OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Eva Cid
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Resumen

En esta ponencia se comentan algunos aspectos de un trabajo en fase de realización. El objetivo del mismo es utilizar la noción de obstáculo epistemológico definida en el marco de la teoría de situaciones didácticas para terciar y, en la medida de lo posible, zanjar la polémica sobre la existencia de obstáculos en la historia de los números negativos y su influencia en la enseñanza actual, polémica surgida hace ya años pero que sigue sin resolverse. En la ponencia se presentan algunos aspectos del estado de la cuestión y ciertas aportaciones al tema.

1. La noción de obstáculo epistemológico

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938), fue retomada por Brousseau en 1976 y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas.

En dicha teoría se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución. La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada.

Ahora bien, en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones. Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos referentes a la noción matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones y para determinados valores de sus variables didácticas, pero que no son eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones o al modificar las variables didácticas de la situaciones consideradas. Una concepción tiene, por tanto, un campo de problemas en el que funciona y otro campo de problemas en el que no permite resolver o, al menos, dificulta la resolución. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones.

Pero, dentro de esta perspectiva y desde un punto de vista teórico, pueden plantearse otras alternativas a la evolución de concepciones. Por ejemplo, podría darse el caso de que, acerca de una misma noción matemática y en un mismo sujeto, aparecieran dos concepciones contradictorias ligadas a dos subconjuntos de situaciones diferentes, lo que, tarde o temprano, obligaría al sujeto a integrar las dos concepciones limando los aspectos contradictorios o a rechazar una de ellas. También podríamos encontrarnos con una concepción a la que ya no fuera posible hacer evolucionar para que asumiera nuevos campos de problemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitución por otra.

En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, se dice que la concepción es un obstáculo. Y esa concepción obstáculo se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes.

Brousseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos (1980, 1981, 1983, 1988, 1989a, 1989b). Entre ellas figura una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se situe en uno u otro de los polos del sistema didáctico -alumno, profesor y saber- o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural. En particular, califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

Por otro lado, Duroux (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau, es la siguiente:

> a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
>
> b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
>
> c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.

> d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
>
> e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989a, p. 43)

Como podemos ver, en la teoría de situaciones la noción de obstáculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Además, la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido. Esto induce a extender el concepto de concepción utilizándolo también como significante del estado de conocimiento propio de los matemáticos de otras épocas.

Aparece así el término 'concepción histórica' para referirse a la concepción que determinado matemático de otra época ha podido tener de una cierta noción matemática, siempre que esa concepción sea relevante, es decir, que represente la forma de pensar de una parte significativa de la comunidad de matemáticos de su tiempo. La determinación de estas concepciones históricas se hace a partir de la lectura de la obra escrita del matemático considerado.

2. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: la aportación de Glaeser

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos aparece en un artículo de Glaeser publicado en 1981. En él, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. Para ello, y haciéndose eco de la "sorprendente lentitud" del proceso histórico de construcción del concepto de número negativo[1], busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado, analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de distintas épocas[2] dijeron sobre dichos números.

[1] La lectura de los textos citados por Glaeser muestra que desde la primera formulación de la regla de los signos, hecha por Diofanto, hasta mediados del siglo XIX, se utilizan de continuo unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, geometría analítica, trigonometría, etc.), pero que la comunidad matemática no sabía como encajar dentro de su cuerpo teórico. Los números negativos se usaban con profusión y sin dificultad, pero cuando los grandes matemáticos se veían obligados a dar explicaciones sobre su naturaleza, lo hacían en unos términos difícilmente concebibles hoy en día.

[2] Se citan textos de: Diofanto, Stevin, Descartes, Mc Laurin, Clairaut, Euler, Cramer, D'alembert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel.

Ahora bien, aun cuando Glaeser empieza su artículo refiriéndose a la noción de obstáculo en Bachelard y Brousseau, enseguida aclara que considera prematuro precisar demasiado el término 'obstáculo' y que lo utiliza con un sentido amplio, equiparándolo a 'dificultad', 'umbral', 'síntoma', etc. En estas condiciones, el autor considera que en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

- *Dificultad para unificar la recta real.* En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

- *La ambigüedad de los dos ceros.* Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada"[3].

- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.* La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ respetando un principio de permanencia que conservará determinadas "buenas propiedades" de la estructura algebraica de los reales positivos. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problema:

[3] Hay que tener en cuenta, como muy bien señala Glaeser (1981, p. 239), que el establecimiento de las escalas de temperatura Celsius o Réaumur, uno de los hechos que pudo contribuir a la aceptación de un cero origen y de cantidades por debajo de cero, fue bastante tardío. Réaumur realizó sus primeros termómetros en 1730 y Celsius en 1742, pero tardaron casi un siglo en popularizarse.

> Ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números enteros de un modo metafórico. Estos números ya no son *descubiertos*, sino *inventados*, *imaginados*. (Glaeser, 1981, p. 337)

Se trata, por el contrario, de una justificación puramente formal basada en necesidades internas de las matemáticas.

Al hecho de creer que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido y a partir del cual se puedan justificar sus propiedades, es a lo que Glaeser parece llamar "estadio de las operaciones concretas". Esta creencia se relaciona, según el autor, con una corriente ideológica muy amplia que se inicia en los *Elementos* de Euclides e impregna todo el pensamiento matemático hasta fines del siglo XIX. Se caracteriza por suponer que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico que han sido suficientemente idealizados para poder insertarlos en un discurso hipotético-deductivo, lo cual permite que allí donde ese razonamiento deductivo no alcanza, pueda recurrirse al "pensamiento natural", el "sentido común" o la "intuición" como medio de justificación del discurso matemático. Pero esta forma de entender las matemáticas, que posee indudables ventajas, también tiene serios inconvenientes, como el que se plantea cuando a través del razonamiento deductivo se demuestran propiedades que repugnan a la "razón natural". Glaeser atribuye a matemáticos como Stevin, Euler, D'Alembert, Carnot y Laplace este tipo de ideología, mientras que la postura de Hankel representa la superación del obstáculo.

- *Deseo de un modelo unificador.* Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Glaeser concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales. Añade también que su investigación pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

3. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: otras aportaciones

Son varios los autores que, a raíz del trabajo de Glaeser, discuten el tema de los obstáculos epistemológicos en los números negativos. Entre ellos, Duroux (1982) hace hincapié en que la definición de obstáculo epistemológico propuesta por Brousseau exige que el obstáculo sea un conocimiento, no una falta de conocimiento. Teniendo esto en cuenta, Duroux considera que los dos primeros obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser:

la “falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas” y la “dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas”, no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento.

Sin embargo, la “dificultad para unificar la recta real”, puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstáculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos. Añade, además, que la concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud, concepción trasmitida por la enseñanza elemental, puede estar en la base de la diferente consideración de positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida “a la inversa”, como un objeto compuesto de dos partes: el signo $-$ y una medida, mientras que el positivo representa, sin más, una medida. Esto puede llevarnos a interpretar los números enteros negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Brousseau (1983) argumenta en la misma línea que Duroux, insistiendo en que hay que distinguir entre un “obstáculo” y una “dificultad”, sugiriendo que lo que propone Glaeser son “dificultades” que pueden servir como punto de partida para la búsqueda de los verdaderos “obstáculos”:

> Muy a menudo, es entre las “dificultades” donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un **obstáculo es un conocimiento**, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la “dificultad” que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto. . .). (Brousseau, 1983, p. 190)

Pero además es necesario establecer, no sólo los errores, dificultades y resistencias que ese obstáculo produce, sino también el dominio donde se revela eficaz:

> Y hay que hacer notar que no basta con identificar las dificultades y los fracasos del conocimiento-obstáculo, sino también, y sobre todo, sus **éxitos**. (Brousseau, 1983, p. 192)

En el intento de encontrar el obstáculo u obstáculos que puedan estar detrás de esas dificultades, Brousseau (1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de “positivo” o “negativo” a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. Por ejemplo, dependiendo de la situación, la entrada y salida de productos en un comercio puede notarse positiva o negativamente. Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el carácter “relativo” de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

También retoma la propuesta de Duroux, respecto a que la concepción de los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos pudo ser un obstáculo a la homogeneización de los dos tipos de números y su inclusión en una única clase: la de los enteros, pero advierte de que, tanto la “relatividad de positivos y negativos” como “la diferente naturaleza de los negativos respecto a los naturales”, son sólo candidatos a obstáculo y que su aceptación como tales exige probar la resistencia de esas concepciones a evolucionar y los errores repetidos que produjeron. Brousseau piensa que en el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones es muy probable que se haga evidente la existencia de un obstáculo todavía más antiguo: “la concepción del número como medida”, es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una cantidad de magnitud.

Schubring (1986, 1988) realiza un trabajo parecido al de Glaeser, pero analizando, sobre todo, textos escritos por matemáticos alemanes. A la hora de explicar la difícil emergencia del número negativo, recurre también al término ‘obstáculo’, pero con un sentido distinto al usado por los autores anteriores. Así dice (1986, pp. 22-24) que las principales causas de impugnación de los números negativos como objeto plenamente matemático pertenecen a tres grandes categorías:

- *Obstáculos internos a las matemáticas.* Dentro de esta categoría señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número. Históricamente, el concepto básico de las matemáticas ha sido el de cantidad, pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de número. A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de textos matemáticos franceses. Según él, se trata de un fenómeno localizado que no puede extenderse a otros países como, por ejemplo, Alemania, donde un desarrollo temprano del concepto de número, separado de los de cantidad y magnitud, evitó parte de las dificultades observadas en el país vecino.

- *Obstáculos epistemológicos.* Considera como tales, los que se refieren a:

> Las epistemologías subyacentes a la trasmisión del saber científico a la sociedad en general. Por “epistemología” se puede entender las concepciones sobre las condiciones de “existencia” de las entidades matemáticas. Estas epistemologías se presentan con la siguiente alternativa:
>
> - una epistemología sustancialista (u ontológica), según la cual los conceptos se justifican por reducción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico;
>
> - una epistemología sistémica, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas. (Schubring, 1986, p. 23)

En opinión del autor, la opción por una u otra de estas alternativas puede ser responsable de alguna de las rupturas descritas en el ámbito de los números negativos. Se observa aquí una cierta coincidencia entre Schubring y Glaeser respecto a un posible obstáculo, aun cuando le dan nombres distintos: el primero le adjudica el término genérico de ‘obstáculo epistemológico’, mientras que el segundo le llama ‘estancamiento en el periodo de las operaciones concretas’.

- *Arquitectura de las matemáticas.* Se refiere con esto a una tercera categoría de obstáculos que tienen que ver con la importancia que en cada época se ha concedido a las distintas ramas de las matemáticas, en particular, al álgebra y a la geometría. El hecho de que las dos tengan igual importancia favorece a nociones, como la de cantidad, integradoras de los dos ámbitos, lo que perjudica el proceso de diferenciación entre número y cantidad; si se considera a la geometría como la rama más importante de las matemáticas, la cantidad se convierte en la noción básica de las matemáticas y la de número es una noción subsidiaria; por último, si es el álgebra la disciplina fundamental y la geometría un campo de aplicación del álgebra, se tiene entonces la concepción que sostuvo el proceso llamado de 'aritmetización de las matemáticas' con el número como noción básica. Schubring considera que muchas rupturas conceptuales pueden explicarse en términos de concepciones sobre la arquitectura de las matemáticas.

Es evidente que la concepción de obstáculo que maneja Schubring está muy alejada de la propuesta de Brousseau. Parece que entiende por obstáculos ciertos conocimientos meta-matemáticos que son, según él, las causas últimas de las rupturas observadas en el proceso de evolución del estatuto matemático de ciertas nociones; rupturas que, por otra parte, queda sin definir en qué consisten y cómo se reconocen. Únicamente en la primera categoría de obstáculos que propone, los "obstáculos internos", hace referencia a conocimientos propiamente matemáticos y no de epistemología de las matemáticas, pero enseguida añade que esta categoría no parece haber sido la causa principal de las rupturas e, incluso, parece haber contribuido al lento progreso del estatuto matemático del número negativo, dejando en manos de las otras dos categorias: los "obstáculos epistemológicos" y la "arquitectura de las matemáticas", la responsabilidad de las tales rupturas.

Por otro lado, Brousseau califica de "epistemológicos" a los obstáculos encontrados en la enseñanza de las matemáticas si se constata que en alguna época histórica la comunidad matemática tuvo que franquear ese mismo obstáculo y las huellas de ese hecho pueden encontrarse en el discurso matemático actual. Sin embargo, Schubring utiliza dicho calificativo para referirse, como ya hemos dicho, a ciertas concepciones filosóficas sobre las condiciones de existencia de los objetos matemáticos que, a su juicio, impregnan los procesos de transmisión del saber matemático a la sociedad.

Todo esto nos permite constatar que la discusión sobre los obstáculos epistemológicos en los números negativos tiene una dimensión más profunda: la discrepancia sobre la naturaleza y utilidad de la noción de obstáculo epistemológico en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

4. Resumen del estado de la cuestión

Aun cuando la polémica de la que hemos dado cuenta en los apartados anteriores se produjo hace ya bastantes años, no ha habido desde entonces ninguna contribución importante al tema. De hecho, la situación en el momento actual podría resumirse en los siguientes términos:

1) La noción de obstáculo epistemológico ha seguido recibiendo interpretaciones diversas y, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau (Sierpinska, 1989; Artigue, 1990; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), mientras que en otros casos se ha sustituido por nociones consideradas más apropiadas (Léonard y Sackur, 1990). Sin embargo, el obstáculo epistemológico tal como lo concibe Brousseau no ha sido contrastado

experimentalmente -la mayor parte de los investigadores que lo han utilizado lo han hecho dándole un significado distinto del propuesto por él-, ni tampoco se han hecho objeciones que justifiquen su abandono o sustitución por otro concepto.

2) La propuesta de Glaeser sobre posibles obstáculos en la historia de los números negativos a tener en cuenta en la enseñanza actual, al margen de las críticas ya comentadas, no ha vuelto a discutirse. Los trabajos posteriores sobre epistemología del número negativo, o bien no se expresan en términos de obstáculos, o bien hacen una utilización ambigua del término en la que caben sinónimos como 'dificultad', 'ruptura', etc., o bien repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring, pero sin aportar pruebas que justifiquen su postura. Por consiguiente, en estos momentos no hay acuerdo sobre la existencia o no de obstáculos en la historia de los números negativos, ni sobre cuáles son éstos, supuesto que existan.

3) La determinación de obstáculos en la historia de las matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su pervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales. Un obstáculo epistemológico es, ante todo, una concepción detectable en un número significativo de alumnos que puede ser puesta en relación con ciertas concepciones históricas. Sin embargo, no existen apenas investigaciones que relacionen las concepciones de los alumnos sobre los números negativos con las investigaciones sobre obstáculos en la historia de dichos números. Es más, de hecho apenas existen investigaciones sobre errores de los alumnos que se analicen en términos de concepciones. La mayor parte de los cuestionarios pasados a los alumnos se limitan a aspectos muy puntuales y no permiten relacionar entre sí los errores relativos a diferentes aspectos del número negativo.

Únicamente Coquin-Viennot (1985) e Iriarte et al. (1991) analizan los errores de los alumnos en términos de obstáculos: la primera usando el concepto propuesto por Brousseau y las segundas dándole un sentido parecido al de Glaeser. Pero sus deducciones no han sido confirmadas ni rechazadas por ninguna investigación posterior. Otros investigadores como Peled (1991) o Gallardo (1996) intentan también encontrar una coherencia en los errores de los alumnos que los acerca a la búsqueda de concepciones, pero sin tener en cuenta la posibilidad de los obstáculos.

4) Las conclusiones que se desprenden de los estudios sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos hacen sospechar que una introducción de los mismos o, más en particular, de los números enteros, por medio de modelos concretos[4], que es la opción más elegida hoy en día, puede resultar poco conveniente. Para empezar, no sólo es evidente que, aun cuando dichos modelos justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto, sino que hay que afrontar la posibilidad, comentada entre otros, por Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985) y Gobin et al. (1996), de que dichos

[4] Son muchos los modelos concretos que se utilizan o se proponen en la enseñanza de los números enteros (deudas y haberes, temperaturas, fichas de dos colores, móviles que recorren un camino, etc.). Básicamente, pueden clasificarse en dos tipos: modelos de neutralización en los que dos números enteros opuestos representan fuerzas que se neutralizan y modelos de desplazamiento en los que los números enteros representan desplazamientos a lo largo de un camino, en uno u otro sentido.

modelos sean incluso un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números enteros.

Por otro lado, la hipótesis de que varios de los obstáculos definidos por Glaeser son manifestaciones de un obstáculo más general: el de la concepción del "número como medida", hipótesis formulada por Duroux (1982) y Brousseau (1983) y asumida, posteriormente, por otros varios autores (Coquin-Viennot, 1985; Schubring, 1986; Iriarte et al., 1991, entre otros), plantea también dudas sobre si la utilización de modelos concretos está en consonancia con el tratamiento didáctico que debe recibir un obstáculo. Sin embargo, la posibilidad de que los modelos concretos resulten ser un obstáculo didáctico o contribuyan a reforzar un obstáculo epistemológico tampoco ha sido estudiada en profundidad y, desde luego, la bibliografía que se dedica a buscar y proponer esos modelos concretos, se olvida o desconoce dicha posibilidad.

Una vez hecho el resumen del estado de la cuestión, podemos pasar, sin más dilación, a exponer los objetivos de nuestro trabajo. Son los siguientes:

- Investigar los obstáculos en la historia de los números negativos utilizando para ello el concepto de obstáculo epistemológico que propone Brousseau.
- Constatar si dichos obstáculos históricos perviven en los alumnos actuales.
- Analizar en qué medida afectaría la existencia de obstáculos epistemológicos a las prácticas habituales de enseñanza del número negativo y a las nuevas propuestas didácticas.
- Verificar si el uso del concepto de obstáculo epistemológico que propone Brousseau nos lleva a obtener resultados que por otras vías no se han conseguido, lo que, de paso, nos permitiría decidir si dicho concepto resulta útil en la investigación didáctica.
- Profundizar en las condiciones históricas que hicieron necesaria la aparición y posterior evolución de los números negativos, información que consideramos relevante de cara al diseño de posibles génesis escolares de la noción.

5. Algunas aportaciones al tema

Entre las aportaciones que, hasta el momento, creemos haber hecho al tema de los obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, podemos citar las siguientes:

1) Sobre la metodología precisa para determinar obstáculos en la historia de las matemáticas

El concepto de obstáculo epistemológico propuesto por Brousseau requiere ciertas adaptaciones para poder ser utilizado en la historia de las matemáticas. De entrada, un obstáculo es una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos y saberes que lleva a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro. Esta formulación permite distinguir concepciones en los alumnos por medio de cuestionarios que ponen de manifiesto los errores que cometen y las dependencias que se establecen entre ellos. Sin embargo, las concepciones de los matemáticos del pasado sólo pueden determinarse estudiando sus obras, y en ellas, como consecuencia del fenómeno de la transposición didáctica, apenas quedan huellas de los errores, vacilaciones, dificultades o fracasos propios del proceso de creación matemática.

Así pues, la detección de errores no puede constituirse en el eje alrededor del cual se establezcan las concepciones históricas, sino que habrá que buscar los indicios que nos permitan deducir las dificultades o fracasos que no suelen evidenciarse en los textos históricos. Uno de estos indicios es el campo de problemas que aborda la obra matemática considerada y las técnicas que utiliza para resolverlos. Los límites de ese campo y las características de las técnicas empleadas pueden indicar zonas de dificultad, zonas donde la concepción no es eficaz, lo que nos ayudará a definirla.

Ahora bien, un obstáculo es además una concepción que se resiste a evolucionar o a ser sustituida por otra, incluso cuando se hace patente su fracaso. Establecer el carácter de obstáculo de una concepción histórica exige algo más que comprobar su eficacia o ineficacia en un cierto campo de problemas, exige comprobar que, a pesar de las repetidas dificultades que producía, la comunidad matemática se resistió por largo tiempo a abandonarla. Y en este punto hay que tener en cuenta varios aspectos:

- El hecho de que un determinado campo de problemas no se aborde puede deberse, bien a que los matemáticos de la época considerada lo han intentado, pero su concepción no les permite afrontar con éxito su resolución, o bien a que ese campo de problemas no forma parte de la preocupaciones matemáticas de dicha época. Hay que distinguir estos dos casos porque en el primero nos podríamos encontrar ante una concepción obstáculo, mientras que en el segundo caso es más dudoso.

- La distinción entre conocimiento y saber. Cuando se estudian las obras matemáticas nos encontramos con que determinados conocimientos están en la base de algunas de las técnicas usadas para resolver los problemas, pero no se explicitan, no se tratan como un saber. La existencia de conocimientos que "se usan" pero de los que "no se habla", puede indicar que la concepción tiene dificultades para integrar conocimientos necesarios para resolver nuevos campos de problemas, lo que es un sintoma de obstáculo.

- Otra idea importante para caracterizar obstáculos en la historia de las matemáticas la aporta Gascón (1993) cuando propone que un obstáculo epistemológico debe buscarse en los orígenes de una bifurcación, entendiendo por tal un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, tanto en lo referente a sus técnicas como al campo de problemas que aborda. De esta manera liga y, por consiguiente, limita la existencia de obstáculos epistemológicos a los momentos de ruptura producidos en la evolución histórica de las matemáticas.

Por consiguiente, a la hora de caracterizar las concepciones históricas hemos tenido en cuenta las siguientes variables: campo de problemas, objetos de referencia, conocimientos, saberes, límites de la concepción y relación de la misma con las matemáticas de su época y de épocas anteriores y posteriores.

2) Sobre los obstáculos en la historia de los números negativos

En primer lugar, hay que decir que, hasta ahora, las aportaciones epistemológicas al tema se han hecho desde el punto de vista de estudiar la "historia de los números negativos". Solamente Brousseau (1983) y Lizcano (1993) hablan de algo que nos parece fundamental:

no se puede interpretar la historia de las nociones matemáticas en términos de una sucesión de estados intermedios, defectuosos o incompletos, respecto a un ideal que se alcanza en nuestra época. La conflictiva emergencia de los números negativos pone de manifiesto la existencia histórica de diferentes formas de negatividad matemática que, ni fueron, en su momento, entendidas como números, ni pueden interpretarse como un proceso continuo que desemboca, inevitablemente, en el número negativo actual. Esto nos lleva a utilizar, siguiendo a Lizcano, los términos 'negatividad' o 'formas de negatividad' para indicar lo que habitualmente se consideran antecedentes históricos del número negativo.

Por tanto, nosotros no hablamos de concepciones históricas de los 'números negativos' sino de concepciones históricas de la 'negatividad matemática', sin establecer a priori una identificación entre las formas de negatividad que esas concepciones revelan y los números negativos actuales. Esta precaución nos ha permitido darnos cuenta de que esos "antecedentes" no lo son sólo del número negativo, sino también de otras varias nociones de las matemáticas actuales: traslaciones, vectores, recta real, segmentos orientados, etc.

El estudio de diferentes concepciones históricas sobre la negatividad[5] pone de manifiesto, a nuestro juicio, la existencia de dos concepciones obstáculo: la primera, aparecida en la matemática griega clásica, se organiza alrededor de la diferencia entre cantidades entendida como operación de "sustraer de lo que previamente existe"; la segunda se establece definitivamente en el siglo XVII, cuando se asume una interpretación de la diferencia entre cantidades en términos de variación o diferencia orientada o relativa.

Los objetos de referencia de la primera concepción obstáculo son, por una parte, los números naturales y las razones de números naturales, entendidos ambos como medidas absolutas de cantidades de magnitud, es decir, medidas en las que el cero representa la ausencia de cantidad de magnitud y, por otra, la diferencia de números naturales o de sus razones con minuendo mayor o igual que el sustraendo, entendida como "sustracción". El campo de problemas que aborda es el de los problemas aritméticos en $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$, resueltos con técnicas algebraicas en las que intervienen operaciones con diferencias o con sumandos y sustraendos. No se asume la existencia de una diferencia con minuendo menor que el sustraendo, ni la existencia de un sustraendo aislado y el álgebra está subordinada a la aritmética y es simplemente una herramienta de resolución de los problemas aritméticos.

En la segunda concepción obstáculo los objetos de referencia son, por un lado, los números con signo entendidos como medidas relativas de cantidades de magnitud -medidas referidas a una cierta cantidad de magnitud tomada como origen a la que se adjudica la medida cero-, o entendidos como medidas orientadas -medidas a las que se añade un signo que refleja una cierta cualidad bivalente de la magnitud-; por otro lado, las diferencias de números positivos con minuendo mayor, menor o igual que el sustraendo, entendidas como variaciones o "diferencias" orientadas. Esta concepción permite "dar sentido" y, en consecuencia, aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones, lo que autoriza el desarrollo de la teoría de las ecuaciones algebraicas, pero no justifica la estructura ordinal ni multiplicativa de $\mathbb{R}$.

[5] Concretamente se estudian las que aparecen en la *Arithmetica* de Diofanto (siglo III d.C.), los *Nueve Capítulos del Arte Matemático* de Liu Hui (siglo III d.C.), el *Triparty en la science des nombres* de Chuquet (1484), el *Treatise of Algebra* de McLaurin (1748) y *A treatise on Algebra* de Peacock (1830).

3) Sobre la necesidad de tener en cuenta los obstáculos históricos en la enseñanza de los números negativos

Los modelos concretos que se utilizan para introducir el número entero funcionan como metáforas o analogías: se supone que el modelo "se parece" al número entero y, como consecuencia, las reglas de funcionamiento del modelo, supuestamente familiares al alumno, pueden extenderse al sistema de los números enteros[6]. Ahora bien, los objetos que componen esos modelos concretos, o bien son magnitudes orientadas o relativas que se neutralizan, o bien son desplazamientos o posiciones en uno u otro sentido de recorrido. Por consiguiente, las propuestas de enseñanza de los números negativos basadas en modelos concretos, aun cuando pueden ser adecuadas para franquear el primer obstáculo epistemológico, refuerzan a cambio el segundo obstáculo epistemológico, precisamente, aquel que fue necesario superar para construir el concepto actual de número negativo.

Pero además, históricamente la negatividad surge en el contexto del álgebra y son las necesidades del cálculo algebraico las que determinan las reglas de manejo de los números con signo. De manera que en las distintas concepciones históricas sobre la negatividad no son los aspectos semánticos los que determinan la sintaxis de dichos números con signo, sino las exigencias de las técnicas de cálculo algebraico. Sin embargo, en la enseñanza actual los números enteros se introducen en un contexto aritmético, tanto en las situaciones que presenta como en las técnicas que utiliza para resolverlas, contexto en el que no son necesarios como estrategia de resolución. En consecuencia, el establecimiento de sus reglas de cálculo queda totalmente a merced del modelo concreto que se utilice para introducirlos, y este tratamiento didáctico contribuye todavía más a agravar el obstáculo epistemológico.

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1990), 'Epistémologie et didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique J. Vrin, París, 1986.

BROUSSEAU, G. (1980), 'Problèmes de l'enseignement des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.

BROUSSEAU, G. (1981), 'Problèmes de didactique des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983), 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1988), 'Les obstacles épistémologiques dans la conception des decimaux', *manuscrito.*

[6] Esta forma de entender la relación entre un sistema y su modelo en términos de "parecido", es decir, el modelo "representa" o es "una imagen" del sistema que modeliza, ha sido descrita por Chevallard (1992) quien la designa con el término de 'ilusión representacionalista'.

BROUSSEAU, G. (1989a), 'Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

BROUSSEAU, G. (1989b), 'Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 277-285.

CHEVALLARD, Y. (1992), 'Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985), 'Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hierarchie de conceptions a propos des relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(2/3), 133-192.

DUROUX, A. (1982), *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*, memoria de DEA, Publications de l'IREM, Burdeos.

GALLARDO, A. (1996), 'Qualitative analysis in the study of negative numbers', *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 2, 377-384.

GASCON, J. (1993), 'Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), pp. 295-332.

GLAESER, G. (1981), 'Epistémologie des nombres relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

GOBIN, C. et al. (Groupe 1er cycle) (1996), *Les nombres relatifs au collège*, IREM de Poitiers.

IRIARTE, M.D., JIMENO, M. y VARGAS-MACHUCA, I. (1991), 'Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros', *Suma*, 7, 13-18.

LÉONARD, F. y SACKUR, C. (1990), 'Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 205-240.

LIZCANO, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática*, Editorial Gedisa, Barcelona.

PELED, I. (1991), 'Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability', *Proceedings of the 15th International Conference of PME*, Assisi (Italia), 145-152.

SCHUBRING, G. (1986), 'Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs', *Petit x*, 12, 5-32.

SCHUBRING, G. (1988), 'Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845'. En C. Laborde (ed.), *Actes du premier Colloque Franco-allemand de*

Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, 137-145.

SIERPINSKA, A. (1989), 'Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 130-147.