \int_2^3 x(3-x)\,dx = \int_1^2 (x^2-x)\,dx + \int_2^3 (3x-x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{3}\right) - \left(\frac{12}{2}-\frac{8}{3}\right)\right] = 2$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^2 x^2(x-1)\,dx + \int_2^3 x^2(3-x)\,dx =$$

$$\int_1^2 (x^3-x^2)\,dx + \int_2^3 (3x^2-x^3)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_2^3$$

22

$$= \left[\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right] + \left[\left(27-\frac{81}{4}\right) - (8-4)\right] = 4.1667$$

$Var(X) = 4.1667 - (2)^{2} = 0.1667$ (Ir a R)

b. Hallar P[1<X<4]

$0 \quad | \quad x-1 \quad | \quad 3-x \quad | \quad 0$

$1 \qquad 2 \qquad 3$

$$P[1 < X < 4] = \int_{1}^{2} (x-1)\,dx + \int_{2}^{3} (3-x)\,dx + \int_{3}^{4} 0\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \left[\left(\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(6 - \frac{4}{2}\right)\right] = 1$$

(Ir a R)

c. Hallar la función de distribución

$$Si\ x < 1, \qquad F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$$

23

$0 \quad | \quad x-1 \quad | \quad 3-x \quad | \quad 0$

$1 \qquad 2 \qquad 3$

$$Si\ 1 \leq x \leq 2, \qquad F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{x} (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{x^2}{2} - x + 0.5$$

$$Si\ 2 \leq x \leq 3, \qquad F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx + \int_{2}^{x} (3-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_2^x = \left(\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(6 - \frac{4}{2}\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 3x - 3.5$$

$$Si\ x > 3, \qquad F(x) = 1$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 0.5 & 1 < x \leq 2 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3x - 3.5 & 2 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}}$$

24

Relaciones entre momentos centrado y no centrado:

$$\sigma^2 = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$$

Propiedades de la media y la varianza:

$$\boxed{\begin{array}{l} E[aX+b] = aE[X]+b \\ \sigma^2[aX+b] = a^2\sigma^2[X] \end{array}}$$

Ejemplo. Sea X el número de llantas defectuosas en un lote de 4. Se sabe que el número esperado de llantas defectuosas es 0.37 llantas con una varianza de 0.7531. Cada una de las llantas defectuosas representa una pérdida de 120 euros. Estime la pérdida esperada y la desviación típica de las pérdidas.

Y=pérdidas=120*X
EY=120*EX=120*0.37=44.4 euros
dt(Y)=120*dt(X)=120*$\sqrt{0.7531}$ =104.1376 euros

25

4.4 Otras medidas de posición, dispersión y forma

MODA

Se define la moda, ***Mo***, como aquel valor de la variable aleatoria donde la distribución de probabilidad alcanza su máximo.

Para v.a. discretas: $P[X = Mo] \geq p_i \quad \forall i$

Para v.a. continuas: $f(Mo) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo

X	p_i=P[X=x_i]
0	1/8
1	**3/8**
2	**3/8**
3	1/8
	1

Mo=1
Mo=2

26

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para buscar un máximo, se hace la primera derivada de la función y se iguala a cero. El valor obtenido será un máximo (será la MODA) si la segunda derivada de la función en ese valor tiene signo negativo.

$$f'(x) = \frac{3}{2}(0-2x) = -3x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f''(x) = -3 < 0 \Rightarrow x = 0\ es\ un\ máximo$$

$\boxed{Mo=0}$

27

MEDIANA, CUARTILES, PERCENTILES

Se define la mediana, ***Me***, como aquel valor que verifica $F(Me) = \mathrm{P}[X \le Me] = \frac{1}{2}$

Se definen los cuartiles y percentiles como los valores que verifican

$$F(Q_i) = \mathrm{P}[X \le Q_i] = \frac{i}{4}$$

$$F(P_i) = \mathrm{P}[X \le P_i] = \frac{i}{100}$$

Ejemplo

X	p_i=P[X=x_i]	F(x)
0	1/8	1/8=0.125
1	3/8	4/8= 0.5
2	3/8	7/8=0.875
3	1/8	1
	1	

$\boxed{Me = \frac{1+2}{2} = 1.5}$

$\boxed{P_{75} = 2}$

$\boxed{Q_1 = 1}$

28

Ejemplo. Sea la función de densidad de X, obtener la mediana y el percentil 90

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(5-2x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{6}(5x - x^2) & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$F(Me) = 0.5 = \frac{1}{6}(5Me - Me^2) \ \Rightarrow Me^2 - 5Me + 3 = 0$$

$$Me = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \begin{cases} 0.647 \\ \cancel{4.303} \end{cases}$$

$$F(P_{90}) = 0.90 = \frac{1}{6}(5P_{90} - {P_{90}}^2) \ \Rightarrow {P_{90}}^2 - 5P_{90} + 5.4 = 0$$

$$P_{90} = \frac{5 \pm \sqrt{25-21.6}}{2} = \begin{cases} 1.58 \\ \cancel{3.42} \end{cases}$$

29

Ejemplo. Dada la siguiente función de densidad, hallar la mediana y el cuartil 3

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 < x \le 2 \\ 3-x & 2 < x \le 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 0.5 & 1 < x \le 2 \\ -\frac{x^2}{2} + 3x - 3.5 & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$F(Q_3) = 0.75$

$F(2) = \frac{4}{2} - 2 + 0.5 = 0.5 \Rightarrow Q_3 \epsilon (2,3)$

$$F(Q_3) = 0.75 = -\frac{{Q_3}^2}{2} + 3Q_3 - 3.5 \quad \Rightarrow -\frac{{Q_3}^2}{2} + 3Q_3 - 4.25 = 0 \Rightarrow Q_3^2 - 6Q_3 + 8.5 = 0$$

$$Q_3 = \frac{6 \pm \sqrt{36-34}}{2} = \begin{cases} 2.30 \\ \cancel{3.71} \end{cases}$$

$$F(Me) = 0.5 \Rightarrow Me = 2$$

30

COEFICIENTE DE VARIACIÓN $CV = \dfrac{\sigma}{E[X]}$

COEFICIENTE DE ASIMETRÍA $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$

COEFICIENTE DE APUNTAMIENTO O CURTOSIS $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

Ejemplo.

X	p_i=P(X=x_i)	x_i*p_i	x^2_i*p_i
-2	1/3	-2/3	4/3
1	1/6	1/6	1/6
3	1/2	3/2	9/2
	1	1	6

$E[X]$ =1

Var[X]=E[X^2]-EX^2=6-$(1)^2$=5

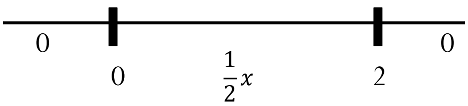
$$CV = \frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$$

(Ir a R)

31

Ejemplo. Sea la función de densidad de X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$



$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{1}{2}x\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\frac{8}{3} = 1.333$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\frac{1}{2}x\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}4 = 2$$

$$Var(X) = 2 - (1.333)^{\,2} = 0.222$$

$CV = \frac{\sqrt{0.222}}{1.333}$ =0.3536

32 (Ir a R)

4.5 Variables aleatorias bidimensionales. Independencia de v.a.

Sea un conjunto de sucesos elementales de un fenómeno aleatorio. Se define una variable aleatoria bidimensional como una función

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathrm{R} \times \mathrm{R}$$

$$\omega_i \rightarrow (X(\omega_i), Y(\omega_i))$$

Mediante una variable aleatoria bidimensional transformamos los resultados de un fenómeno aleatorio en dos valores numéricos que miden aquellas dos características del fenómeno que nos interesan destacar. Una variable aleatoria bidimensional es un par de variables aleatorias unidimensionales definidas sobre el mismo fenómeno aleatorio.

Ejemplo. Sea X=nº de cruces en tres lanzamientos de una moneda, e Y=nº de caras en los dos primeros lanzamientos de la moneda.

$\Omega \rightarrow R$

(C,C,C) →(0,2)
(X,C,C) →(1,1)
(C,X,C) →(1,1)
(C,C,X) →(1,2)
(X,X,C) →(2,0)
(X,C,X) →(2,1)
(C,X,X) →(2,1)
(X,X,X) →(3,0)

33

4.5 Variables aleatorias bidimensionales. Independencia de v.a.

Se denomina distribución de probabilidad bidimensional de las variables aleatorias a las probabilidades asociadas a los distintos valores que pueden tomar conjuntamente dichas variables aleatorias,

$$p_{ij} = \mathrm{P}\left[(X,Y) = (x_i, y_j)\right] = \mathrm{P}\left[X = x_i, Y = y_j\right].$$

Toda distribución de probabilidad bidimensional cumple:

- $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$
- $\sum_{\forall i} \sum_{\forall j} p_{ij} = 1$

$$\mathrm{P}[X=0, Y=2] = \mathrm{P}[(CCC)] = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}[X=1, Y=1] = \mathrm{P}[(+CC) \cup (C+C)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}[X=1, Y=2] = \mathrm{P}[(CC+)] = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}[X=2, Y=0] = \mathrm{P}[(++C)] = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}[X=2, Y=1] = \mathrm{P}[(C++) \cup (+C+)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}[X=3, Y=0] = \mathrm{P}[(+++)] = \frac{1}{8}$$

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0	0	$1/8$
1	0	$2/8$	$1/8$
2	$1/8$	$2/8$	0
3	$1/8$	0	0

34

Función de distribución bidimensional. Función de densidad bidimensional

Dada una variable aleatoria bidimensional, se define la función de distribución (conjunta) de como:

$$F(x,y) = P[X \le x, Y \le y] = P[\omega \in \Omega / X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y] \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

Si las variables aleatorias son discretas la función de distribución es escalonada (*discontinua*). Si las variables aleatorias son continuas la siguiente derivada de la función de distribución conjunta es la función de densidad (conjunta):

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = f(x,y)$$

Toda función de densidad bidimensional cumple las siguientes propiedades:

- $f(x,y) \ge 0 \qquad \forall (x,y) \in R^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$

La probabilidad de que la variable aleatoria bidimensional tome valores en un determinado conjunto es igual a la integral definida de la función de densidad bidimensional sobre dicho conjunto.

35

Distribuciones de probabilidad marginales

Para variables aleatorias **discretas**, se define la distribución de probabilidad marginal de X y de Y como

$$p_{i\bullet} = P[X = x_i] = P[X = x_i,\quad Y = cualquier\ valor] = \sum_{\forall j} p_{ij}$$

$$p_{\bullet j} = P[Y = y_j] = P[X = cualquier\ valor,\quad Y = y_j] = \sum_{\forall i} p_{ij}$$

Ejemplo

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	0	0	$1/8$	$1/8$
1	0	$2/8$	$1/8$	$3/8$
2	$1/8$	$2/8$	0	$3/8$
3	$1/8$	0	0	$1/8$
$p_{\bullet j}$	$2/8$	$4/8$	$2/8$	1

36

Distribuciones de probabilidad marginales

Para variables aleatorias **continuas**, se define la función de densidad marginal de X y de$Y$ como

$$f_1(x) = f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_2(y) = f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

Ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6y-6x^2y}{2} = 3(1-x^2)y & ,\ 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & ,\ \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 3(1-x^2)\,y\,dy = 3(1-x^2)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}(1-x^2) \qquad si \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0 \qquad \text{en otro caso}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 3(1-x^2)\,y\,dx = 3y\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3y\left[1-\frac{1}{3}\right] = 2y \qquad si \quad 0 \le y \le 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx = 0 \qquad \text{en otro caso}$$

37

Independencia de variables aleatorias

En el caso **discreto**, diremos que las variables X e Y son independientes si

$$\mathrm{P}\left[X = x_i, Y = y_j\right] = \mathrm{P}\left[X = x_i\right]\mathrm{P}\left[Y = y_j\right] \qquad \forall x_i, y_j$$

Ejemplo

$X \setminus Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	0	0	$1/8$	$1/8$
1	0	$2/8$	$1/8$	$3/8$
2	$1/8$	$2/8$	0	$3/8$
3	$1/8$	0	0	$1/8$
$p_{\bullet j}$	$2/8$	$4/8$	$2/8$	1

$$p_{11} = 0 \ne p_{1\bullet}.p_{\bullet 1} = \frac{1}{8}\frac{2}{8} = \frac{1}{32}$$

X eY NO SON INDEPENDIENTES

38

Independencia de variables aleatorias

En el caso **continuo**, diremos que las variables X e Y son independientes si

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y) \qquad \forall x, y$$

Ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6y - 6x^2 y}{2} = 3(1-x^2)y & ,0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & ,\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1-x^2) & ,0 \le x \le 1 \\ 0 & ,\ en\ otro\ caso \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2y & ,0 \le y \le 1 \\ 0 & ,\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

X eY SON INDEPENDIENTES

39

Principales momentos en variables aleatorias bidimensionales

Media (marginal) de *X*.

Variables discretas: $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i\bullet}$

Variables continuas: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\, dx$

Media (marginal) de *Y*.

Variables discretas: $E[Y] = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{\bullet j}$

Variables continuas: $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\, dy$

Propiedades:

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$E[X-Y] = E[X] - E[Y]$

40

Varianza (marginal) de *X*.

Variables discretas:

$$Var[X]=\sigma^2[X]=\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2\,p_{i\bullet}=E\left[X^2\right]-(E[X])^2=E\left[X^2\right]-E^2[X]$$

Variables continuas:

$$Var[X]=\sigma^2[X]=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E[X])^2\,f_1(x)\,dx=E\left[X^2\right]-(E[X])^2=E\left[X^2\right]-E^2[X]$$

Varianza (marginal) de *Y*.

Variables discretas:

$$Var[Y]=\sigma^2[Y]=\sigma_y^2=\sum_{j=1}^{\infty}(y_j-E[Y])^2\,p_{\bullet j}=E\left[Y^2\right]-(E[Y])^2=E\left[Y^2\right]-E^2[Y]$$

Variables continuas:

$$Var[Y]=\sigma^2[Y]=\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E[Y])^2\,f_2(y)\,dy=E\left[Y^2\right]-(E[Y])^2=E\left[Y^2\right]-E^2[Y]$$

Propiedades:

$$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]+2Cov[X,Y]$$

$$Var[X-Y]=Var[X]+Var[Y]-2Cov[X,Y]$$

41

Covarianza (*momento centrado de ordenes 1,1*):

Variables discretas:

$$Cov[X,Y]=\sigma[X,Y]=\sigma_{xy}=E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-E[X])(y_j-E[Y])\,p_{ij}$$

Variables continuas:

$$Cov[X,Y]=\sigma[X,Y]=\sigma_{xy}=E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E[X])(y-E[Y])\,f(x,y)\,dx\,dy$$

Propiedades:

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y].$$

Por tanto, en caso de **independencia**:

$$Cov[X,Y]=0$$

$$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y].$$

$$Var[X-Y]=Var[X]+Var[Y]$$

42

Ejemplo. Sea la siguiente v.a. bidimensional discreta. Hallar la covarianza

Y\X	0	1	2	$p_{.j}$	$y_j p_{.j}$
3	0.10	0.10	0.02	0.22	0.66
4	0.05	0.40	0.10	0.55	2.2
5	0.03	0.10	0.10	0.23	1.15
$p_{i.}$	0.18	0.60	0.22	1	4.01
$x_i p_{i.}$	0	0.60	0.44	1.04	

$$Cov(X,Y) = E[XY] - EX * EY$$

Y\X	0	1	2
3	0	0.30	0.12
4	0	1.6	0.80
5	0	0.50	1

$$E[XY] = 4.32$$

$$Cov(X,Y) = 4.32 - 1.04 * 4.01 = 0.1496$$

¿X e Y son independientes? NO $\quad 0.22 * 0.18 \neq 0.10$

43

Ejemplo. Sea la función de densidad conjunta de X e Y. Hallar la esperanza de Y:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12}xy^2 & 0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^3 \frac{1}{12}xy^2 dx = \frac{1}{12}y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{12}y^2\frac{9}{2} = \frac{3}{8}y^2, \qquad 0 \le y \le 2$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = \int_0^2 y\frac{3}{8}y^2\ dy = \int_0^2 \frac{3}{8}y^3\,dy = \frac{3}{8}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{8}4 = 1.5$$

44