ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO Y DIDÁCTICO DE NOCIONES, PROCESOS Y SIGNIFICADOS DE OBJETOS ANALÍTICOS*

Miguel Rodríguez Wilhelmi

Universidad Pública de Navarra

ABSTRACT

Our main goal is to determine and describe notions, processes and meanings of objects dealing with Analysis (absolute value, limit, continuous functions, etc.), aiming towards teaching and learning them, curricula and textbooks elaboration. This task demanded the problematization of model notion as well as the confrontation of various perspectives regarding Mathematics Education, so as to determine a common field of validity for the views of such perspectives. It has also been necessary to justify the inclusion of the new technologies (scientific, graphical and programme calculator; computer programmes) upon the introduction of the fundamental notions of Calculus.

RESUMEN

Nuestro objetivo principal es la determinación y descripción de nociones, procesos y significados de objetos propios del Análisis Matemático (valor absoluto, límite, función continua, etc.), con vistas a la enseñanza y aprendizaje de los mismos, a la construcción de currículos y a la elaboración de libros de texto. Este objetivo ha exigido la problematización de la noción de modelo y la confrontación de diferentes perspectivas en Didáctica de las Matemáticas, con el fin de determinar un campo común de validez para los aportes de dichas perspectivas. Asimismo, ha sido necesario justificar la inclusión de las nuevas tecnologías (calculadoras científicas, gráficas y programables; programas de ordenador) en la introducción de las nociones fundamentales del cálculo.

Palabras clave: análisis curricular; didáctica del Análisis Matemático; modelización; nuevas tecnologías; significado.

1 OBJETIVOS

Los objetivos específicos de la investigación pueden ser estructurados en tres grandes bloques: *modelos matemáticos*, qué es un modelo matemático y cómo pueden ser clasificados (con especial interés en la modelización intramatemática); *teoría didáctica*, qué quiere decir que una persona comprende una determinada noción o sabe un procedimiento o conoce el significado de un objeto matemáticos; y, por último, *didáctica del análisis*,

---

* Resumen de la Tesis Doctoral homónima, defendida el 10 de abril de 2003 ante el tribunal formado por Guy Brousseau (Université Bordeaux I, presidente), Salvador Llinares (Universidad de Alicante, vocal), Martín Socas (Universidad de La Laguna, vocal), Juan D. Godino (Universidad de Granada, vocal) y Esteban Induráin (Universidad Pública de Navarra, secretario), obteniendo la calificación de *Sobresaliente "cum laude"*, por unanimidad. La tesis fue dirigida por Eduardo Lacasta (Universidad Pública de Navarra).

discriminar los procesos analíticos fundamentales y determinar reglas de actuación en el sistema didáctico.

De manera más concreta, la necesidad del sistema educativo de conseguir una actuación eficiente en la introducción de las nociones fundamentales del cálculo determina los siguientes objetivos:

- Construcción de una *situación fundamental* para la introducción de la noción de límite, esto es, determinación de un conjunto de relaciones entre los estudiantes, el profesor y el saber "límite", de tal forma que los estudiantes descubran dicha noción como respuesta óptima a la situación propuesta. En este contexto, se afirmará que un estudiante ha aprendido la noción de límite si ha sido capaz de adaptarse a las restricciones de dicha situación, la cual, de esta forma, se constituye en descriptor de la evolución de los conocimientos (instrumento de evaluación del aprendizaje y de la enseñanza).
- Justificar la pertinencia de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las nociones fundamentales del cálculo, como complemento de los métodos tradicionales de enseñanza (cuyo foco de atención son las manipulaciones formales de los objetos matemáticos y las técnicas simbólicas de cálculo).
- Estudio de la interacción entre lo aritmético-algebraico y lo analítico (en particular, el papel de la edición de programas de cálculo numérico).

Por otro lado, es necesario un trabajo que contribuya a la unidad y a la formalización teórica de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica; en concreto, se ha constatado que ciertas teorías didácticas se adaptan especialmente a la descripción y comprensión de determinadas situaciones de enseñanza y aprendizaje y que, sin embargo, se revelan ineficaces en otras situaciones. Por ello, es necesario un estudio sobre la complementariedad de las teorías didácticas: determinación de condiciones suficientes que permitan establecer un campo común de aplicabilidad de los enfoques y resultados aportados por dichas teorías; y aquí el problema del lenguaje se revela fundamental, como ha destacado Margolinas (1993, p.18): "*Une théorie cherche à créer un domaine de 'signification' sur les objets qu'elle entend travailler, et la signification passe nécessairement par un réseau sémantique. Le travail de ce que superficiellement on pourrait prendre pour le 'vocabulaire' est constitutif de la cohérence d'une théorie, et par là, de sa scientificité*".

2 INTRODUCCIÓN

En esta sección motivamos la pertinencia de la investigación realizada. En primera instancia hacemos un barrido sobre los trabajos teóricos y empíricos más destacados en relación con ciertos aspectos centrales de nuestra investigación, mostrando la necesidad de estudios específicos que aborden el problema de la significación de los objetos matemáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con especial interés en la introducción de nociones y procesos de objetos propios del Análisis Matemático. En segunda instancia, a partir de la descripción de los aportes más destacados en didáctica del análisis y de los problemas todavía no resueltos, formularemos las hipótesis centrales que han sido sometidas a estudio.

2.1 APORTACIONES TEÓRICAS Y EMPÍRICAS MÁS DESTACADAS

Las aportaciones teóricas y empíricas más destacadas pueden ser estructuradas en tres grupos, atendiendo a las obras matemáticas objeto de estudio (Aritmética, Álgebra y Análisis), a lo que debe entenderse por comprensión y significado de un objeto matemático y a la implicación que ello tenga en una *didáctica normativa*[1] y, por último, a la pertinencia del uso de nuevas tecnologías (en particular, calculadoras científicas, programables y de graficación) en la enseñanza de nociones, procesos y significados de objetos analíticos.

2.1.1 Aritmética, Álgebra y Análisis

La enseñanza obligatoria de las matemáticas establece dos puntos clave en el aprendizaje de las mismas: uno, el paso de la aritmética al álgebra (Chevallard (1998), Gascón (1994), etc.); otro, el paso del álgebra al análisis (Cornu (1991), Groupe AHA (1999), Schneider (2001), etc.). El paso de la aritmética al álgebra es identificado con las primeras manipulaciones simbólico-literales de objetos *ostensivos* (Bosch y Chevallard, 1999), que hacen evolucionar el pensamiento matemático de un planteamiento numérico, intuitivo y *experimental* (Chevallard, 1992) hacia interpretaciones formales de familias de objetos pertenecientes a un determinado universo.

Por otro lado, la noción de límite secuencial determina en las instituciones escolares actuales el paso fundamental del álgebra al análisis. Dicha noción supone, entre otras cosas, la resignificación de la noción de igualdad: dos números son iguales si su diferencia en valor absoluto es tan pequeña como se desee ($a = b \Leftrightarrow |a - b| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$). Esta interpretación analítica supone un cambio en los métodos de demostración (Bloch, 1995, 1999): del avance por equivalencias propio del álgebra, al avance por pérdida controlada de información o "comparaciones suficientes", adaptado especialmente a los procesos analíticos.

Nuestra investigación se ha centrado en el segundo paso: del álgebra al análisis. La necesidad de un estudio específico del sistema didáctico con vistas a la enseñanza y aprendizaje de las nociones fundamentales del cálculo se acepta a partir de los resultados vertidos por investigaciones precedentes. Así, por ejemplo, Tall (1991) muestra una panorámica de los avances más significativos obtenidos en el seno del programa cognitivo en Didáctica de las Matemáticas (*Mathematic Education*), constatando la necesidad de nuevas investigaciones que aborden los problemas bien formulados y que contrasten las soluciones parciales obtenidas. Por otro lado, Artigue (1998) ha constatado la necesidad de

[1] Didáctica normativa o didáctica como saber técnico: colección de recursos (físicos y metodológicos) al alcance del profesor que le permitan realizar una instrucción "satisfactoria".

nuevos estudios que permitan una descripción detallada de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones elementales del cálculo; llegando a la conclusión de que "*même si nous progressons dans la compréhension, la question de rapports possibles entre cette compréhension et une action didactique raisonnable, même locale, reste très largement ouverte*" (p.259).

2.1.2 El problema del significado en matemáticas

Godino y Batanero (1994, 1998) proponen una Perspectiva Semiótico-Antropológica en Didáctica de las Matemáticas, que parte de un análisis de la noción de significado desde un punto de vista didáctico: ¿qué significado atribuyen los estudiantes a los objetos matemáticos? Así, esbozan una teoría pragmática (en oposición a realista) del significado de los objetos matemáticos, condicionados institucional, personal y temporalmente, y muestran la necesidad de construcción de una semiótica específica que, en primer lugar, permita la descripción e interpretación de los sistemas de signos utilizados en las instituciones escolares; y en segundo lugar, establezca criterios básicos de actuación dentro del sistema didáctico, con el fin de que los estudiantes comprendan "significativamente mejor" los contenidos matemáticos que el currículo establece como obligatorios.

En este sentido, se precisan medios de descripción de significados curriculares de objetos que van a ser enseñados en una determinada institución escolar, esto es, criterios de estructuración de gestos, técnicas, procedimientos, nociones y problemas asociados a un determinado objeto matemático y que constituyen su significado situacional (referido al conjunto de situaciones que es pertinente comprender y comunicar); de esta forma, se tendría un instrumento para la construcción de currículos y la elaboración de libros de texto.

Por otro lado, si se comprende la evaluación del comportamiento (cognitivo y matemático) de un individuo como la adaptación entre los significados que éste atribuye a los objetos matemáticos y los significados institucionales determinados de antemano, se precisa de medios específicos para enmarcar los contenidos "a enseñar" dentro de un proyecto global de enseñanza.

En definitiva, el problema del sentido de los objetos matemáticos y de su gestión dentro de las instituciones educativas es uno de los grandes objetivos de la didáctica. Con otras palabras, la didáctica debe "*faire évoluer sa conception de la construcción du sens*" (Brousseau, 1998, p.314), con el fin de asegurar intervenciones eficaces en el sistema didáctico (con relación a la construcción y comunicación de nociones, procesos y significados matemáticos), que aseguren el uso flexible de conocimientos adquiridos en situaciones reales (cotidianas o profesionales).

2.1.3 Uso de nuevas tecnologías en la enseñanza

Artigue (1998) llega a la conclusión de que "*la recherche en didactique de l'analyse ne peut se déployer en faisant abstraction de la dimension technologique*" (p.258). En la actualidad, la técnica juega un papel central en las formas de construcción y comunicación de conocimiento matemático (Thurston, 1994); pero aún más, la motivación didáctica se enmarca dentro de una necesidad cultural y social de integrar de manera eficaz las nuevas tecnologías en la educación, como instrumentos para la comprensión y descripción del mundo que nos rodea y para poder intervenir adecuadamente sobre él.

Chevalier y Briand (1995) muestran cómo un uso no pertinente de calculadoras gráficas puede llevar a interpretaciones erróneas de resultados obtenidos "irreflexivamente", resaltando la necesidad de que todo aprendizaje vaya acompañado de medios de control sobre la actividad que se esté realizando. En este sentido, García et al. (1995) muestran cómo las nuevas tecnologías pueden reducir el tiempo que se dedica en la enseñanza tradicional al dominio de ciertas técnicas, aplicándolo a la comprensión de las nociones y procesos matemáticos y a la experimentación (pensamiento conjetural, inducción empírica, etc.). Sin embargo, insisten en que "*las nuevas tecnologías, por sí solas, no van a solucionar los problemas de la enseñanza, y pueden crear algunos otros […] En consecuencia, la conclusión más importante es la urgencia de reflexionar sobre cómo usar estas nuevas tecnologías*" (p.28).

Por otro lado, la visualización juega un papel central en el aprendizaje y la enseñanza del Análisis Matemático; esto justifica una tendencia en las investigaciones en didáctica del análisis a tomar como objeto central de estudio el gráfico cartesiano de funciones. Alson (1996) propone una interpretación gráfica de los objetos analíticos. Guzmán (1996) ha mostrado cómo ciertos ideogramas permiten la introducción de nociones, procesos y significados de objetos propios del Análisis Matemático y cómo la discretización del análisis permite aproximaciones eficaces a resultados clásicos del Análisis Matemático. Por su parte, Lacasta (1995) y Chauvat (1998) han destacado los diferentes usos del gráfico cartesiano de funciones, que precisan de una enseñanza específica.

En este contexto, es necesario estudiar la interacción de las proposiciones expuestas por estos autores con la utilización de calculadoras graficadoras y programas de ordenador específicos, para poder evaluar el impacto de las nuevas tecnologías en la educación matemática; en particular, es necesario establecer criterios de pertinencia que contribuyan a la mejora de la comprensión matemática dentro de las instituciones de enseñanza.

2.2 HIPÓTESIS

Las hipótesis pueden estructurarse según la pregunta que intentan contestar y el contexto en el que surgieron: modelos matemáticos, teoría didáctica y didáctica del análisis.

2.2.1 Modelos matemáticos

Históricamente, los modelos han cumplido principalmente una función predictiva (representantes simplificados de los sistemas). Sin embargo, por un lado, la realidad matemática se muestra mucho más compleja y, por otro lado, los objetos matemáticos son manipulados por un individuo particular según ciertas necesidades técnicas o teóricas. "*Le modèle est une mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel*" (Chevallard, 1998, p.60). Hay, por lo tanto, una relativización del modelo al individuo (a sus necesidades concretas de actuación y a sus conocimientos útiles con relación al objeto que está estudiando). Aún más, es posible clasificar los modelos por su función (uso efectivo que establece un sujeto por intermedio de unos conocimientos) y por su génesis (según el tipo de sistema modelizado, figura 1).

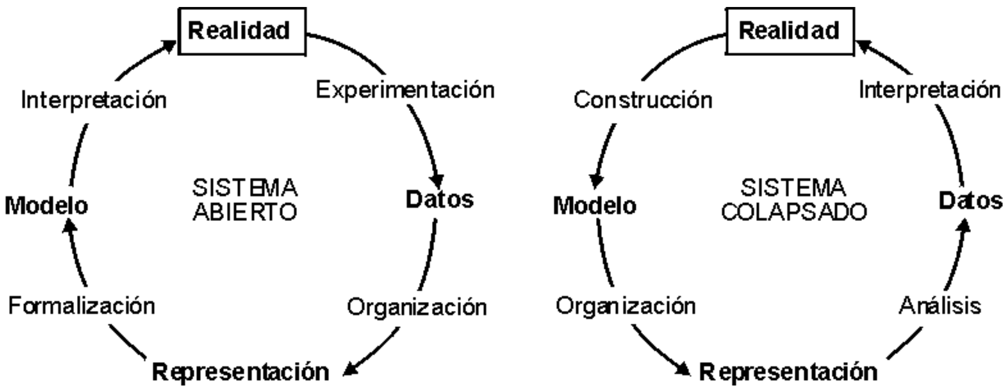

FIGURA 1. MODELIZACIÓN: SISTEMAS ABIERTO Y COLAPSADO.

Por otro lado, la educación matemática ha hecho hincapié en mostrar la necesidad de un aprendizaje por adaptación a situaciones complejas; esto es, se resalta la necesidad de una enseñanza que permita a los estudiantes el tránsito flexible entre diferentes "estados" de una misma noción o proceso matemáticos, adaptando los objetos matemáticos a las necesidades específicas de resolución del problema que está afrontando.

En este contexto, es necesario determinar los significados curriculares o de referencia de los objetos matemáticos que han de ser enseñados en las instituciones escolares. Dichos significados determinarán criterios de enseñanza de técnicas matemáticas y de justificaciones de las mismas, dentro de un marco teórico claramente delimitado.

> *Hipótesis* 1. El significado (de referencia) de un objeto matemático puede ser descrito como la interacción de modelos matemáticos asociados a dicho objeto.

2.2.2 Teoría didáctica

La Didáctica de las Matemáticas (DM) recibe el influjo de distintas ciencias: psicología cognitiva y educativa, pedagogía, epistemología, matemáticas, etc. El punto de vista clásico en DM supone que estas ciencias ofrecen un marco teórico suficiente para la comprensión y descripción de los sistemas didácticos y la actuación consecuente sobre los mismos.

El Programa Epistemológico en DM (Gascón, 1999), en el cual se inscribe nuestro trabajo, postula que la DM es una ciencia autónoma, cuyo objeto de estudio es la comunicación y construcción de objetos matemáticos en lo que este estudio tiene de específico de dichos objetos matemáticos. De esta forma, el Programa Epistemológico en DM modeliza explícitamente el saber matemático "a enseñar", mostrando la insuficiencia de los análisis exclusivamente psicológicos o pedagógicos de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Esta perspectiva es novedosa. No en vano puede cifrarse a finales de los 70 o principios de los 80 la emergencia de la DM como un campo del saber autónomo, que propone soluciones específicas a problemas de enseñanza y aprendizaje que no habían sido contemplados anteriormente por la psicología cognitiva o la pedagogía. Nos encontramos, por lo tanto, con una ciencia joven, necesitada todavía de formulaciones teóricas nuevas y de una confrontación de los diferentes enfoques existentes. Prueba de esta necesidad unificadora, y del interés que ella suscita dentro de la comunidad científica, es la gran cantidad de artículos escritos y publicados en revistas, actas de congresos y compilaciones (Kilpatrick (1994), Legrand (1996), Gascón (1999), Godino (2001), etc.)

> *Hipótesis* 2. Apoyándose en la noción de modelo, es posible reinterpretar nociones fundamentales aportadas por diferentes perspectivas teóricas de la Didáctica de las Matemáticas; esto permite construir un vocabulario coherente para afrontar problemas didácticos en un campo común.

2.2.3 Didáctica del análisis

En la actualidad, las propuestas educativas (NCTM, 1991, 2001) postulan una enseñanza lineal de la aritmética, el álgebra y el análisis, centrada en el "paso" de una obra matemática a otra. La descripción de estos "pasos" determina, en buena medida, la profundidad de los análisis instruccionales, cognitivos, didácticos y aún epistemológicos.

Estos pasos llevan asociados dos fenómenos: linealidad y reduccionismo. Brevemente, la linealidad se puede describir afirmando que "la aritmética precede al álgebra y ésta al análisis". Se entiende con esto que son "obras cadena" y que el aprendizaje de cada una establece condiciones previas necesarias para el aprendizaje de la "siguiente". Entonces, el esquema de la enseñanza sería:

$$\text{Aritmética} \rightarrow \text{Álgebra} \rightarrow \text{Análisis}$$

El reduccionismo se puede describir en los siguientes términos: el álgebra es comprendida como una aritmética generalizada (con letras) y el análisis como un álgebra de funciones. De esta manera, la enseñanza del álgebra se centra en la manipulación simbólica y en generalizar los métodos aritméticos concretos (implementados sobre números concretos); según Gascón (1994), este hecho ha conducido a una verdadera desarticulación del cuerpo de problemas de la aritmética generalizada. Por otro lado, la enseñanza del análisis ha intentado mostrar la potencia de las manipulaciones formales esbozadas en la enseñanza del álgebra, por ampliación del universo de objetos (de números a funciones; de hecho, los números son comprendidos entonces como funciones constantes). Estos dos reduccionismos invierten, en la práctica, el esquema anterior:

Aritmética ← Álgebra ← Análisis

> *Hipótesis* 3. La enseñanza atomizada y lineal de la aritmética, el álgebra y el análisis (en este orden) no contribuye a su aprendizaje; es necesaria una concepción triangular que permita, en cada problema concreto, la interacción de aproximaciones numéricas, algebraicas y analíticas para la obtención de una solución.

Otro aspecto fundamental es la necesidad de ciertos "desplazamientos del foco de interés". El análisis matemático se debe desplazar desde los análisis formales (por ejemplo, manipulaciones literales de funciones algebraicas) hacia la comunicación y construcción de conocimientos de forma más intuitiva, gráfica y numérica (donde la comparación y la aproximación representan procesos fundamentales). En este contexto, las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas y programables y *softwares* especializados) deben jugar un papel central en la introducción de las nociones, procesos y significados de objetos analíticos. En general:

> *Hipótesis* 4. Se tiene que favorecer la interpretación numérica y gráfica de objetos propios del Análisis Matemático; en particular, es necesaria una utilización pertinente de las nuevas tecnologías.

Por otro lado, es necesario marcar la distinción entre el "avance por equivalencias" (de los métodos propios del álgebra) y el "avance por pérdida controlada de información" o "análisis de relaciones *suficientes* entre objetos". Esta pérdida controlada de información apela directamente a la determinación de modelos específicos asociados a los procesos analíticos: modelos que amplían la problemática, mediante la definición de un nuevo objeto (en general, una función), manipulado en un marco de representación pertinente y vigilado epistemológicamente por un referente justificativo o teoría.

> *Hipótesis* 5. Una de las diferencias esenciales entre los procesos aritmético-algebraicos y analíticos es la necesidad que se tiene en estos últimos de definir modelos justificativos ajenos al discurso original; mientras que en los métodos algebraicos la demostración de una proposición se realiza por "transformaciones literales de objetos previamente dados".

3. MÉTODO

Podemos describir de forma global la metodología como cualitativa. Los test y entrevistas son abiertos (orientados al proceso, no al resultado), puesto que estamos interesados en la construcción y comunicación de objetos matemáticos, no exclusivamente en el manejo eficaz de técnicas de cálculo. La población objeto de estudio ha estado constituida por estudiantes en formación, futuros profesores de secundaria, especialidad de matemáticas. Las edades de dichos estudiantes han variado entre 17 y 23 años.

Dentro del programa epistemológico se impone el método de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), que permite validar hipótesis previamente formuladas por medio de un estudio exhaustivo de las restricciones cognitivas, instruccionales, epistemológicas y didácticas del sistema didáctico objeto de estudio.

Conjuntamente a la ingeniería didáctica hemos usado el *estudio de casos* (análisis de protocolos[2]), análisis de textos, análisis epistemológicos y de transposición didáctica, todo dentro de un proyecto global de teorización y unificación de la Didáctica de las Matemáticas.

3.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA

La intención última es encontrar medios óptimos para la enseñanza y el aprendizaje de las nociones, procesos y significados de objetos propios del Análisis Matemático (límite, función, valor absoluto, etc.). Esto se concreta en la búsqueda de una *ingeniería didáctica* que permita controlar a priori la puesta en escena de situaciones concretas en el proceso experimental. Las fases de la metodología de la ingeniería didáctica son:

a) Análisis preliminares (epistemológico, enseñanza tradicional, concepciones de los estudiantes, restricciones) teniendo en cuenta nuestro objetivo general.

b) La concepción y el análisis *a priori*: análisis de control de significado, construcción de un *medio didáctico* ("milieu[3]" —Brousseau, 1998) y establecimiento de un *contrato didáctico*[4] tentativo.

c) Experimentación, análisis a posteriori y validación. Se entiende que un sujeto comprende una noción o procedimiento matemáticos que se desea introducir si es capaz de adaptarse al *medio* implementado.

Las dos pasos fundamentales son los análisis *a priori* y *a posteriori*. El control de la puesta en escena de situaciones concretas se efectúa por medio de una análisis *a priori* que busca precisar las posibilidades que se han identificado en el análisis preliminar; en concreto, identificar los valores de las variables didácticas, los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores y el sentido que se le puede atribuir a estos comportamientos.

En una segunda fase, los datos recogidos de la experimentación (observaciones de secuencias de enseñanza, test, entrevistas, etc.) permiten elaborar el *análisis a posteriori* y, por confrontación con el análisis a priori, validar, refutar o, simplemente, conformar o poner en duda[5] las hipótesis de investigación. Por ello, hemos sido extremadamente cuidadosos tanto en los estudios matemáticos previos a las cuestiones que queríamos analizar, como en

[2] Protocolo : reproducción completa y fiel de la actividad de un individuo durante cierto espacio de tiempo.

[3] Conjunto de gestos, técnicas, procedimientos, tecnologías y significados de objetos matemáticos que pertenecen al bagaje matemático de una sociedad (clase o comunidad científica) y que, por lo tanto, son utilizados de manera rutinaria (eficaz, no problemática) y conjunto de instrumentos materiales o humanos (situaciones, calculadoras, libros de texto, clases, etc.) disponibles para la adaptación de los objetos conocidos a nuevos contextos, la comunicación de resultados matemáticos y la construcción de nuevos objetos matemáticos.

[4] Conjunto de reglas, generalmente implícitas, que determinan la responsabilidad matemática de profesor y estudiantes con relación a un determinado saber.

[5] "*Il me paraît indispensable […] de procéder ainsi : formuler des hypothèses, sans entrer dans l'ilusion qu'elles seront réfutables ou définitivement acquises, mais seulement mises en doute ou confortées*" (Gras, 1996).

los presupuestos didácticos que podían contribuir a la "implementación" (ya en el libro de texto, ya en las exposiciones orales, ya en el diseño de pruebas o cuestionarios).

Este férreo estudio teórico era estrictamente necesario, en particular, para la gestión de las entrevistas escritas, para poder conseguir una dinámica de *devoluciones*[6] eficaces, no un mero juego floral que encubra una sesión magistral. Además, el estudio posterior de las entrevistas escritas (descripción de las realizaciones y extracción de información fiable, análisis de protocolos) queda guiado por dicho análisis teórico previo: es la medida de lo que se puede y de lo que no se puede deducir de las realizaciones del estudiante.

Por último, la pertinencia de la ingeniería didáctica puede comprenderse no sólo porque constituye la metodología predominante dentro del Programa Epistemológico, sino también porque representa un medio de producción de materiales para la enseñanza. Esta doble función de la ingeniería didáctica permite articular las producciones teóricas y las necesidades de acción en los procesos de enseñanza.

3.2 ANÁLISIS DE PROTOCOLOS

La descripción de la actividad de un sujeto "en producción matemática" es compleja, porque hay que interpretar una secuencia de "operaciones" y atribuirles un significado en un contexto matemático y didáctico. Para ello, es necesario separar un plano teórico y un plano de la "contingencia" o de las realizaciones. La relación entre los saberes (en el plano teórico) y las acciones de un sujeto (en el plano de las realizaciones) ha conducido a P. Alson (2000) a la introducción de cuatro operaciones fundamentales de producción de un conocimiento: algorítmica (A), significante (S), de interpretación (I), de formalización (F). De esta forma, se postula (Alson, 2000) que la actividad de un sujeto "en producción matemática" puede ser descrita como una secuencia de operaciones de producción (ASIF).

Sin embargo, hemos necesitado distinguir diferentes aspectos con relación a la producción de objetos matemáticos: *proceso potencial* (independiente del acto), p*roceso observado y descrito* (hay que distinguir entre un observador externo y el propio sujeto agente —lo descrito no es necesariamente lo mismo que lo hecho) y, por último, p*roceso general* (en ciertas ocasiones, el proceso realizado conducirá al sujeto agente a identificar y, por lo tanto, a enunciar (formalizar) un proceso general, qué determinará su comportamiento en ciertas situaciones similares[7]).

La producción de objetos matemáticos puede ser descrita teniendo en cuenta las realizaciones observadas y las descripciones que de éstas hace un observador. La descripción de toda acción supone la existencia de un observador que identifica un comportamiento de un sujeto enfrentado a un medio. El observador no se ocupa del medio

[6] Devolución: acto por el cual el profesor transfiere al estudiante la responsabilidad de una situación de aprendizaje, a la vez que acepta las consecuencias de esta transferencia.

[7] El proceso es comprendido como "solución" (proceso reutilizable, más general, que sobrepasa la realización concreta del procedimiento); con otras palabras, el proceso representa una *concepción*: noción que generaliza la conciencia de que una acción pertenece a una clase de acciones.

sino de la acción del actor. El observador es capaz de discriminar aquello que hace referencia a sus conocimientos explícitos: no es posible ser observador de un comportamiento que se desconoce a priori; la descripción se realiza en función de una cultura, un vocabulario, etc.

Por otro lado, si consideramos el aprendizaje como la adaptación a una situación de enseñanza en la que participa un profesor, es necesario tener en cuenta, además de las operaciones de producción, las intervenciones metamatemáticas (M), esto es, discusiones en torno a qué es una demostración, cuál es la función de un objeto matemático, qué es un convenio, etc. Las intervenciones metamatemáticas determinan en gran medida la evolución del proceso de estudio, puesto que en muchos casos implican redefiniciones del contrato didáctico. Además, es necesario explicitar el sujeto agente (alumno, profesor).

El esquema M-ASIF que hemos introducido es una red de descripción de una situación de enseñanza con un estudiante comportándose de manera productiva personal; de forma más concreta, el esquema M-ASIF es una secuencia de pasos identificados por una terna (operación, agente, descripción), que permite razonar la carga global y puntual que tienen a cargo profesor y alumno en el proceso de estudio de un determinado objeto matemático (ver anexo: descripción de la demostración de $\lim (n)^{1/n} = 1$).

3.3 TRABAJO TEÓRICO

El trabajo que hemos realizado es principalmente teórico. La pertinencia del mismo se acepta porque nos ha posibilitado anticipar resultados experimentales (producción de libros de texto, análisis de observaciones). Para su evaluación, en primer lugar, hemos controlado la coherencia interna del propio trabajo y, en segundo lugar, su relación con las producciones teóricas realizadas por otros autores.

El carácter teórico del trabajo puede ser comprendido como el “cascarón" de dos dimensiones más profundas: el trabajo del lenguaje y la importancia que para la didáctica pueda tener la comprensión de la actividad matemática como una labor compleja de modelización.

El trabajo del lenguaje se concreta en la necesidad, en primer lugar, de definir un vocabulario y, en segundo lugar, de mostrar el “alcance" de éste, esto es, el tipo de cuestiones que permite afrontar y la “finura y precisión" con que lo hace. Entonces, hemos necesitado buscar situaciones, problemas y procesos adecuados que permitan comprender el alcance de las definiciones introducidas. Esta búsqueda ha conllevado el análisis de libros de texto, de los medios implementados en la enseñanza y de las realizaciones (y concepciones) de los estudiantes.

Todo este trabajo nos ha conducido también, en muchas ocasiones, a la formulación, de manera más o menos explícita, de preguntas a las que hemos dado una respuesta parcial; esto no es la constatación de una debilidad de la investigación realizada, sino parte de la metodología: obtención de cuestiones que se deducen de manera más o menos clara de los análisis realizados y que, con base en la problematización realizada, son susceptibles de convertirse en señalizaciones para nuevas investigaciones. Así, por ejemplo, ¿qué interés tiene para los profesores en formación la comprensión del significado y el signo asociados a un objeto matemático como una red de modelos locales? ¿Es posible sistematizar la descripción de las nociones "fundamentales" que se introducen en la escuela? ¿Qué interés tendría un tal trabajo?, etc.

4 RESULTADOS

Agrupamos las conclusiones principales de nuestro trabajo en cuatro apartados:

1. *Modelos y nociones fundamentales en didáctica de las matemáticas*. La noción de modelo[8] permite reinterpretar ciertas nociones didácticas poniendo de manifiesto el carácter sistémico de los objetos didácticos.
2. *Procesos analíticos*. Se aíslan y describen los procesos analíticos y se especifica el papel de "lo numérico" en dichos procesos.
3. *Esquema M-ASIF*. Descripción de situaciones de demostración de proposiciones matemáticas como una secuencia de operaciones de producción y metamatemáticas, agentes y observaciones.
4. *Intuición matemática*. Identificación y descripción de procesos intuitivos, resaltando su naturaleza en esencia local.

4.1 MODELOS Y NOCIONES FUNDAMENTALES EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La noción de modelo permite reinterpretar nociones fundamentales aportadas por diferentes perspectivas teóricas de la Didáctica de las Matemáticas; así se construye un vocabulario coherente[9] para afrontar problemas didácticos en un campo común. Por ejemplo, hemos logrado reinterpretar los siguientes objetos:

- *Pensamiento matemático flexible*. Tránsito rutinario entre diferentes modelos locales[10] asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos. Asimismo, permite establecer nexos firmes entre los modelos locales y uno o varios regionales (dominantes a nivel de la noosfera[11]), que

[8] Relación que establece un sujeto con un objeto, entendido como sistema, en función de un conocimiento previo de éste, para justificar o interpretar un hecho, construir una respuesta o discriminar un objeto dentro de un universo

[9] La coherencia se sigue de la *consistencia interna* (adecuación entre las nociones en el seno del trabajo teórico que exponemos) y la *validez* (correlación externa entre la función de la reinterpretación y la atribuida a la noción dentro de cada una de las perspectivas teóricas en que tuvieron su origen).

[10] La relación efectiva que un sujeto establece con un modelo determina si éste es local (predictivo, justificativo, interpretativo, constructivo, discriminatorio) o regional (teoría global de referencia que permite comprender las relaciones que se establecen).

[11] Conjunto de personas interesadas en la construcción y comunicación de saberes matemáticos.

posibilitan un control eficaz de la actividad y garantizan la responsabilidad matemática del sujeto.

- *Significado*. Interpretación de la red de modelos locales asociados a una noción, esto es, sentido atribuido a dichos modelos y a las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen; todo ello, bajo la óptica de los modelos regionales dominantes, que velan por la coherencia del sistema.
- *Praxeología*. Una praxeología es un modelo de los gestos, tareas, rutinas y técnicas utilizados en un proceso de estudio, así como de las descripciones y justificaciones de este proceso. O, mejor aún, un conjunto estructurado de modelos (locales y regionales) que permite analizar (describir y justificar) una clase de problemas dada.
- *Situación fundamental*. Una situación fundamental es un modelo local capaz de generar (en la mayoría de los estudiantes) tensiones estables con gran parte del resto de modelos locales ligados al saber en juego, así como filiaciones útiles con los modelos regionales dominantes.

4.2 Procesos analíticos

Los resultados referidos a la didáctica del análisis pueden resumirse en dos hechos fundamentales: por un lado, la existencia de unos modelos especialmente adaptados a la práctica analítica, que pueden ser utilizados como descriptores del "paso" de lo algebraico a lo analítico; por otro lado, la importancia radical de "lo numérico" en el aprendizaje y la enseñanza de las nociones fundamentales del cálculo.

Según su naturaleza, los sistemas pueden ser clasificados como abiertos o colapsados (ver figura 1). Si el sistema es abierto, el modelo es de interpolación (supone una simplificación de los datos "aportados" por el sistema); si el sistema está colapsado, se necesita un modelo de extrapolación que permita la ampliación de la problemática mediante la definición de un objeto o conjunto de objetos, manipulados en un marco de representación pertinente y bajo la vigilancia de un modelo regional (referente justificativo de las relaciones que se establecen).

La clasificación de los modelos según su naturaleza constituye un instrumento para la descripción del paso de los procesos aritmético-algebraicos a los procesos analíticos; en concreto, hemos determinado dos tipos de procesos genuinamente analíticos: uno, procesos infinitos (que normalmente implican una operación de paso al límite); otro, análisis de situaciones mediante la introducción de un modelo de extrapolación (a diferencia de los procesos algebraicos que, esencialmente, pueden describirse como la transformación de objetos "dados" de manera explícita en el planteamiento de los problemas).

Por otro lado, lo numérico juega un papel insoslayable en el aprendizaje de las nociones fundamentales del cálculo; en particular, el uso de una calculadora científica ha posibilitado crear condiciones de viabilidad para el aprendizaje de la noción de límite secuencial (a partir de la búsqueda de una demostración para la proposición “$\lim (n)^{1/n} = 1$”, ver anexo). De hecho, el análisis de protocolos de unas sesiones de aprendizaje ha determinado cómo ejercer la gestión de la clase con relación a las posibilidades numéricas, gráficas y de programación de una calculadora, mostrando la pertinencia del medio material “calculadora”.

4.3 ESQUEMA M-ASIF

El esquema M-ASIF (constituido por reflexiones metamatemáticas, las operaciones de producción, los agentes que participan de dichas reflexiones y operaciones y la descripción del proceso de estudio por un observador) es una herramienta muy bien adaptada para la descripción de demostraciones de una proposición matemática en situaciones de enseñanza. Hemos sido capaces de describir mediante dicho esquema el comportamiento productivo personal de diferentes estudiantes (ver anexo), de extraer conclusiones sobre sus procesos cognitivos y matemáticos y de establecer condiciones de viabilidad de una situación de enseñanza que busque la optimización de recursos, esto es, el equilibrio entre el nivel de adidacticidad[12] de una situación y el tiempo asignado al aprendizaje de un determinado objeto matemático en una institución concreta.

De esta manera, las decisiones del profesor representan el compromiso de economizar el gasto de aprendizaje de los estudiantes y preservar el envite epistemológico de la situación. Para que esto sea posible es necesario que el estudiante tenga a su cargo la mayor parte de las operaciones de producción, no siendo todas éstas algorítmicas; por su parte, el profesor toma a su cargo la explicitación de objetos culturales (incluidos los convenios), las tareas técnicas excesivamente complejas y la reflexión sobre el quehacer matemático (aspectos metamatemáticos).

De esta forma, con relación a la demostración de $\lim(n)^{1/n} = 1$ (ver anexo), el número de operaciones “protagonizadas” por el estudiante es mayor que el de las “protagonizadas” por el profesor. Hemos distinguido 24 operaciones, que se distribuyen de la siguiente forma: Estudiante (E) 14; Profesor (P), 2; Interacción equilibrada Estudiante-Profesor (E $\leftrightarrow$ P), 6; devolución de una situación del profesor al estudiante (P $\rightarrow$ E), 2. Esta distribución, por sí sola, la comprendemos como una contribución a la aceptación del carácter óptimo de la situación; más aún, hemos justificado que la optimización, fundamentada en la distribución equilibrada de los tránsitos de una operación a otra y en el protagonismo del estudiante en la mayoría de ellas (no todas algorítmicas), determina, en gran medida, el sentido que el estudiante atribuye a la proposición “$\lim(n)^{1/n} = 1$”.

[12] Situación adidáctica (específica de un saber): situación matemática que permite, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional externa (incluidas intervenciones explícitas del profesor), la emergencia de un conocimiento (asociado a dicho saber) estable en el tiempo y respecto a las variables de la situación; dicho conocimiento emergente constituye una herramienta de adaptación a la situación, adaptación que no era posible con los conocimientos previos del estudiante y las estrategias implícitas de actuación que de éstos se deducen.

En concreto, respecto a la demostración de la proposición "$\lim(n)^{1/n} = 1$", el estudiante afirma: "*genera confianza o seguridad, despierta la imaginación y el interés, motiva, da sentido (no se necesitan conocimientos 'especializados'), es analítica y educativa*". Estas afirmaciones no son, por sí solas, un argumento para aceptar la pertinencia de la demostración. Hay que tener en cuenta que la relación didáctica privilegia lo que realiza, en detrimento de "lo que viene dado". Además, las afirmaciones hechas por el estudiante podrían ser comprendidas como instrumento de "dar al profesor lo que pide". Sin embargo, amén de las muestras de conocimiento en las evaluaciones posteriores del estudiante, hemos utilizado la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998) como medio de validación interna, mostrando relaciones no triviales que nos han permitido estructurar el trabajo del estudiante en situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (fases clave en la construcción de situaciones fundamentales dentro de la TSD).

4.4 Intuición matemática

La intuición matemática tiene un carácter esencialmente local (en oposición al planteamiento cognitivo, que presupone un conocimiento "global en acto"): representa una necesaria interpretación de un modelo local asociado a un determinado objeto matemático. La interpretación supone que un sujeto tome un objeto en un sistema (semiótico y de conocimientos) para formalizarlo en otro sistema, donde le es posible validar la pertinencia del objeto (adaptación a la situación) y aceptar ésta (confianza de la adaptación).

5. DISCUSIÓN

En la sección anterior ("Resultados") hemos descrito los principales resultados obtenidos; en la presente, realizamos una valoración de los mismos, justificando su pertinencia y utilidad, tanto para la Didáctica de las Matemáticas como para la actuación efectiva dentro del sistema didáctico.

5.1 Modelos y nociones fundamentales en Didáctica de las Matemáticas

Las interpretaciones de nociones (pensamiento matemático flexible, significado, praxeología, situación fundamental) suponen una proyección de nociones extraídas de diferentes perspectivas teóricas en DM en un único plano donde pueden ser utilizadas de manera coherente, sin apelar a consideraciones meramente intuitivas o pragmáticas. Este hecho es de capital importancia para la didáctica, pues contribuye a su teorización y unificación (necesidad prioritaria teniendo en cuenta que la DM es una ciencia joven[13]).

[13] "Bien que nous puissons célébrer d'autres étapes clés dans le développement de la recherche sur l'enseignement des mathématiques, nous participons à ce colloque fêtant les vingt ans de didactique des mathématiques en France. Ce nombre me convient parfaitement. Si de nombreux pays dans le monde peuvent retracer l'histoire de l'enseignement des mathématiques sur plusieurs siècles, les communautés de recherche

Con otras palabras, nuestro trabajo puede considerarse como un intento por reconciliar ciertos presupuestos teóricos, por encontrar redes de información válidas para diferentes enfoques, que contribuyan a la pluralidad de puntos de vista en la descripción y comprensión de hechos didácticos y a establecer un campo común donde sea pertinente el uso de herramientas construidas en diferentes sistemas, sin correr el riesgo de caer en un eclecticismo anticientífico.

Por otro lado, si la perspectiva clásica en DM postula que el problema del currículo es la selección, secuenciación y temporalización de los objetos matemáticos a enseñar, la perspectiva del programa epistemológico resalta la estructuración del currículo en técnicas (y justificaciones de estas técnicas). En este sentido, la definición de significado ha posibilitado una descripción sistémica de las nociones de “función continua”, “igualdad” y “valor absoluto”, determinando un marco de referencia o curricular para dichas nociones dentro del sistema didáctico, esto es, una perspectiva global de qué técnicas se quiere enseñar en un proyecto global de enseñanza.

Este hecho constituye una herramienta macro y micro didáctica. La determinación de las técnicas que se desea enseñar permiten establecer orientaciones sobre la ecología de los saberes y la elaboración de una *transposición didáctica*[14] pertinente, que se concretará en la construcción de un currículo o en la confección de un libro de texto dentro de una institución concreta (*nivel macrodidáctico*). Por otro lado, es posible establecer criterios de descripción y comprensión de las concepciones de los estudiantes en la construcción y comunicación de conocimientos matemáticos específicos, así como potenciales formas de gestión de un aprendizaje de tipo constructivista, donde el profesor necesita, “en tiempo real”, anticipar las acciones de los estudiantes y desarrollar mecanismos de recogida de información y de interpretación, así como estrategias de actuación y toma de decisiones, adaptándose a situaciones concretas (*nivel microdidáctico*).

5.2 PROCESOS ANALÍTICOS

La enseñanza clásica del análisis se ha centrado en la manipulación simbólica de los objetos matemáticos, en secuencias de tareas “matemáticamente completas”. Sin embargo, ¿qué instrumentos de control tiene el estudiante para aceptar o rechazar un resultado? ¿Existen métodos alternativos de resolución que permitan validar o contrastar una hipótesis? ¿Qué relación tienen éstos con el estudio analítico (formal) de una proposición

---

quant à elles ont une histoire courte. Ce n’est que depuis deux décennies que non seulement s’est amorcée l’éclosion de la didactique des mathématiques par la mise en place de groupes de recherche au sein de universités mais aussi que la communauté internationale des chercheurs dans ce domaine a commencé à créer son identité propre” (Kilpatrick, 1994, p.85).

[14] Brevemente, la transpoción didáctica puede ser descrita como el proceso por el cual se aislan ciertas técnicas (que permiten abordar una clase de probemas) y las justificaciones de éstas, se seleccionan cuáles tendrán que ser enseñadas y se realiza el conjunto de transposiciones adaptativas necesarias para que se conviertan en objeto de enseñanza; de forma esquemática la transposición didáctica significa llevar a cabo el proceso:

Objeto de saber $\rightarrow$ Objeto a enseñar $\rightarrow$ Objeto de enseñanza.

matemática? Respondiendo a preguntas de este tipo hemos resaltado tres tipos de problemas:

1. *Cognitivo*. Para los estudiantes, la justificación por medio de un razonamiento analítico no es portadora de un alto *nivel de confianza*; con otras palabras, los estudiantes no se responsabilizan de los resultados obtenidos exclusivamente por métodos analíticos.
2. *Instruccional*. Puesto que no se enseñan métodos de validación pertinentes, el profesor toma a su cargo la evaluación de la tarea realizada por los estudiantes, limitando el compromiso de transferencia de responsabilidad a los estudiantes a una mera caricatura y con un gran riesgo de *deslizamiento metacognitivo*[15].
3. *Didáctico*. La algoritmización del procedimiento (aplicación sistemática de técnicas analíticas "cerradas") es manifestación de un medio pobre[16], donde es demasiado costoso el juego de la devolución y, por lo tanto, se conduce el proceso de enseñanza hacia una irreversible situación de irresponsabilidad matemática (por parte de los estudiantes).

Estos hechos, han conducido a diferentes autores (Alson (1996, 2000), Chauvat (1998), Lacasta (1995), etc.) a plantear la necesidad de un desplazamiento del foco de interés en la enseñanza de las nociones fundamentales del cálculo, centrando el aprendizaje en la interpretación gráfica de nociones, procesos y significados de objetos analíticos (de lo literal-formal a lo gráfico-intuitivo).

Por nuestra parte, hemos resaltado la necesidad de restituir el papel de lo "numérico" en la introducción del cálculo, como eje central de las dicotomías: proceso finito-proceso de paso al límite, contar-límite y, en otro sentido, aproximado-exacto. Es necesario tener en cuenta, que, por ejemplo, es posible en muchos casos, con el uso de una calculadora científica, obtener una aproximación "suficientemente buena" del valor de un límite funcional, sin necesidad de utilizar procedimientos analíticos complejos (regla de L'Hôpital, polinomios de Taylor, etc.). ¿Cómo motivar matemáticamente la introducción de estos procedimientos y cómo establecer medios de control sobre los mismos? Una respuesta es la manipulación gráfica de objetos analíticos; otra, el análisis numérico de comportamientos, que en muchas ocasiones suponen la edición de programas de cálculo numérico.

La edición de programas es una labor fundamental para la comprensión de ciertos problemas donde hay procesos que se repiten o donde los cálculos pueden ser adecuadamente mecanizados. Los programas cargan el estudio sobre el sentido, no sobre los cálculos o los procesos algorítmicos involucrados, que deben ser muy bien comprendidos para la edición de dichos programas; de hecho, la edición de programas

[15] Deslizamiento metacognitivo : el profesor toma sus explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de enseñanza, desplazando al verdadero conocimiento matemático; de esta manera, métodos analógicos y de comparación, por ejemplo, son introducidos como gestos "a enseñar", no "a descubrir y a construir", lo que ocasiona en muchos estudiantes un trabajo mimético, carente de sentido y de control epistemológico.

[16] En el sentido del esquema M-ASIF, la limitación del medio queda de manifiesto por una distribución homogénea de operaciones de producción algorítmicas.

exige del programador (estudiante) una aguda comprensión de los pasos fundamentales que deben ser realizados en una cadena de operaciones repetidas (explicitud de los aspectos fundamentales de un algoritmo).

Los métodos numéricos permiten obtener en un número de pasos finito (pero arbitrario) un resultado de un problema. No hay paso al límite, como en los métodos analíticos. Si en estos últimos la noción fundamental es la de límite, los métodos numéricos centran su proceso en la operación básica de contar. La dicotomía entre los procesos finitos e infinitos determina en gran medida la comprensión del paso a los procesos analíticos: el límite es comprendido como un modelo de un proceso finito con un número arbitrario de pasos[17].

5.3 ESQUEMA M-ASIF

La puesta en escena del esquema M-ASIF representa una validación de la hipótesis apuntada por P. Alson (2000) sobre la capacidad y pertinencia de las operaciones de producción para la descripción y el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje, en el caso particular de las demostraciones matemáticas.

El esquema M-ASIF constituye además un instrumento para el análisis del *nivel molecular*[18] de la actividad de producción de objetos matemáticos; este hecho constituye una respuesta a la necesidad, ya apuntada por J. Gascón (1999), de que el Programa Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas tome en consideración dicho nivel en su proyecto de comprensión y descripción de la actividad matemática (entendida como sistema).

Por otro lado, el esquema M-ASIF permite establecer criterios de actuación en aula con relación a la gestión de cuestiones limítrofes. Hemos llamado "limítrofe" a una cuestión que puede ser abordada si se avanza en la situación un "paso más", sin que sea necesario una reestructuración radical del medio didáctico implementado para el desarrollo de dicha situación. Esto no significa que, necesariamente, no haya una reestructuración masiva del conocimiento para alcanzar dicho saber (que es consustancial a la cuestión "limítrofe" abordada). En este contexto, entendemos por "reestructuración masiva del conocimiento" a la constatación de una colección de operaciones de producción, no todas algorítmicas, necesarias para ejecutar dicho "paso".

De esta forma, al describir una situación limítrofe como un conjunto de operaciones de producción, se toma en previsión las acciones potenciales del sujeto y se establece para

---

[17] Lo dicho tiene una interpretación más general respecto a la diferencia radical entre los hechos matemático-formales y los didácticos. Formalmente, la definición matemática crea el significado matemático. La realidad didáctica, sin embargo, limita el significado de la definición matemática, restituyendo un equilibrio entre experimentación (numérica y gráfica) y formalismo (síntesis de un trabajo experimental previo). De esta forma, desde el punto de vista didáctico, la situación crea el significado matemático.

[18] Implícitamente se establece una paralelismo entre un ser vivo y la "realidad" didáctica, que permite estructurar ésta en tres niveles: *atómico* (modelos exclusivamente matemáticos, cognitivos o instruccionales), *sistémico* (modelos globales de la actividad matemática como interacción de aspectos matemáticos, psicológicos y pedagógicos comprensibles únicamente dentro del sistema) y *molecular* (modelos de comportamientos cognitivo-matemático, social-matemático o instruccional-matemático).

éstas un marco de referencia, que delimita "lo admisible" y marca pautas de decisión en la gestión de la clase por parte del profesor.

Una de las cuestiones fundamentales que debería afrontar la didáctica es la determinación de cuestiones limítrofes desde el punto de vista de una situación y que, sin embargo, exigen reestructuraciones masivas del conocimiento. En cierto sentido, el análisis de los *obstáculos epistemológicos*[19] es una respuesta a esta problemática didáctica, que pone el énfasis en el polo matemático. La cuestión limítrofe que hemos introducido se sitúa en una perspectiva más instruccional, incidiendo en la "ilusión de la transparencia" del paso de una noción a otra como continuación "natural" de un proceso didáctico.

5.4 INTUICIÓN MATEMÁTICA

La Teoría de Situaciones (Brousseau, 1998) ha justificado la búsqueda de situaciones fundamentales bajo la premisa de que el aprendizaje es producto de la adaptación de un sujeto a un medio antagonista, que permite retroacciones (*feed-back*) inteligibles, cambios de estrategias mejor adaptadas a las respuestas que el sujeto recibe del medio.

Por nuestra parte, hemos razonado que la intuición representa una interpretación de un modelo local. Este hecho, permite comprender el carácter "vinculante" de las situaciones fundamentales, tanto para el aprendizaje futuro de los alumnos como con relación a los modelos regionales dominantes asociados a dicha situación: las situaciones fundamentales provocan intuiciones certeras de los objetos matemáticos a que se refieren. De esta forma, hemos dado una justificación cognitiva de la pertinencia de la búsqueda de situaciones fundamentales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

6. CUESTIONES ABIERTAS

Como hemos señalado, el trabajo teórico que hemos abordado nos ha conducido, en muchas ocasiones, a la formulación, de manera más o menos explícita, de preguntas susceptibles de convertirse en objeto de futuras investigaciones. En particular, con relación al foco de interés en la instrucción y el aprendizaje: ¿cuál debe ser la actividad central en la enseñanza escolar de las matemáticas, la resolución de problemas (*problem solving*) o la modelización matemática?

Desde los estudios pioneros de Polya (1956), pasando por los Estándares curriculares (NCTM, 1989, 2001), hasta las investigaciones en el seno del programa cognitivo (Schoenfeld, 1992, 2000), muchos autores han defendido la tesis según la cual la resolución de problemas debe representar el núcleo de atención de los procesos instruccionales y cognitivos. Y. Chevallard et al. (1997, p.48) se preguntan "*¿qué significa 'hacer*

[19] Obstáculo: conocimiento (generalmente, regla de acción) que tiene un campo de validez restringido y que resiste, esto es, la sola mostración no es suficiente para conseguir que el conocimiento correcto sustituya al falso (en aquellos contextos en los que este último ya no es válido). Diremos que el obstáculo es epistemológico cuando ha jugado un papel importante en el desarrollo histórico del conocimiento y, por lo tanto, su discriminación y su superación se han transmitido junto a dicho conocimiento.

matemáticas'?", para responder a esta pregunta, analizan diferentes estrategias de reparto de una bolsa de caramelos identificando el proceso de matematización como una tendencia hacia lo simbólico-abstracto que suele operar en toda modelización; de hecho, dichos autores concluyen que "*un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente*" (p.51). Por otro lado, Y. Chevallard (1998) ha mostrado en qué sentido la modelización matemática juega un papel central en el paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza de las matemáticas en el colegio.

No es circunstancial que desde el Programa Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas se resalte el proceso de lo contingente-concreto a lo simbólico-abstracto como el proceso clave en el pensamiento científico contemporáneo; de hecho, el pensamiento científico se ve constantemente impelido a la construcción de abstracciones que "ordenan" la realidad sensible, que implican la determinación de modelos (predictivos, justificativos, interpretativos, constructivos, discriminatorios) que permitan "conceptuar" la realidad.

En concreto, creemos necesarios estudios que refuten o validen la hipótesis según la cual los pasos centrales en la evolución del proceso de estudio de objetos matemáticos está correlacionado con la modelización matemática, de tal forma que sea posible establecer criterios de gestión de obstáculos epistemológicos (enfrentar al estudiante con o evitar su aparición), anticipar dificultades cognitivas de los estudiantes, establecer intervenciones pertinentes del profesor, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alson, P. (2000). *Elementos para una teoría de la significación de la didáctica de las matemáticas*, Tesis. Bordeaux, FRA: Université Bordeaux I.

Alson, P. (1996). *Métodos de graficación*, 3ª edición. Caracas: Erro.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l´analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques n° 18, vol. 2*, 231–262. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, 33–59.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu. Connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques n° 19, vol 2*, 135–194. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Bloch, I. (1995). *Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse*. Bordeaux, FRA: Univesité Bordeaux I, LADIST.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques n° 19, vol. 1,* 77–124. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage, Recherche en Didactique des Mathématiques.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, ESP: Horsori, ICE-Universitat de Barcelona.

Chevallard, Y. (1998). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathematiques en collège: deuxième partie (perspectives curriculaires: la notion de modelisation, *Petit x n° 19*, 43–72. Grenoble, FRA: IREM de Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Le caractère experimental de l'activité mathématique. *Petit x n° 30*, 5–15. Grenoble, FRA: IREM de Grenoble.

Chevalier, M.C. et Briand, J. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris: HATIER Pédagogie.

Chauvat, G. (1998). Courbes et fonctions au Collège. *Petit x, n° 51*, 23–44. Grenoble, FRA: IREM de Grenoble.

Gascón, J. (1999 Agosto). *Didactique fondamentale* versus *Advanced Mathematical Thinking*: ¿dos programas de investigación inconmensurables?. *Actes X^{ème} Université d'été de Didactique des Mathématiques, Tomo II*. Houlage, FRA: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiquesm, 152–170.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée ». *Petit x n° 37*, 43–63. Grenoble, FRA: IREM de Grenoble.

García, A.; Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques n°14, vol. 3*, 325–355. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes, POR: SIEM.

Godino (2001). Comparación de herramientas teóricas en didáctica de las matemáticas. Granada: Universidad de Granada. [http://www.ugr.es/~jgodino/indice_tfs.htm].

Gras, R. (1996). *L'implication statistique*. Grenoble, FRA : La pensée Sauvage.

Groupe AHA (1999). *Vers l'infini pas à pas: approche heuristique de l'analyse*. Bruxelles: De Boeck-Wesmael.

Guzmán, M. de (1996) *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático, elementos básicos del análisis*. Madrid: Pirámide.

Kilpatrick, J. (1994). Vingt ans de Didactique Française depuis les USA. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (Ed.) *Vingt ans de Didactique de Mathematiques en France. (Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud)*. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage, Recherche en Didactique des Mathématiques, 84–96.

Lacasta Zabalza, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles*, tesis. Bordeaux, FRA: Université Bordeaux I.

Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques n° 16, vol 2*, 221–280. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux*. Grenoble, FRA: La pensée sauvage, Recherche en Didactique des Mathématiques.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla, ESP: Sociedad andaluza de educación matemática Thales.

Polya (1956). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México, DF: Trillas.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques à propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques n° 21, vol. 1.2*, 7–56. Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Schoenfeld, A.H. (2000 June-July) Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society (AMS) n°* 47, vol. 6, 641–649. Providence, RI: AMS.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: NCTM.

Tall, D. (ed.) (1991). *Avanced Mathematical Thincking*. Dordrecht, HOL: Kluwer.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society (AMS) n° 30, vol. 2*, 161–211. New York: American Mathematical Society.

ANEXO

ESQUEMA M-ASIF: DESCRIPCIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN DE $\lim(n)^{1/n} = 1$

Operación	Agente	Descripción (del observador)
A	E	Dado el término general de una sucesión, construir punto a punto la representación gráfica de la sucesión en el plano cartesiano
M	E $\leftrightarrow$ P	¿Qué es una demostración?
F	E	La idea de "regularidad" se formaliza con la idea de "monótona estrictamente decreciente"
A	E	Obtención de valores $a_n = n^{1/n}$ con la calculadora
I	E	Implícitamente, el estudiante acepta que la calculadora opera con aritmética infinita (valores exactos); entonces concluye: si $a_{10^{99}} = 1 \Rightarrow a_{10^{100}} < 1$ (por la monotonía de la sucesión ($n^{1/n}$))
M	E $\leftrightarrow$ P	Constatación de un "conflicto": no hay concordancia entre lo intuido (monotonía de la sucesión ($n^{1/n}$)) y la conclusión extraida de la manipulación numérica con la calculadora
M	P	Posibles salidas de un "conflicto": destrucción de local del problema; o bien, reestructuración "radical" del estudio que se está realizando
S	E	Se construye el enunciado "*n* $\in$ **N**, $n^{1/n} > 1$", que evoca el significado "acotada inferiormente", con la intención de ser demostrado
A	E	Demostración de la proposición: *n* $\in$ **N**, $n^{1/n} > 1$
I	E	Con base en los resultados de la calculadora, se contradice la demostración realizada
I	P	Interpretación funcional de $n^{1/n}$: $f_n(x) = n^{1/n}$
A	E	Representación gráfica de funciones $f_n(x) = \sqrt[n]{n}$
I	E	Monotonía de las funciones $f_n(x) = \sqrt[n]{n}$
I $\to$ A	P $\to$ E	Se espera que el estudiante interprete la monotonía de una función en términos de la primera derivada y, entonces, derive formalmente $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$
I	E	En la tarea en casa, el estudiante no utiliza la derivada como tecnología para estudiar la monotonía de las funciones $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$. El trabajo que realiza consiste en la interpretación funcional de $n^{1/n}$: $g_n(x) = n^{1/x}$, $g(x) = x^{1/x}$
M	E $\leftrightarrow$ P	Análisis de la pertinencia del trabajo realizado en la tarea de casa
I	E $\leftrightarrow$ P	Explicitación en términos análiticos de una afirmación verbal: ¿existe *k* > 0 tal que $\sqrt[n]{n}$ >1+*k*, para todo *n* $\in$ **N**.
A	E $\leftrightarrow$ P	Demostración de la proposición: "no existe *k* > 0 tal que $\sqrt[n]{n}$ > 1 + *k*, para todo *n* $\in$ **N**"
I	E	Interpretación de la condición 1< $\sqrt[n]{n}$ < 1 + *k* en términos de la definición formal de límite secuencial
I $\to$ A	P $\to$ E	Se espera que el estudiante interprete la monotonía de una función en términos de la primera derivada y, entonces, derive formalmente $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$
A	E	En la tarea en casa, demostración de la monotonía de $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ utilizando la definición formal de derivada
M	E	Análisis de la pertinencia del trabajo realizado en la tarea de casa
M	E $\leftrightarrow$ P	¿Qué es una demostración?
A	E	Derivación formal de $f_n(x) = \sqrt[n]{n}$: monótona estrictamente creciente