

CONFRONTACIÓN DE HERRAMIENTAS TEÓRICAS PARA EL ANÁLISIS COGNITIVO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS ¹

Juan D. Godino

La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante”
(E. Morin, 1977, p. 18)

RESUMEN:

En este trabajo analizamos y comparamos las nociones que proponen cuatro modelos teóricos para estudiar los procesos de cognición matemática: las teorías de los “campos conceptuales”, “situaciones didácticas”, “antropológica” y “funciones semióticas”. El fin consiste en identificar las semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos con la pretensión de avanzar hacia un marco integrativo para el estudio de los fenómenos cognitivos en la didáctica de las matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El carácter relativamente reciente del área de conocimiento de didáctica de la matemática explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. En el trabajo de Sierpinska y Lerman (1997) sobre epistemología de las matemáticas y de la educación matemática podemos observar la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso en la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar en un verdadero programa de investigación.

Uno de los principales problemas “meta-didácticos” que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema ni incluso dentro de la aproximación que suele describirse como “epistemológica” o “didáctica fundamental”. Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su confrontación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, concepciones, conceptos, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc. En este trabajo pretendo iniciar el análisis de las nociones propuestas para el estudio de la dimensión cognitiva en didáctica de las matemáticas, tratando de identificar las concordancias, complementariedades, posibles redundancias y discordancias. Estas nociones debemos considerarlas como herramientas y como tales tienen su potencial utilidad para analizar un tipo de problemas y sus propias limitaciones. El delicado problema que debemos abordar consiste en elaborar nuevos constructos cognitivos que superen las limitaciones de los existentes, pero partiendo de las herramientas disponibles.

¹ XVI Reunión del SIIDM -Grupo DMDC, SEIEM. Huesca, 31 Marzo 2001.[Trabajo en elaboración, Versión, 20-3-01. Cualquier crítica o sugerencia será bien recibida por el autor]

El uso del término "cognitivo" no deja de ser conflictivo en sí mismo. Con frecuencia se usa para designar los conocimientos subjetivos, y los procesos mentales que ponen en juego los sujetos individuales enfrentados ante un problema. Desde un enfoque psicologista de la cognición matemática tales procesos mentales, que tienen lugar en el cerebro de las personas, son los únicos constituyentes del conocimiento que se consideran. Esta modelización no tiene en cuenta que los sujetos dialogan entre sí, consensúan y regulan los modos de expresión y actuación ante una cierta clase de problemas; que de esos sistemas de prácticas compartidas emergen objetos institucionales los cuales a su vez condicionan los modos de pensar y actuar de los miembros de tales instituciones. Por tanto, junto a los conocimientos subjetivos, emergentes de los modos de pensar y actuar de los sujetos considerados de manera individual, es necesario considerar los conocimientos institucionales, a los cuales se atribuye un cierto grado de objetividad.

En consecuencia se debería distinguir en la cognición matemática (y en la cognición en general) la dualidad "cognición individual" y "cognición institucional", entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas. Resaltamos el hecho que la "cognición individual" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras que la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos. En ambos casos se podrán identificar tipologías de cogniciones; pero una tipología de cogniciones individuales no es una cognición institucional. Una manera de distinguir dichas cogniciones con un solo término podría ser reservar el término 'cognitivo' para la cognición individual (como se hace con frecuencia por el predominio de la psicología cognitiva) y 'epistémico' (relativo al conocimiento objetivo) para la cognición institucional.

Como describe Varela (1988), el análisis científico del conocimiento en todas sus dimensiones es realizado por diversas ciencias y tecnologías de la cognición, entre las cuales menciona la epistemología, la psicología cognitiva, la lingüística, la inteligencia artificial y las neurociencias. En didáctica de las matemáticas tenemos que adoptar modelos cognitivos que no estén exclusivamente centrados en la psicología cognitiva, como se hace con frecuencia, ya que el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares se propone, como uno de sus fines esenciales, que el sujeto se apropie de los conocimientos matemáticos a los que se les atribuye una realidad cultural.

En las siguientes secciones tratamos de clarificar el uso de nociones cognitivas y epistémicas en las siguientes teorías: Campos Conceptuales (TCC, Vergnaud, 1990), Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1986), Antropología de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 1999) y Funciones Semióticas (TFS, Godino, 1999). También hacemos referencia a la noción de concepción presentada en Artigue (1990). Proponemos, además, algunas ideas para la articulación de estas nociones.

TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

La teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud es la que más nociones cognitivas ha introducido: esquema, invariante operatorio (concepto en acto y teorema en acto), concepto, campo conceptual, sentido de un conocimiento. Las nociones de conocimiento y competencia matemática son usadas, pero no definidas explícitamente, al menos en el artículo que estudiamos con detalle en este trabajo (Vergnaud, 1990).

La noción de esquema

La noción cognitiva básica para Vergnaud es la de “esquema” que describe como “la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas” (p. 136). Dice que “es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto constituyentes de los esquemas operatorios. A su vez considera que los esquemas son los elementos que sirven de base (sostienen) a las “competencias matemáticas”. La noción de competencia matemática se usa de una manera informal, no como un objeto teorizado.

Un esquema es una totalidad organizada que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Comporta los siguientes componentes:

- invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;
- anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;
- reglas de acción del tipo si ... entonces ... que permiten generar la serie de acciones del sujeto;
- inferencias (o razonamientos) que permiten “calcular” las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

La noción de esquema incorpora elementos actuativos (técnicas o modo de actuar) y elementos tecnológicos-teóricos implícitos (conocimientos en acto); pero además un esquema está asociado a una clase de situaciones, entendidas como tareas. Nos parece que este constructo puede desempeñar un papel similar a la noción de “sistema de prácticas personales ligadas a un tipo de problemas” (Godino y Batanero, 1994), y por tanto, también a lo que podría denominarse una “praxeología personal” de carácter puntual o local, noción que se desarrolla más adelante.

La noción de concepto

Los invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto) son entidades cognitivas, no epistémicas, al igual que la noción de esquema de la cual son constituyentes. “Un concepto-en-acto no es de hecho un concepto, ni un teorema-en-acto un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad” (p144)

Propone una noción de concepto a la que parece atribuir una naturaleza cognitiva al incorporar en la misma los invariantes operatorios “sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas”. Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone ninguna conceptualización.

Expresamente dice que, “una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones”. Pero además se deben tener en cuenta el uso de significantes explícitos (palabras, enunciados, símbolos y signos) en la conceptualización.

Una primera observación que podemos hacer sobre esta descripción del concepto es el no distinguir con claridad el plano personal del institucional, ni su carácter relativo al sujeto individual o a los contextos institucionales. Se propone como un elemento de referencia para el investigador con un carácter absoluto o universal. La incorporación del conjunto de situaciones y de significantes, junto con los “invariantes operatorios constituyentes de los esquemas”, lleva inevitablemente a confundir los planos cognitivos y epistémicos, lo que va a dificultar estudiar la dialéctica entre ambas facetas de la cognición matemática.

La noción de campo conceptual

La primera descripción que hace Vergnaud de un campo conceptual es la de "conjunto de situaciones". Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. "En efecto, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas." (p. 147). El campo conceptual de las estructuras aditiva es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En esta descripción del campo conceptual no se mencionan elementos de tipo subjetivo por lo que considero que al campo conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican de “matemáticos”, nociones que no son teorizadas; la noción de concepto matemático, no parece ser la misma que la noción cognitiva de concepto que acaba de definir como una tripleta heterogénea de conjuntos formados por situaciones, invariantes y significantes.

La noción de campo conceptual y los ejemplos que pone de ella tiene unas características muy generales (estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la electricidad, la mecánica, las magnitudes espaciales, la lógica de clases). Al igual que la noción de concepto no se relativiza a los contextos institucionales, dificultando de este modo el análisis de la dinámica y ecología de tales formaciones epistémicas.

La noción de sentido

"El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir las conductas y su organización. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición" (Vergnaud, 1990, p. 158).

En esta descripción Vergnaud está haciendo corresponder a un objeto matemático, por ejemplo, “la adición”, un conjunto de otros objetos (situaciones, esquemas, significantes), o sea, lo que anteriormente ha presentado como un concepto en sentido cognitivo. Este sistema, en lugar de conjunto, ya que lo importante es que está estructurado, lo considera como el sentido o significado de la adición para el sujeto, por lo que guarda una fuerte relación con uno de los tipos de significados que hacemos en la teoría de las funciones semióticas: el significado personal de un objeto matemático considerado como “sistema de prácticas personales eficaces para la resolución de un cierto tipo de problemas”.

En este punto podemos decir que la teoría de los campos conceptuales no introduce una versión institucional de la noción de sentido, por lo que se dificulta el

estudio de la dialéctica entre las dimensiones personales e institucionales de la cognición matemática. Además debemos analizar si nuestro “sistema de prácticas” es una asimilación o una acomodación de las nociones de esquema y concepto según los propone Vergnaud.

LA NOCIÓN DE CONCEPCIÓN

La noción de concepción es el constructo usado con más frecuencia para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas, como puede inferirse del estudio que hace Artigue (1990). No se distingue claramente en la bibliografía de otras nociones como representación (interna), modelo implícito, etc. Como describe Artigue (1990, p. 265), "trata de poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que se le asocian, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas". En la descripción que hace Artigue se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistémico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular). Así Artigue (1990) habla de, "un conjunto de concepciones es definido a priori con referencia a once definiciones distintas de círculo" (p. 268); y también se habla de "las concepciones del sujeto sobre el concepto de ... (círculo, tangente, límite, etc.)".

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

- a) La concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado en relación a un objeto. En este caso sería el análogo subjetivo del concepto, entendido como la triplete de Vergnaud (situaciones, invariantes y significantes).
- b) La concepción como un objeto local, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Si la noción de conocimiento es lo suficientemente amplia, de modo que abarque tanto los conocimientos de “saber hacer” (praxis), como “saber qué” (logos) la descripción de la concepción del sujeto viene a ser equivalente a la faceta no ostensiva (interiorizada) de los sistemas de prácticas personales asociadas a un objeto o tipo de problemas. Sin embargo, el uso habitual de concepción conlleva unas connotaciones fuertemente mentalistas. A pesar de los intentos de proponer un uso técnico de esta noción no parece muy distinto del uso que se hace del mismo en el lenguaje ordinario: "la idea que tiene una persona en su mente cuando piensa sobre algo en un momento y circunstancias dadas". Los conocimientos y creencias son concebidos generalmente como entidades mentales en el enfoque cognitivista, mientras que en el enfoque antropológico se adopta una visión más amplia, comprendiendo también las destrezas, disposiciones, capacidades lógicas y discursivas, en definitiva, su "relación personal al objeto".

TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Estudiaremos el uso que se hace en Teoría de Situaciones de los términos ‘conocimiento’ y ‘saber’, restringiéndonos de momento al artículo de Brousseau (1986), tratando de dilucidar si en ese uso hay una distinción clara entre lo que nosotros denominamos “conocimiento subjetivo” y “conocimiento institucional”.

Guy Brousseau postula la existencia de un saber matemático cuya comunicación /reconstrucción por el sujeto, en el seno de los sistemas didácticos, es el compromiso de la didáctica. La transposición didáctica da cuenta de las adaptaciones de estos saberes para su estudio en el contexto escolar.

Parece claro que el saber matemático se refiere a una forma especial de conocimiento institucionalizado, que habitualmente se registra de forma axiomática y mediante la cual se despersonaliza y decontextualiza. “Este saber cuyo texto existe ya, no es una producción directa del maestro, es un objeto cultural, citado o recitado” (p. 73).

Pensamos que atribuye al saber matemático unos rasgos que podríamos calificar de absolutos: existe un “saber erudito” que está ahí (sin negar su carácter histórico y evolutivo) cuya apropiación por los estudiantes es el compromiso de la enseñanza. Con frecuencia se habla del saber en singular, pero en otras se usa el plural.

En otros párrafos se habla también de saberes que pueden estar bastante próximos al “saber erudito”; luego también al conocimiento institucional (saber) le atribuye un carácter relativo y temporal.

En teoría de situaciones no está nítidamente trazada la diferencia entre saberes y conocimientos. Tenemos que esperar a la página 97 del artículo para encontrar una distinción importante entre un saber y un conocimiento, ya que anteriormente el uso de ambos términos aparece confuso. “La distinción entre un saber y un conocimiento se debe en primer lugar a su estatuto cultural; un saber es un conocimiento institucionalizado. El paso de un estatuto al otro implica sin embargo transformaciones que los diferencia y que se explican en parte por relaciones didácticas que se establecen al respecto” (p. 97).

En la página 38—menciona las “actividades sociales y culturales que condicionan la creación, el ejercicio y la comunicación del saber y los conocimientos”. “El saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. El profesor plantea un problema que el alumno debe resolver, si el alumno responde, muestra así, que sabe; si no, se manifiesta una necesidad de saber que pide una información, una enseñanza”. (p. 48) Aquí vemos que también el saber está del lado del sujeto.

“Cada conocimiento puede caracterizarse por una o varias situaciones adidácticas que preservan su sentido y que llamaremos situaciones fundamentales. Pero el alumno no puede resolver de golpe cualquier situación a-didáctica, el maestro le procura entre las situaciones a-didácticas, aquellas que están a su alcance. Estas situaciones a-didácticas ajustadas a fines didácticos, determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar, debido a las restricciones y deformaciones aportadas a la situación fundamental” (p. 49-50). En este párrafo el conocimiento no está del lado del sujeto, sino que tiene un carácter externo, institucional.

Generalmente utiliza el término ‘saber’ ligado con el calificativo de “saber formal”, “saber erudito”, “saber teórico”, “saber práctico”, lo que indica que se interpreta como algo externo o institucional, como elemento de referencia de la enseñanza y el aprendizaje. La distinción saber-teórico, saber-práctico indica una primera “descomposición” del saber que podría relacionarse con la praxis y el logos, con lo conceptual y lo procedimental, pero no hemos encontrado un análisis más detallado de tales componentes básicos del saber matemático.

El supuesto básico de la teoría de situaciones consiste en modelizar cada conocimiento y /o saber, mediante las situaciones-problema: “Los conocimientos aparecen como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno

puede descubrir” (p. 37) “Cada conocimiento debe surgir de la adaptación a una situación específica” (p. 38)

Nos parece fundamental el progreso dado por la teoría de situaciones al conectar genéticamente los conocimientos matemáticos con las situaciones-problemas (tareas), pero pensamos que es insuficiente el análisis de los constituyentes del conocimiento: las situaciones son uno de los constituyentes pero no el único. La teoría antropológica introduce además las *técnicas* como un constituyente de la *praxis* matemática, aunque continúa sin proponer una descomposición suficiente del componente tecnológico-teórico. En la teoría de situaciones, y en los campos conceptuales tenemos propuestas, aunque de un modo implícitas, para progresar en la descomposición controlada del conocimiento. Por una parte están las situaciones de formulación- comunicación en las que intervienen de manera esencial los instrumentos lingüísticos (representaciones materiales que propone Vergnaud), y las situaciones de validación, en las cuales intervienen lo que podemos denominar objetos validativos (argumentaciones, demostraciones). Pero los conceptos y los teoremas deben ser reconocidos como constituyentes esenciales del componente discursivo del conocimiento, tanto en su versión personal (conceptos y teoremas en acto) como institucional, conceptos y teoremas matemáticos.

Es necesario analizar con detalle las nociones usadas en teoría de situaciones para referirse a los “conocimientos del sujeto”. Usa la palabra ‘representación’ en el sentido de representación interna (nos parece que de modo equivalente a concepto-en-acto), y se refiere a estos y a los teoremas en acto como “modelos implícitos”. Se refiere también a ellos como “formas de conocimiento” las cuales “no funcionan de manera completamente independiente, ni de manera completamente integrada, para controlar las interacciones del sujeto. El estudio de las relaciones que se establecen entre estos tipos de controles en la actividad del sujeto y el papel que juegan en las adquisiciones, es un sector de la psicología, esencial para la didáctica, estudio al que la didáctica pretende, por otra parte, contribuir” (p. 99).

La teoría de situaciones es respetuosa con las aportaciones de la psicología en el estudio de los procesos de construcción de los conocimientos (por parte del sujeto). “Los conocimientos evolucionan según procesos complejos. Querer explicar esas evoluciones únicamente por las interacciones efectivas con el medio, sería ciertamente un error, pues muy pronto los niños pueden interiorizar las situaciones que les interesen y operar con sus “representaciones internas”, experiencias mentales muy importantes. Resuelven así los problemas de asimilación (aumento de esquemas ya adquiridos por agregación de hechos nuevos) o de acomodación (reorganización de esquemas para aprender preguntas nuevas o para resolver contradicciones). Pero la interiorización de éstas interacciones no cambia mucho la naturaleza: el diálogo con un oponente “interior” es ciertamente menos vivificante que un verdadero diálogo, pero es un diálogo.

El término concepción sólo lo hemos encontrado en un párrafo en el artículo que estamos analizando. Nos parece que se usa con un significado similar a “modelo implícito”, y también de manera equivalente a “conocimientos del alumno”. “Es necesario insistir sobre el carácter “dialéctico” de estos procesos: las concepciones anteriores de los alumnos y los problemas que el medio les propone, conducen a nuevas concepciones y a nuevas preguntas cuyo sentido es fundamentalmente local” (p. 100)

“El estudio de la evolución del conocimiento de los alumnos, a condición de que sea convenientemente apoyada por el análisis de condiciones referentes a las situaciones, puede aportar una interesante aclaración sobre procesos históricos y constituir una clase de epistemología experimental” (p. 101).

TEORÍA ANTROPOLÓGICA

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de obra matemática, praxeología, relación institucional al objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. El constructo cognitivo (en sentido restringido) que propone es el de “relación personal al objeto” que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.). Pero esta noción de relación personal al objeto no ha sido desarrollada, al postularse como previa y determinante la caracterización de las praxeologías matemáticas y el estudio de las relaciones institucionales.

Veamos la descripción que se hace en Chevallard (1999; p. 224-229) de la noción de praxeología que se ha convertido en una de las nociones básicas de la teoría antropológica, noción que guarda gran similitud con el constructo “sistema de prácticas institucionales ligadas a un campo de problemas” introducida en Godino y Batanero (1994).

Alrededor de un tipo de tareas, T , se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una *técnica* (al menos), τ , por una tecnología de τ , θ , y por una teoría de θ , Θ . El total, indicado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constituye una praxeología *puntual*, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T . Una tal praxeología –u *organización praxeológica*– está pues constituida por un bloque práctico-técnico, $[T/\tau]$, y por un bloque *tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$

El bloque $[\theta/\Theta]$ se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque $[T/\tau]$ constituye un *saber-hacer*. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología $[T/\tau/\theta/\Theta]$ *completa*, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una *minoración del saber-hacer*, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías (p. 229).

Tratemos de hacer algunas comparaciones de estas nociones con las propuestas en TCC. Es claro que la noción de situación que usa Vergnaud es la misma que la noción de tarea que se usa en TAD. Las técnicas, se describen como *maneras de realizar las tareas*; una técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica: no es así más que en casos poco frecuentes. Podemos estar tentados en comparar esta noción con la de “invariante operatorio”, constituyentes de los esquemas, pero no parece correcto, ya que como invariantes operatorios incluye Vergnaud a los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto, y por tanto, son más bien “reglas que orientan la acción del sujeto”. Por otra parte, en TAD no se hace ninguna referencia a que las técnicas se consideren como herramientas para el análisis de la cognición del sujeto, sino más bien para la cognición, entendida en sentido institucional. Se trata de una herramienta epistémica, no cognitiva, en el sentido propuesto en la introducción de este trabajo.

Parece claro que como constituyentes de las tecnologías y de las teorías están, aunque no se ha precisado hasta el momento, los conceptos, las proposiciones y las demostraciones matemáticas, mediante los cuales se logra justificar y explicar las técnicas. Estas nociones están implícitamente contenidas en las praxeologías matemáticas y tienen una naturaleza epistémica, o sea, institucional.

Según esta interpretación la noción de campo conceptual, que de una manera implícita también incluye los algoritmos y procedimientos de resolución de los tipos de problemas que se incluyen en los campos conceptuales, podría asimilarse a la noción de “praxeología matemática global”. Ambas nociones tienen una naturaleza institucional e

incluyen componentes similares. Ciertamente la noción de praxeología es bastante más general y flexible, ya que se aplica también a tipos de problemas más puntuales, aparte de distinguir entre los dos polos del saber matemático: el saber-hacer y el saber-qué, que podría relacionarse con la división clásica en los estudios cognitivos, de conocimientos procedimental y conceptual.

Un análisis similar aplicado a la noción de esquema muestra que en este constructo se tiene en cuenta los tipos de situaciones-tareas, los invariantes operatorios, las reglas de acción, las inferencias o razonamientos. Incorpora, por tanto, elementos situacionales, actuativos, conceptuales y argumentativos. Podemos interpretar el esquema de la TCC como una especie de “praxeología personal puntual”, constructo no contemplado aún en la TAD, pero que debería ser considerado a fin de disponer dentro del enfoque antropológico de instrumentos para estudiar la dialéctica entre las dimensiones personales /subjetivas e institucionales de la cognición matemática.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

En los trabajos sobre “significado institucional y personal de los objetos matemáticos” (Godino y Batanero, 1994; 1998) hemos introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal (o mental) como las herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución I, y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De estas nociones se derivan las de “significado de un objeto personal” y “significado de un objeto institucional”, que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente. Estas nociones se propusieron con la finalidad de precisar y operativizar las nociones de “relación personal e institucional al objeto” introducidas por Chevallard (1992).

En nuestro modelo teórico el significado se concibe como el contenido asignado a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjelmslev, 1943). Según esto “el significado” no tiene porqué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo. Es sencillamente aquello a lo cual se refiere el sujeto (interpretante) en un momento y circunstancias dadas, de una manera manifiesta o interiorizada. En ciertos actos comunicativos nos referimos a “sistemas de prácticas” (operativas y discursivas), mientras que en otros nos referimos a elementos constitutivos de tales sistemas; estos objetos son también “significados” para el interpretante correspondiente.

En trabajos más recientes (Godino y Batanero, 1998b) proponemos una descomposición en elementos para los sistemas de prácticas, con el fin de tener un instrumento analítico más fino de la actividad matemática del sujeto y de los conocimientos institucionales. Consideramos que el problema epistémico/ cognitivo no puede desligarse del ontológico. Conocer, ¿qué cosa?. Por este motivo venimos interesados por elaborar una ontología minimal, pero suficiente para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”. Como unidad básica para el análisis cognitivo proponemos los “sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas”. Conocer en matemáticas quiere decir conocer los “sistemas de prácticas” (operativas y discursivas), pero ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, así como su estructura.

En Godino (1999) hemos propuesto una tipología de entidades que ha sido usada en la tesis de Roa (2000) para caracterizar los conocimientos puestos en juego por estudiantes universitarios en la resolución de una muestra de problemas combinatorios. Este modelo ontológico para las matemáticas, así como la distinción entre significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994) ha resultado útil en la tesis en elaboración de Tauber (2001) para describir los conocimientos personales e institucionales puestos en juego en el proceso de estudio de la distribución normal de probabilidad, en la tesis de Recio (1999) sobre significados institucionales y personales de la demostración y en la tesis de Ortiz (1999), en la que se estudian los significados de las nociones probabilísticas elementales en una muestra de libros de textos de secundaria.

En estos trabajos hemos introducido una ontología matemática basada en cinco tipos de entidades (tres en las tesis de Recio y Ortiz) como objetos emergentes de los “sistemas de prácticas”, o significado (pragmático) de un objeto matemático. Dichos objetos los designamos con los nombres de ostensivos (registros expresivos), extensivos (situaciones-problemas), actuativos (operaciones, técnicas), intensivos (conceptos, proposiciones), validativos (argumentaciones). Aunque este modelo ya se ha revelado como un instrumento útil en el análisis cognitivo de procesos de resolución de problemas y de trayectorias instruccionales no podemos considerarlo definitivamente cerrado.

Describimos, a continuación una versión revisada de dicho modelo ontológico que pretende tener en cuenta para el conocimiento matemático, además de las facetas institucional-personal, la faceta ostensiva-no ostensiva, y una tercera dimensión que consideramos esencial de la actividad matemática: su tendencia a la generalización y generación de nuevos objetos progresivamente más abstractos.

Objetos personales e institucionales

Para cada expresión una persona puede asignar un contenido que puede ser idiosincrásico y diferir del contenido que atribuye (normativa o convencionalmente) la institución de la que forma parte. Esta circunstancia nos lleva a la necesidad de hablar de “objeto personal” y “objeto institucional” como los contenidos respectivos asignados por la persona o la institución a una expresión.

En la enseñanza de las matemáticas, no siempre hablamos de lo que un alumno en particular conoce o comprende, por ejemplo, del “número real”. También hablamos de las tareas que en tal libro se proponen para el estudio del tema, de las propiedades que se han seleccionado, notaciones, definiciones, demostraciones, etc. O también, de cómo se estudia el tema en los primeros cursos de universidad. Con la expresión “número real” nos estamos, por tanto, refiriendo a lo que podemos llamar un “objeto institucional”, algo que está fuera de la cabeza de las personas, que está en los libros y en las relaciones interpersonales, y se usa como referencia en el estudio de un tema.

Institucionalmente, la expresión ‘número real’ se refiere a una definición precisa, (un elemento de cualquier cuerpo ordenado y completo), convenida, aunque no de manera arbitraria: el concepto de número real (el concepto como regla, como propone Wittgenstein). Pero también se usa “número real” para designar a todo un sistema o estructura matemática que incluye, las tareas problemáticas que la motivan, las técnicas operatorias, las definiciones, proposiciones y argumentaciones, esto es, el concepto como *sistema de prácticas*.

Considero que la distinción que hemos propuesto entre objeto personal e institucional es fundamental para poder describir y explicar los procesos de enseñanza y

aprendizaje de las matemáticas. Cuando emitimos juicios tales como, "el alumno A no comprende el número real", se ponen en juego los objetos personal e institucional correspondientes.

Objetos ostensivos y no ostensivos

Es importante no confundir una regla con la expresión oral o escrita de la regla. Podemos cambiar la expresión (de idioma, por ejemplo) y, sin embargo, la regla es la misma. Lo importante es el proceso por el que se ha definido esa regla, su motivación y las consecuencias para la vida de las personas. El aprendizaje de las reglas socioculturales no se logra cambiándolas de registro expresivo, sino involucrando a las personas en los juegos de lenguaje, en las acciones y circunstancias correspondientes.

Esto es también aplicable a las matemáticas. En la actividad matemática se ponen en juego objetos ostensivos, correspondientes a los distintos registros expresivos (oral, escritura, gráfico, tangible, gestual), esto es, objetos perceptibles (mundo 1 de Popper; Popper, 1972). Pero estos objetos son usados para describir otra clase de objetos no ostensivos: hablamos de situaciones-problemas, operaciones, conceptos, proposiciones y argumentos; aunque todas estas entidades se expresan mediante ostensivos, no se reducen a tales manifestaciones. En el plano de la conciencia del sujeto los objetos no ostensivos tienen una realidad mental y vivencial (mundo 2 de Popper), mientras que respecto del plano institucional, los conceptos, proposiciones, argumentaciones tienen una realidad normativa, convencional, lógica (mundo 3 de Popper).

Objetos concretos y abstractos

Por otra parte, en el estudio de las matemáticas estamos siempre interesados por generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen. No nos conformamos con resolver un problema aislado sino que deseamos resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Además, tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez más globales. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema.

Esta variedad de objetos y facetas tiene que ser tenida en cuenta cuando hablamos de conocimiento, representación, significado y comprensión en matemáticas.

La noción de conocimiento de un objeto como trama de funciones semióticas

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos descritos, con los distintos "apellidos" que les asignamos según su naturaleza y función, no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras.

Por este motivo, considero de gran utilidad introducir en nuestro modelo ontosemántico y cognitivo otro objeto de naturaleza relacional: la función semiótica, que va a permitir formular en términos semióticos, y de una manera generalmente flexible, el conocimiento y la comprensión matemática. Se trata de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Los diversos objetos considerados en nuestro modelo ontológico pueden ser expresión y contenido de funciones semióticas, y por tanto, significados, o lo que es equivalente conocimientos. Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos).

El modelo teórico esbozado permite hacer una interpretación del *conocimiento* y la *comprensión* de un objeto O (sea ostensivo- no ostensivo, concreto-abstracto) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de objetos que se ponen en juego.

Uno de los puntos diferenciadores de nuestro modelo teórico está en la descomposición analítica que proponemos para los conocimientos, tanto individuales como institucionales. Junto a los conocimientos procedimentales y conceptuales (técnicas, conceptos y proposiciones) consideramos necesario distinguir los conocimientos situacionales o fenomenológicos (situaciones-problemas, tareas), conocimientos lingüístico-notacionales y conocimientos argumentativos-validativos.

6. HACIA UNA INTEGRACIÓN DE MODELOS

Consideramos que la noción de conocimiento que proponemos en la teoría de las funciones semióticas y la ontología matemática que le asociamos podría permitir confrontar las nociones teóricas propuestas en las restantes teorías consideradas y avanzar hacia su integración. Todas ellas comparten un interés por la naturaleza de las matemáticas y adoptan una posición filosófica de tipo pragmático hacia el conocimiento matemático.

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de “sistemas de prácticas personales”, que puede ser interpretada como la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como funtivo (expresión o contenido). Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o actuativa ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología introducida por Chevallard, siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional.

Cada *praxeología personal* viene expresada ostensivamente mediante un sistema de objetos perceptibles; pero además debemos atribuirle un componente de naturaleza no ostensiva (interiorizada, mental). Este constructo praxeología personal debe incluir, en su versión interiorizada, los componentes de tipo situacional y procedimental (praxis), y los componentes conceptuales, proposicionales y validativos (logos).

Los modos de “hacer y de decir” ante un tipo de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el “objeto función” se proponen como respuesta a la pregunta “qué significa el objeto función” para un sujeto (o una institución); o sea la praxeología personal (respectivamente, institucional) relativa al tipo de problemas considerado es el significado personal (institucional) del objeto (o de modo equivalente, tipo de

problemas). El contenido de esta función semiótica es una praxeología, por lo que se puede designar como “significado praxeológico” del objeto.

Esta modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como la faceta interiorizada (no ostensiva) de una praxeología personal, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales (intensionales) constituyentes de dichas praxeologías personales.

La noción de *concepción* sobre un objeto y la de *relación al objeto*, tanto personal como institucional, parten de un dato previo cuya existencia, naturaleza y estructura interna no se analiza ni cuestiona: el objeto. Presentan, en consecuencia, desde nuestro punto de vista, una debilidad a la hora de investigar los procesos de formación de tales concepciones y relaciones. Además, no tratan el problema de su evaluación y de la validez de las inferencias que se deben realizar a partir de las manifestaciones empíricas. La noción de concepción del sujeto sólo responde a uno de los tipos de conocimientos, el conceptual, con relegación de los restantes tipos de conocimientos. Responde, por tanto, a un modelo cognitivo-epistémico insuficiente y puede llevar a una visión sesgada, cuando no incorrecta, de los fenómenos de cognición matemática. En conclusión, interesa “concebir” la concepción como praxeología para sacar la cognición de la “carcel mentalista”. En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de “concepción” de un sujeto sobre un objeto O (o sostenida en el seno de una institución) asignemos como contenido, “el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto manifiesta en las que se pone en juego dicho objeto”. Dicho sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado.

Nos parece que la noción de “praxeología personal”, entendida como hemos descrito, puede sustituir con ventaja a la de “concepción del sujeto” y de “esquema”, ya que ambas tienen un grado de generalidad similar a la de praxeología, enfatizando no obstante la faceta mental de la cognición. La praxeología personal, esto es, *lo que un sujeto es capaz de “hacer y de decir” ante una clase o tipo de situaciones-problemas*, es un constructo no mentalista que podría sustituir a las nociones de esquema y concepción. La praxeología pueden ser más o menos amplia (puntual, local, global), según los tipos de problemas abarcados, pero sobre todo se le atribuye unos componentes y estructura en consonancia con las praxeologías institucionales.

Respecto de la noción de praxeología, según se describen en Chevallard (1999) consideramos que el polo tecnológico/ teórico (logos) se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales (conceptos-definición, proposiciones, argumentaciones) y nos parece necesario añadir un tercer polo formado por el sistema de objetos perceptibles mediante los cuales se expresan y operan los otros dos polos. El análisis detallado de los procesos de resolución de tareas matemáticas revela que las fases de desarrollo de las técnicas (en general, elementos actuativos) suponen la aplicación contextualizada de objetos intensivos (conceptos-regla y proposiciones) y validativos, al menos de manera implícita. De igual modo, la elaboración de justificaciones requiere la aplicación de elementos actuativos y extensivos (situaciones-problemas). Esta circunstancia nos parece que resta relevancia a la distinción praxis-logos (y la de tecnología-teoría): los elementos intensivos y validativos son densos por doquier en la actividad matemática.

Por otra parte, la consideración de los componentes discursivos del conocimiento matemático como reglas gramaticales para el manejo de las expresiones, usadas para describir el mundo de objetos y situaciones extra o intramatemáticas, como propone Wittgenstein -promotor inicial de un enfoque antropológico en filosofía de la matemática- nos plantea un reto a la investigación didáctica: El problema del recuerdo, contextualización y seguimiento de las reglas matemáticas por parte del discente. El

papel del profesor, como director del proceso de estudio matemático, en el momento de la "des-institucionalización" es crucial para garantizar el mantenimiento de la relación didáctica.

El uso que se hace en Teoría de Situaciones de la noción de sentido queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y "le da su sentido" (podemos describirlo como "significado situacional"). Según nuestro modelo teórico esta correspondencia es sin duda crucial al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido, bien en términos cognitivos, o epistémicos.

En el caso de la Teoría de los Campos Conceptuales la noción de significado es más rica que en Teoría de Situaciones ya que incluye, además del componente situacional, los elementos actuativos (esquemas) e intensionales (conceptos y teoremas en acto). El contenido que se considera significado de un objeto matemático para un sujeto es prácticamente la globalidad holística que nosotros describimos como "sistema de prácticas personales" (praxeología personal). Sin embargo, nuestra noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporciona un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático.

En nuestro caso, la noción de significado (o sentido) de un objeto matemático deja de ser una entidad etérea y misteriosa. Es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional; puede referirse a una praxeología, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.).

La noción de representación y registro semiótico usadas por diversos autores hacen alusión según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos (instrumental y componencial).

En la Teoría de las Funciones Semióticas, la comprensión y el conocimiento no se conciben meramente en su dimensión mental, sino esencialmente en sus dimensiones personales e institucionales, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación y acoplamiento progresivo de significados.

La identificación de los *conflictos semióticos* que tienen lugar en las interacciones profesor-estudiante durante los procesos de estudio de un contenido matemático es un aspecto esencial del análisis didáctico al proporcionar una explicación de las dificultades de los estudiantes en dicho proceso.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2, 3): 241-286.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 221-266.
- Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológica de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En, T. Ortega (Ed.). *Actas del III Simposio de la SEIEM* (p.).
[<http://www.ugr.es/local/jgodino/>]
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3: 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (p. 25-45). Associação de Profesores de Matemática. Portugal. [<http://www.ugr.es/local/jgodino>]
- Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.
- Morin, E. (1977). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra, 1986.
- Ortíz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Depto de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Popper, K. R. (1972). *Conocimiento objetivo*. Madrid: Tecnos.
- Recio, A. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis Doctoral. Depto de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Sierpiska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.
- Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla.
- Varela, F. J. (1988). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas; cartografía de las ideas actuales*. Barcelona: Gedisa, 1990.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 10, n. 2,3, pp. 133-170.