ESTUDIO DE PRAXEOLOGÍAS RELATIVAS A LA MEDIDA DE MAGNITUDES

(Subproyecto del equipo de la U.C.M.)

Luisa Ruiz Higueras y Francisco Javier García García
(Universidad de Jaén)

Presentado en el XIII SI-IDM
El Escorial, 9-11 de abril de 1999

Introducción

Este subproyecto de investigación forma parte de un proyecto general cuyo objetivo es abordar la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la medida de magnitudes y de las relaciones entre ellas desde un doble punto de vista: el enfoque psicológico (Vergnaud, 1989) y el enfoque antropológico (Chevallard, 1992, 1997, 1998); tratando de conectar tal problemática con elementos del enfoque semiótico y epistemológico conforme lo permitan los resultados del proyecto principal[1].

Se establecerán las posibles conexiones entre los esquemas de construcción de la medida, en el dominio de las magnitudes de la educación primaria y secundaria, con las praxeologías correspondientes más comunes y, al mismo tiempo, indagaremos las relaciones de tales esquemas con los registros semióticos utilizados para llegar a esos esquemas de referencia. Se estudiarán las relaciones existentes entre la aparición de esquemas y los procesos semióticos implícitos en la conceptualización matemática.

Nuestra investigación se inscribe en el marco de la *didáctica fundamenta*l, y más concretamente en el de la *teoría antropológica* (Chevallard, 1992, 1997, 1998). El estudio de la actividad matemática realizada en la institución escolar nos permitirá detectar, describir y analizar los disfuncionamientos del sistema didáctico y los distintos fenómenos didácticos vinculados. Trabajos como los de Chevallard (1998), Artaud (1998), Bosch (1994), Espinoza (1998), entre otros, avalan la pertinencia de este modelo teórico para el análisis de las *praxeologías matemáticas.*

Una gran parte de los problemas de la aritmética elemental se desarrolla en torno a la medida de magnitudes y a las relaciones que se establecen entre dichas medidas. Entre todas las relaciones posibles, la relación de proporcionalidad es la primera experiencia sistemáticamente organizada de la "funcionalidad" que está presente en el currículum escolar. Nos interesa también abordar, junto a los estudios anteriores, el estudio de los sistemas proporcionales y de su modelización en la enseñanza. Como aproximación a este trabajo utilizaremos los llevados a cabo por Ruiz Higueras (1994, 1995, 1996, 1998) en los que se utilizaba la teoría de la *transposición didáctica*

[1] Se trata del Proyecto de Investigación: *Integración de enfoques de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Implicaciones para el diseño curricular y la formación de profesores de matemáticas,* en el que están implicadas varias universidades españolas (U. Complutense de Madrid, U. Autónoma de Barcelona, U. Ramón Llull, U. de Granada, U. de Jaén, U. de Castellón, U. Pública de Navarra, U. de Zaragoza)

(Chevallard, 1991). El enfoque antropológico aportará nuevas herramientas teóricas y será muy pertinente para analizar las organizaciones matemáticas ligadas al dominio de la medida y la proporcionalidad de magnitudes en la escuela primaria y secundaria, las que son efectivamente construidas o reconstruidas en el aula y las organizaciones didácticas del profesor y los alumnos que permiten realizar su estudio.

Presentación del proyecto

En la exposición del proyecto se optó por una presentación a través de organigramas y esquemas que permitiesen una visión global y significativa de todos sus apartados y que facilitase la discusión entre los participantes en el Seminario. Se organizó como sigue:

1. Ubicación del subproyecto dentro del proyecto general (Esquema 1).

2. Marco teórico sobre el que se fundamenta este subproyecto (Esquemas 2, 3 y 4).

3. Coordinación de los diferentes enfoques que están contemplados en el proyecto principal de investigación. (Esquema 5)

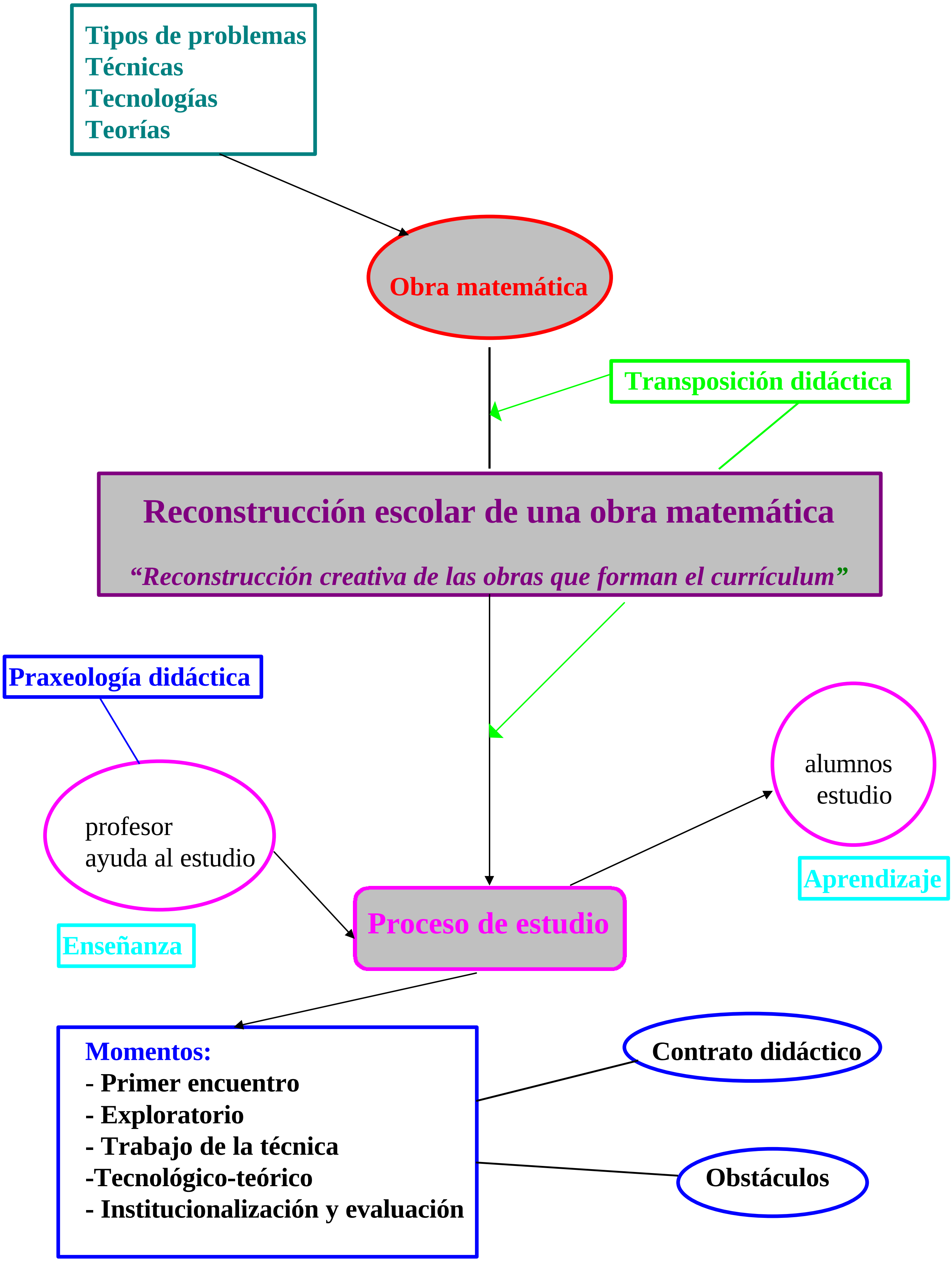
4. Objetivos que se pretenden conseguir .

5. Hipótesis de la investigación (Esquema 6)

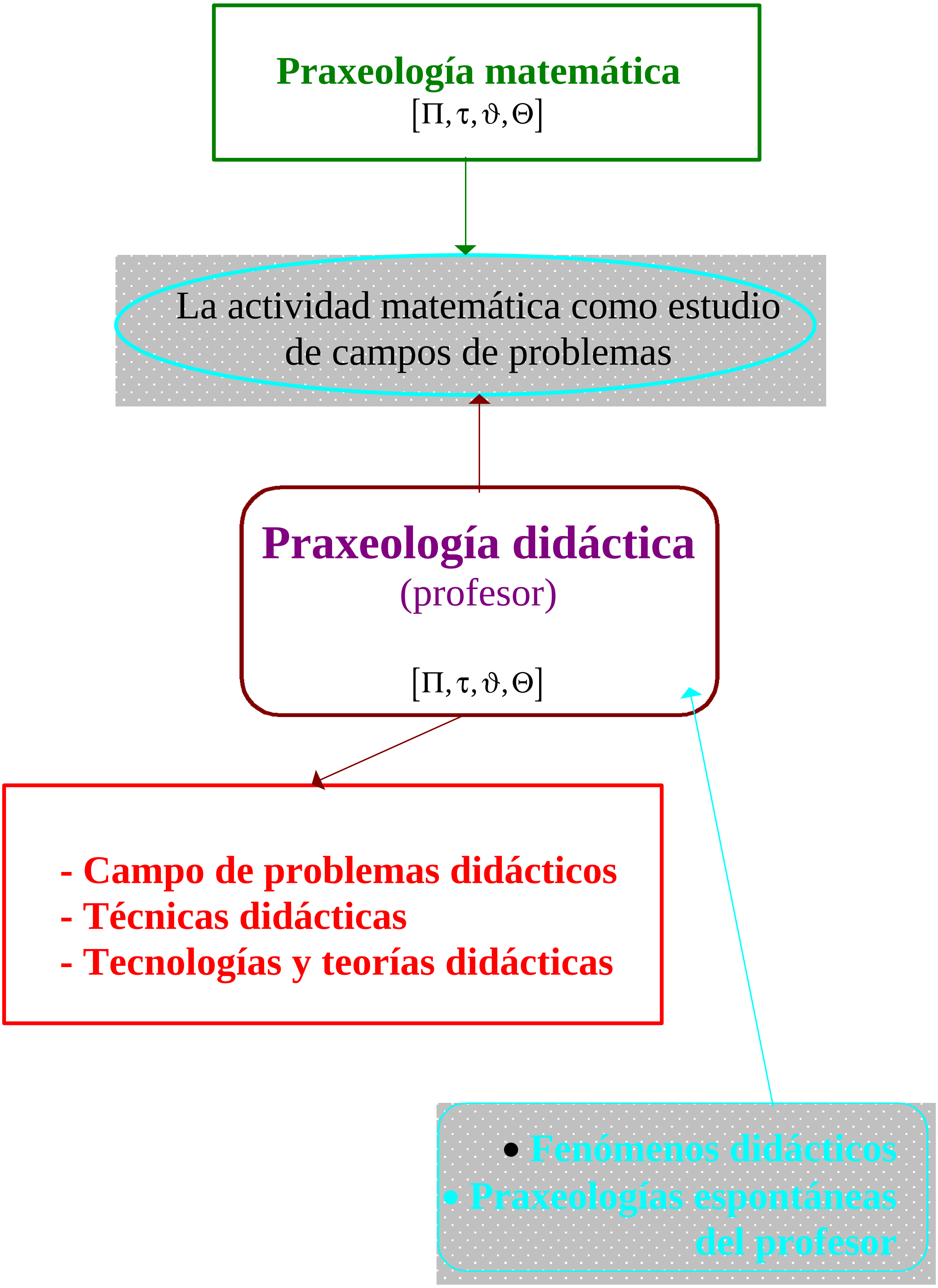
6. Metodología de investigación (Esquemas 7 y 8)

Anexo: Estudio puntual de una praxeología en torno a la medida en los primeros cursos de educación primaria (medidas complejas e incomplejas

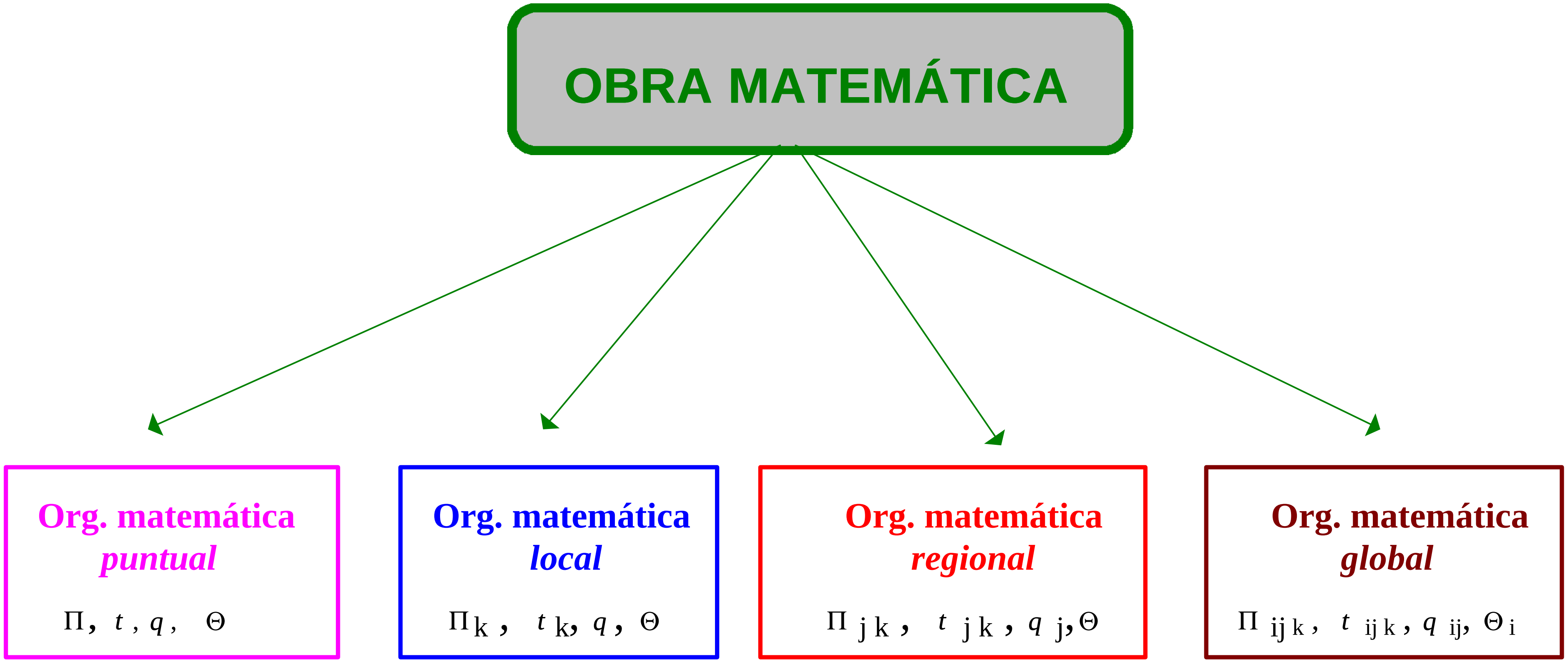
TEORÍA ANTROPOLÓGICA


Tipos de problemas
Técnicas
Tecnologías
Teorías
Obra matemática
Transposición didáctica
Reconstrucción escolar de una obra matemática
"Reconstrucción creativa de las obras que forman el currículum"
Praxeología didáctica
profesor
ayuda al estudio
Enseñanza
alumnos
estudio
Aprendizaje
Proceso de estudio
Momentos:
- Primer encuentro
- Exploratorio
- Trabajo de la técnica
-Tecnológico-teórico
- Institucionalización y evaluación
Contrato didáctico
Obstáculos

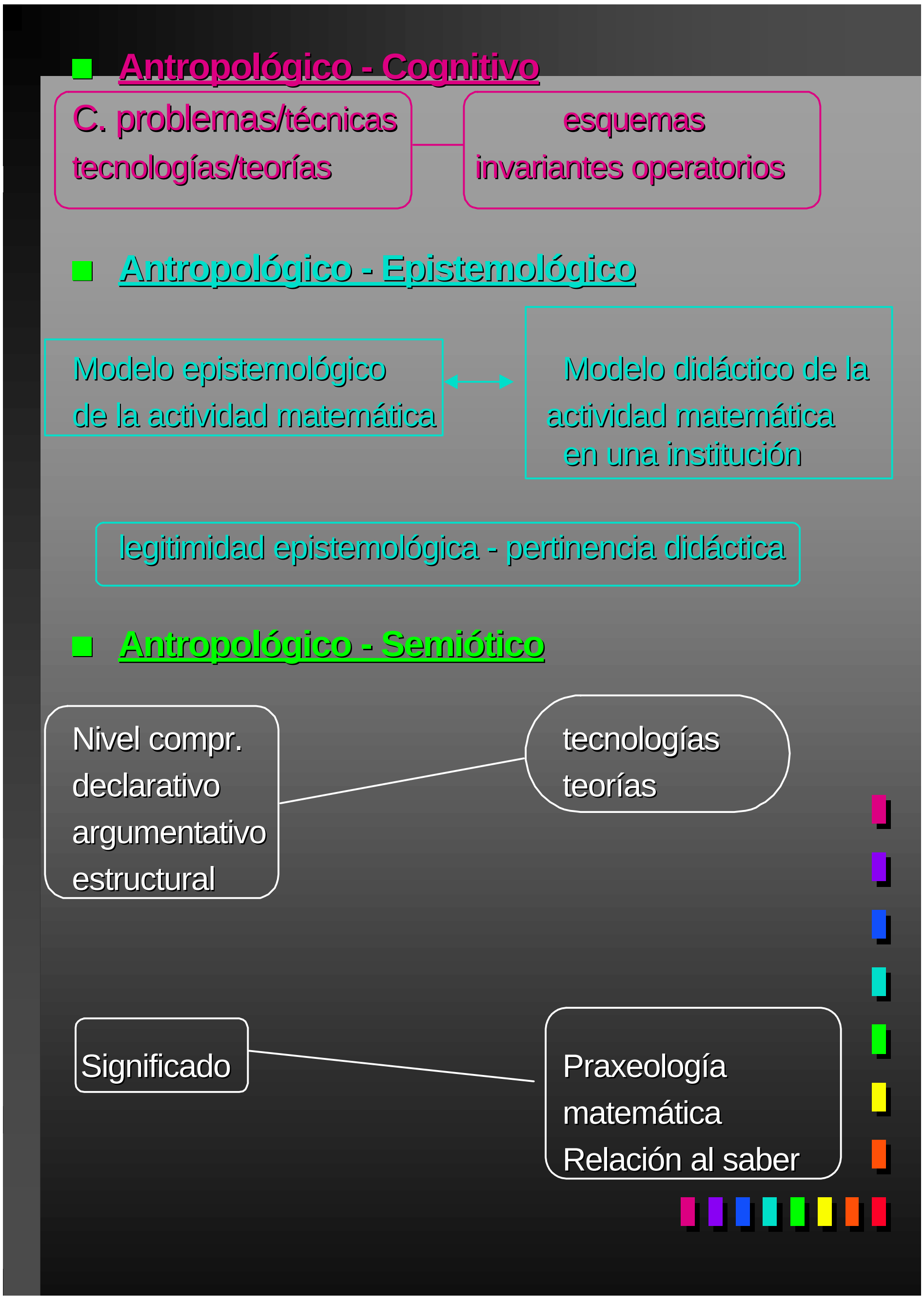
Esquema 2


Praxeología matemática
$[\Pi, \tau, \vartheta, \Theta]$
La actividad matemática como estudio de campos de problemas
Praxeología didáctica
(profesor)
$[\Pi, \tau, \vartheta, \Theta]$
- Campo de problemas didácticos
- Técnicas didácticas
- Tecnologías y teorías didácticas
• Fenómenos didácticos
• Praxeologías espontáneas del profesor

Esquema 3


OBRA MATEMÁTICA
Org. matemática *puntual*
Π, t, q, Θ
Org. matemática *local*
Π_k, t_k, q, Θ
Org. matemática *regional*
$\Pi_{jk}, t_{jk}, q_j, \Theta$
Org. matemática *global*
$\Pi_{ijk}, t_{ijk}, q_{ij}, \Theta_i$

Esquema 4


Antropológico - Cognitivo
C. problemas/técnicas
tecnologías/teorías
esquemas
invariantes operatorios
Antropológico - Epistemológico
Modelo epistemológico
de la actividad matemática
Modelo didáctico de la
actividad matemática
en una institución
legitimidad epistemológica - pertinencia didáctica
Antropológico - Semiótico
Nivel compr.
declarativo
argumentativo
estructural
tecnologías
teorías
Significado
Praxeología
matemática
Relación al saber

Esquema 5

OBJETIVOS:

Objetivo 1:
Examinar las distintas organizaciones matemáticas que se han construido en torno al objeto "medida de magnitudes" en la institución sabia.

Este examen creemos que es necesario para entender algunas características de las organizaciones particulares que se deben estudiar en la escuela. Se trata, en realidad, de una primera aproximación a la cuestión de las "razones de ser" del objeto "medida de magnitudes", tanto dentro de la escuela como en la institución sabia que le dio origen.

Pondremos en escena la problemática ecológica a la cual este objeto está sujeto. Esto no permitiría identificar el tipo de restricciones que la organización sabia impone para su correspondiente reconstrucción escolar y el tipo de actividades que esta organización permitiría realizar para su estudio.

Objetivo 2:
Analizar las "reconstrucciones escolares" propuestas en torno a este objeto matemático para ser estudiadas en el medio escolar (primaria, secundaria) y que aparecen indicadas en los programas y cuestionarios correspondientes.

Objetivo 3:
Analizar las reconstrucciones escolares de esta organización matemática propuestas en distintos libros de texto. Esto supone el estudio de los tipos de problemas que se estudian, las técnicas que se utilizan para abordarlos, los discursos justificativos que se enuncian y la teoría en la cual se apoyan.
Consideramos que los manuales constituyen un fiel reflejo del saber que se tiene que enseñar, es decir, del tipo de organización matemática que se tiene que reconstruir en la escuela para ser enseñada. Claro está que en el aula aparecerán diferencias respecto a la reconstrucción que proponen los manuales, pero este primer examen de los textos nos dará una visón general del tipo de restricciones bajo las que actúa el profesor.

Se trata de la descripción estática del proceso de estudio que representa una organización local o universo local para dicho objeto en la institución escolar.

Objetivo 4:
Analizar y describir los procesos didácticos conducidos por distintos profesores para estudiar la "reconstrucción escolar" sobre la medida de magnitudes propuestas por los programas y manuales. A partir de esta descripción se podrán distinguir algunas técnicas didácticas utilizadas por los profesores para realizar la reconstrucción de dicha organización escolar en las aulas. De esta manera podremos identificar la manera en que cada profesor ha organizado los distintos momentos de estudio, y la manera en que los ha hecho vivir por los estudiantes. Esto permitirá establecer una correspondencia entre los diferentes momentos del proceso y las técnicas didácticas comúnmente utilizadas en cada momento.

Se trata de una descripción del proceso de estudio que responde a la pregunta de cómo se estudia (y, en consecuencia cómo se construye o reconstruye) esta organización matemática escolar.

Objetivo 5:
Dado que cada momento de estudio se corresponde con algunas de las componentes de la organización matemática que se estudia, mediante el análisis del proceso podremos poner en evidencia las incoherencias o restricciones existentes en las propias reconstrucciones escolares. En particular, podremos referirnos a la economía de los distintos procesos analizados (el coste que supone la adaptación)

Objetivo 6:
Analizar la topogénesis del estudio, esto es, las distintas funciones que han desempeñado profesor y alumnos a lo largo de todo el proceso de estudio. Dado que las técnicas didácticas son compartidas, puede ser interesante distinguir el "topos" del profesor y el "topos" de los alumnos en cada momento de estudio, así como la manera en que las intervenciones de los alumnos pueden llegar a modificar la marcha del proceso de estudio. La cuestión de la gestión del contrato didáctico tiene que ver con est "topología" del estudio. Relacionaremos la noción de tiempo didáctico con la concatenación de los distintos momentos del proceso de estudio.

Objetivo 7:
En cada uno de los análisis realizados, ir identificando y describiendo algunos fenómenos didácticos emergentes del proceso de estudio de esta organización matemática escolar. Postular algunas causas para dichos fenómenos y, además explicitar algunos elementos que podrían orientar propuestas didácticas programadas para salvar las dificultades detectadas en nuestros análisis.

Objetivo 8:
Confrontar los elementos teóricos proporcionados por la teoría antropológica con nociones similares en los restantes enfoques descritos en el proyecto coordinado, estudiando su compatibilidad y complementariedad.

Problema de investigación inicial:

- analizar la organización matemática escolar en torno a la medida de magnitudes, estudiando la distancia presumiblemente detectable entre la organización sabia y su correspondiente adaptación escolar,

- describir las dificultades y restricciones que supone para el profesor la reconstrucción escolar de dicha organización matemática,

- abordar la descripción del proceso de estudio global de una obra escolar, en sus diferentes dimensiones,

- explicitar las técnicas didácticas utilizadas por el profesor para conducir y gestionar el proceso de estudio de dicha organización,

- analizar las restricciones institucionales a las que están sujetos profesor y alumnos para llevar a cabo el proyecto común de estudiar dicha organización en términos de contrato didáctico, contrato pedagógico y contrato escolar.

Hipótesis:

H_1: En el sistema de enseñanza actual las técnicas de medida de las magnitudes no surgen desde un trabajo exploratorio llevado a cabo por los alumnos a partir de un campo de problemas, sino como un objeto en sí mismo. Aparecen como aplicación o ilustración del discurso tecnológico, sin ningún tipo de justificación o cuestionamiento sobre sus restricciones o alcances.

H_2: Existen vacíos tecnológicos en el sistema de enseñanza, ya que se hacen vivir las técnicas en un entorno justificativo minimalista, esto implica la existencia de "vacíos" tecnológicos y conlleva la fragilidad de la tecnología.

H_3: El contrato didáctico institucional establecido induce - impone - a potenciar el manejo de ciertas técnicas más que a realizar un proceso de estudio (de campos de problemas) para construirlas y justificarlas.

H_4: A los diagramas icónicos y a las representaciones gráficas, la institución de enseñanza le asigna un estatuto tecnológico relevante.

H_5: Las praxeologías didácticas que construye el profesor en su práctica profesional son espontáneas: Praxeologías "en acto", praxeologías "naturalizadas".

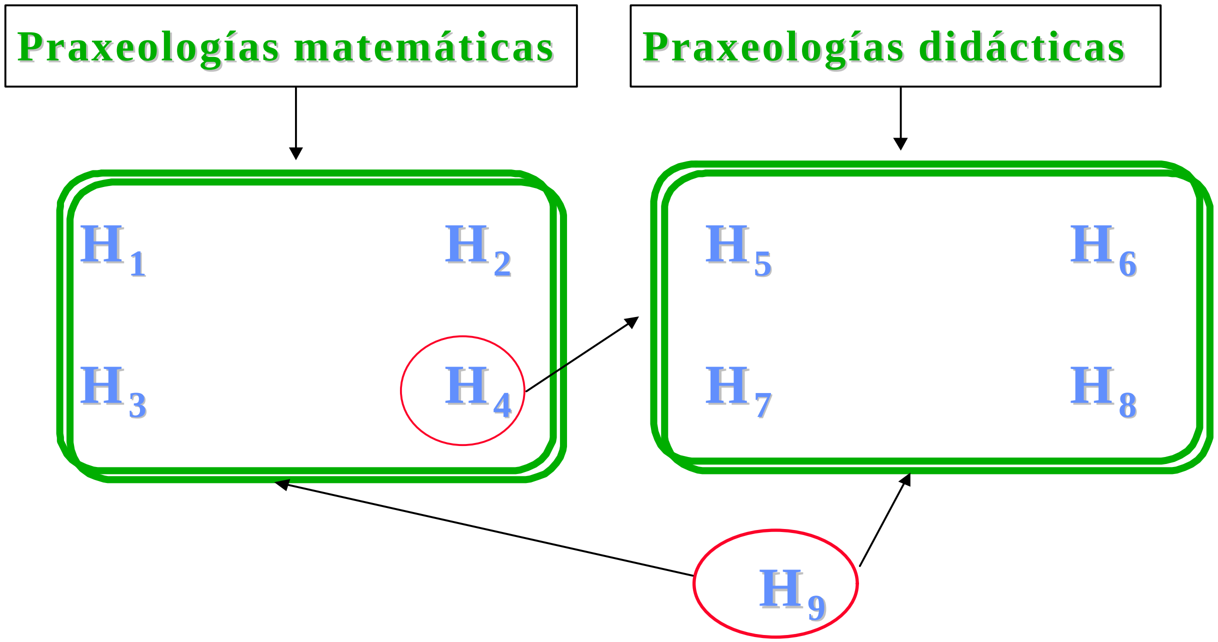
H_6: El análisis de la praxeología espontánea del profesor nos facilitará una descripción de sus componentes: tareas, técnicas, tecnologías y teorías, mostrando un marco descriptivo y justificador de la práctica docente.

H_7: El sistema de tareas didácticas disponibles que determina la función del profesor (como director del proceso de estudio de una obra matemática) en la actualidad está definido con poca precisión.

H_8: Es posible construir organizaciones didácticas alternativas que permitan describir, explicar y desarrollar la tecnología del profesor - como fundamento fiable que le permita desarrollar su práctica.

H_9: Los resultados de esta investigación permitirán obtener conocimientos que mejorarán la de formación en didáctica de las matemáticas de los profesores.

HIPÓTESIS



Esquema 6

METODOLOGÍA

Puesto que en esta investigación se intenta abordar el estudio de praxeologías matemáticas y didácticas, para cada una de ellas emplearemos una metodología específica.

Para analizar las "reconstrucciones escolares" que aparecen indicadas en los programas y cuestionarios oficiales llevaremos a cabo una exploración que abarque distintos planes de estudio.

También abordaremos las "reconstrucciones escolares" que aparecen en distintos libros de texto (manuales escolares). Analizaremos de los tipos de problemas que se estudian, las técnicas que se utilizan para solucionarlos, los discursos justificativos que se enuncian y la teoría en la cual se apoyan. Todo ello nos permitirá dar la descripción estática del proceso de estudio que representa una organización local o universo local para dicho objeto en la institución escolar.

Para analizar y describir los procesos didácticos conducidos por distintos profesores, es decir, para estudiar la "reconstrucción escolar dinámica" que trata de responder a la organización propuesta en los programas y manuales, llevaremos un seguimiento pormenorizado de varios profesores. Describiremos el proceso de estudio que responde a la pregunta de cómo se estudia (y, en consecuencia cómo se construye o reconstruye) esta organización matemática escolar.

Nos interesa estudiar la problemática del profesor como representante virtual de la gran clase de profesores que imparten matemáticas en primaria y secundaria.

Estudiaremos las técnicas didácticas que utiliza el profesor para realizar su práctica profesional en la tarea de organización y conducción del proceso de estudio, con objeto de detectar lo invariante y lo variable en dichas técnicas.

Utilizaremos como instrumento metodológico para la investigación las tablas siguientes:

INSTRUMENTOS METODOLÓGICOS

Tabla I

Episodio	Momento didáctico	Actor principal	Objetos matemáticos presentes	Actividades de estudio

Esquema 7

Tabla II

Clase	Tipo de problemas	Técnicas matemáticas	Elementos tecnológico teóricos	Momento dominante	Elementos de técnicas didácticas locales

Esquema 8

Plan de trabajo:

1º. Análisis de la evolución histórica de las praxeologías matemáticas en torno a la medida de magnitudes.

2º. Análisis de las reconstrucciones propuestas en los programas oficiales y documentos curriculares.

3º. Análisis de la dimensión estática del proceso de estudio "virtual": los libros de texto.

4º. Análisis de la dimensión dinámica del proceso de estudio: las grabaciones, dispositivos didácticos y observaciones de campo.

5º. Análisis de las técnicas didácticas utilizadas por los profesores observados para dirigir el proceso de estudio de la medida de magnitudes.

6º. Análisis del discurso tecnológico de los profesores acerca de su práctica profesional: las entrevistas.

7º. Síntesis y resultado final.

Referencias

Bosch, M. (1994) *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. Y Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathematique aux ostensifs. Objet d'étude et de problematique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19.1, 77-124.

Chevallard,Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble:La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportés par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12.1, 73-112.

Chevallard, Y., Boch, M. Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (1997) Familiére et problematique: la figure du profeseur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17.3

Espinoza, L. (1998) *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de una función.* Tesis doctoral no publicada. Universitat Autónoma de Barcelona.

Ruiz Higueras, L., Rodríguez Fernández, J.L. (1994) The role of graphical and algebraic representations in the recognition of functions by secondary school pupils. En Matos F. (Ed) *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (p. 153-161)

Ruiz Higueras, L., Rodríguez Fernández, J.L. (1995) La noción de función como objeto de enseñanza y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica, *Quadrante: Revista teorica e de investigaçao*, 4, 91-117.

Ruiz Higueras, L., Rodríguez Fernández, J. L. (1996) *The transformation of mathematical objets in the didactic system: The case of the notion of function.* En Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds) *Proceedings of the Twenty International Conference for the Psychology of Matematics Education*

Ruiz Higueras, L. (1998) *La noción de función análisis epistemológico y didáctico.* Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Vergnaud, G. (1989) La théorie des chapms conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10.2-3, 133-170.

ANEXO: **Estudio puntual de praxeologías en torno a la medida en los primeros cursos de educación primaria (medidas complejas e incomplejas).**

PROBLEMAS

Π_1

Colocar una medida concreta Au_j ($A \in \Re$ y u_j es la unidad de medida) en una tabla del tipo:

	u_1	u_2	....	u_M	

Donde $u_1, u_2, \ldots, u_M$ es un sistema de unidades de una misma magnitud ($u_i = 10u_{i+1}$, $i = 1, \ldots, M-1$).

Π_2

Expresar una medida del tipo $A \ u$ ($A \in \Re$ y u es la unidad de medida) en otra unidad de medida v, que sea un múltiplo o un divisor de u ($v = 10^r u$, $r \in \mathbb{Z}$)

Π_3

Dada una medida en forma compleja, esto es, $A_1 u_1 \quad A_2 u_2 \quad \ldots \quad A_M u_M$, donde $u_1, u_2, \ldots, u_M$ es un sistema de unidades de una misma magnitud ($u_i = 10u_{i+1}$, $i = 1, \ldots, M-1$, eventualmente algún $A_i = 0$), escribirla en forma incompleja, es decir, en la forma Au_j con $A \in \Re$ y $j \in \{1, \ldots, M\}$.

Π_4

Dada una medida en forma incompleja, escribirla en forma compleja.

TÉCNICAS

$\boxed{t_1}$

Multiplicar por potencias enteras de 10 (o de 10^2 o de 10^3).

$\boxed{t_1^i}$

Dada una medida en forma compleja, pasar cada medida concreta que aparece a una unidad común, usando t_1, y sumar.

$\boxed{t_2}$

Dada una medida concreta Au_i, considerando $u_1, \dots, u_i, \dots, u_M$ un sistema de unidades como antes y $A = a_m \dots a_1 a_0 ' a_{-1} \dots a_{-n}$ un número decimal:

1. Colocar el primer dígito a la izquierda de la coma (a_0) en la columna correspondiente a la unidad u_i dada.
2. Colocar los dígitos que aparecen a la izquierda de a_0 la columnas a la izquierda de u_i.
3. Colocar los dígitos que aparecen a la izquierda de a_0 en la columnas a la derecha de u_i.

$\cdots$	u_{i-m}	$\cdots$	u_{i-j}	$\cdots$	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	$\cdots$	u_{i+k}	$\cdots$	u_{i+n}	$\cdots$
	a_m	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_1	a_0	a_{-1}	$\cdots$	a_{-k}	$\cdots$	a_{-n}	

(obviamente, $i - m \geq 1$, $i + n \leq M$)

$\boxed{t_2^i}$

Dada una medida concreta:

1. Usar t_2 para situar el número en la tabla.
2. Seleccionar una nueva unidad de medida.
3. Situar la coma a la derecha de la cifra que aparece en la columna correspondiente a dicha unidad.
4. Escribir la nueva medida concreta con el número decimal resultante y la unidad elegida.

Así, si la medida concreta dada es $a_m \dots a_j a_{j-1} \dots a_0 ' a_{-1} \dots a_{-k} a_{-k-1} \dots a_{-n} \quad u_i$, obtenemos:

$\cdots$	u_{i-m}	$\cdots$	u_{i-j}	$\cdots$	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	$\cdots$	u_{i+k}	$\cdots$	u_{i+n}	$\cdots$

a_m	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_1	a_0	a_{-1}	$\cdots$	a_{-k}	$\cdots$	a_{-n}

$$a_m \ldots a_j a_{j-1} \ldots a_0 ' a_{-1} \ldots a_{-k} a_{-k-1} \ldots a_{-n} \quad u_i =$$

$$= a_m \ldots a_j ' a_{j-1} \ldots a_0 a_{-1} \ldots a_{-k} a_{-k-1} \ldots a_{-n} \quad u_{i-j} =$$

$$= a_m \ldots a_j a_{j-1} \ldots a_0 a_{-1} \ldots a_{-k} ' a_{-k-1} \ldots a_{-n} \quad u_{i+k}$$

$\boxed{t_2^{ii}}$

Dada una medida en forma incompleja:

1. Usar t_2 para situar el número en la tabla.
2. Escoger las unidades en las que se desea expresar la medida.
3. Para cada una de estas unidades, escribir una medida concreta compuesta por la unidad seleccionada precedida del número obtenido con las cifras de esta columna junto con las que aparecen a su izquierda (hasta la columna de la siguiente unidad escogida).

$\boxed{t_2^{iii}}$

Dada una medida en forma compleja:

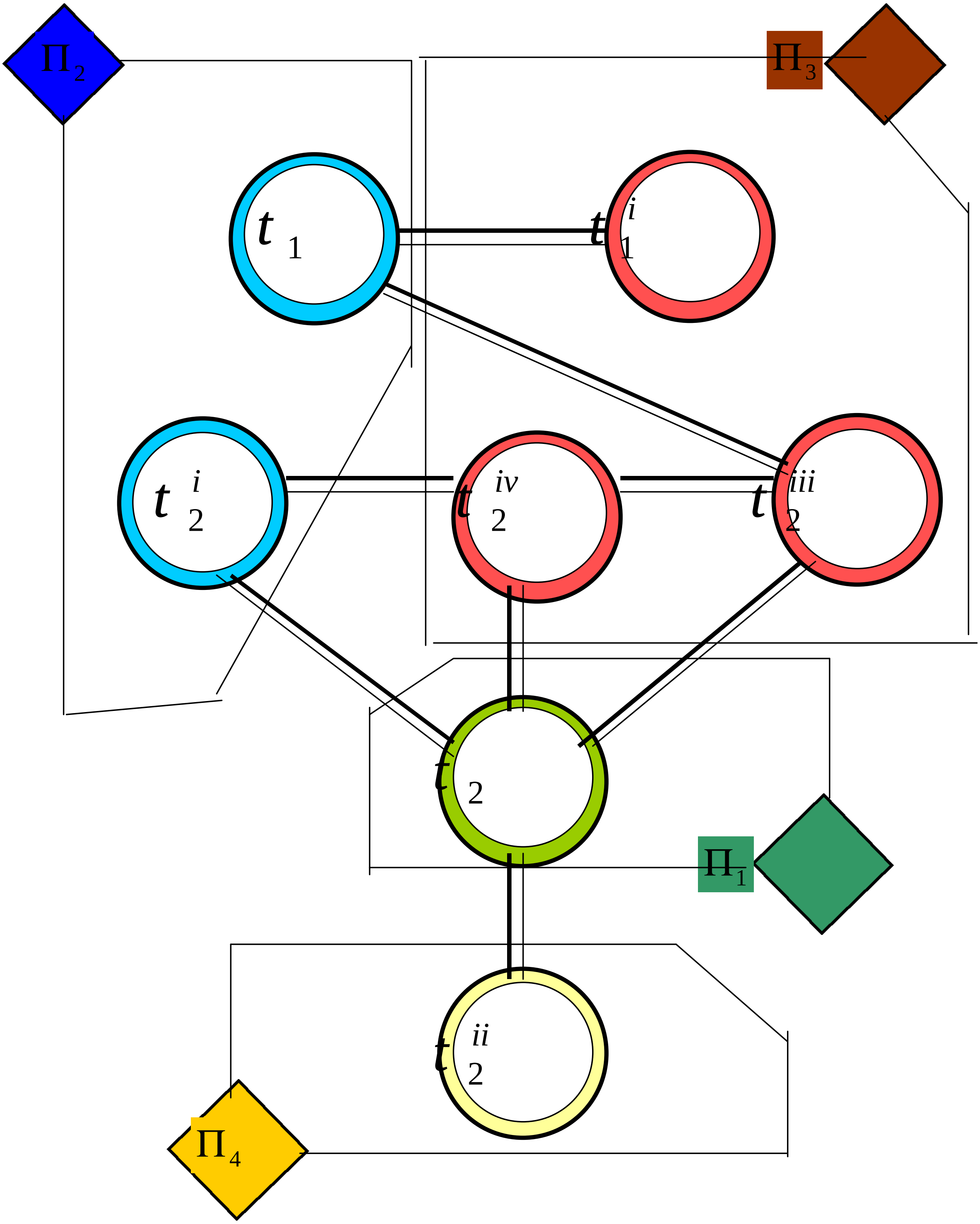
1. Seleccionar la unidad de medida que se desea utilizar para escribir la medida incompleja.
2. Usar t_1 para expresar cada medida concreta en esta nueva unidad.
3. Usar t_2 para situar el número decimal correspondiente a cada una de estas medidas concretas en una tabla (cada una en una fila)
4. Sumar las columnas de la tabla y situar la coma a la derecha de la cifra que figura en la columna correspondiente a la unidad seleccionada en 1 (la suma de estas columnas nunca excede de 10).

$\boxed{t_2^{iv}}$

Dada una medida en forma compleja:

1. Situar cada medida concreta en una tabla usando t_2, por filas (aunque ocasionalmente, y si no hay solapamiento, se pueden situar varios números en una misma fila)
2. Sumar las columnas de la tabla.
3. Escoger la unidad en la que se desea expresar la medida, y situar la coma a la derecha de la cifra que aparece en la columna correspondiente a dicha unidad.
4. Escribir la nueva medida concreta con el número decimal resultante y la unidad elegida.

[estos dos últimos pasos son como en t_2^{i}]



Π_2
Π_3
t_1
t_1^i
t_2^i
t_2^{iv}
t_2^{iii}
t_2
Π_1
t_2^{ii}
Π_4