EL GRÁFICO CARTESIANO DE FUNCIONES COMO "MEDIO" MATERIAL: EL PASO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA A LA ANALÍTICA, CON ESPECIAL INTERÉS EN EL PROBLEMA DE LAS ESCALAS

Eduardo Lacasta Zabalza
Departamento de Matemática e Informática. Universidad Pública de Navarra <elacasta@unavarra.es>.

Miguel Rodríguez Wilhelmi
Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Piura (Perú) <mwilhelm@udep.edu.pe>.

RESUMEN

La teoría de situaciones didácticas postula que el aprendizaje se obtiene por enfrentamiento a un "medio". La estructuración del "medio" didáctico precisa de un nivel objetivo. El gráfico cartesiano de funciones (GCF) cumple en ocasiones la función de "medio" material en este nivel. El uso correcto del GCF implica la capacidad de tránsito entre los distintos "medios" materiales a que da lugar éste. Las escalas juegan entonces un papel central. Más aún, ¿qué dificultades pueden ser asociadas a las elecciones de escala en el tránsito de las representaciones gráficas a las representaciones analíticas de una función?¿Qué errores de uso del GCF por parte de los estudiantes se pueden asociar a estas elecciones?

ABSTRACT

Theory of didactical situations postulates that learning occurs by confrontation to a "milieu". The structuring of this didactical "milieu" needs an objective level. Sometimes the cartesian graph of functions (CGF) acts as the material "milieu" in this level. The correct use of the GCF implies the ability to transition between the different material "milieux" created by it. Scales play then a central role. Even more, what difficulties to transition of graphical representation to analitical representation of a function can be associated to chooses of scales? What mistakes in the use of the GCF by students can be associated to these selections?

1. INTRODUCCIÓN: APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN A UN "MEDIO"

La influencia de la Escuela de Ginebra en los desarrollos teóricos tanto del enfoque cognitivo de la Educación Matemática como del epistemológico es notoria. La idea de base presente de una u otra forma en ambos enfoques se puede describir, brevemente, por la existencia de un equilibrio inicial, un desequilibrio y un equilibrio ulterior. La didáctica fundamental (enfoque epistemológico) matiza de forma esencial los conceptos de asimilación y acomodación tal como los definió Piaget. Piaget estudia los procesos psicológicos de un individuo ideal (*sujeto epistemológico*) que tienen lugar en las transiciones de un objeto (concepto o procedimiento) matemático a otro. La didáctica fundamental estudia las "evoluciones" de un individuo gestionando un saber matemático concreto en un "medio" específico, de forma que estas evoluciones son irreductibles al comportamiento psicológico del sujeto. De hecho, tal como lo señala Guy Brousseau (1998, pp.58-60): *La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des "problèmes" qu'il lui propose […] Une telle situation est appelée situation adidactique. Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des)*

situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale.

Por otro lado, la didáctica fundamental ha postulado la necesidad de *modelización del saber matemático a enseñar*. El instrumento de modelización clave utilizado en la teoría de situaciones es el juego. La realidad (didáctica) y el juego formal como modelo generan unas relaciones, pero no son éstas por sí solas las que pueden explicar todo el funcionamiento didáctico, observándose (Brousseau, 1998) que la necesidad de introducir un "medio" en el juego didáctico del alumno responde a una necesidad interna del sistema y no es el fruto de una reconstrucción del sistema, ni de ninguna observación. De esta forma, se postula que todo conocimiento está íntimamente relacionado a una o unas situaciones. De hecho, se describe un conocimiento en términos de una situación.

2. EL "MEDIO" MATERIAL GCF

2.1 Situación fundamental - Situación adidáctica - Situación con una dimensión adidáctica

La hipótesis fuerte de la teoría de situaciones didácticas asegura la posibilidad de hacer emerger cualquier nuevo conocimiento como la forma *óptima* de resolver un problema, sin explicitar en ningún caso el *saber en juego* de la situación propuesta. Sin embargo, el problema de encontrar situaciones fundamentales de las nociones propias del análisis matemático sigue abierto: no se han encontrado situaciones que contengan un "medio" suficientemente resistente que soporte las necesarias *retroacciones* para la emergencia del saber. En ausencia de tales situaciones, I. Bloch (1999) propone que es posible considerar situaciones que posean *una dimensión a-didáctica para el alumno*, es decir, que contengan un "medio" que permita la acción de éste y que constituya un soporte eficaz para la construcción del *sentido*.

2.2 El "medio" material GCF; la ilusión de la evidencia

Cuando el profesor prepara su clase, organiza un "medio" que se llama *medio material*. Dilma Fregona (1995) ha estudiado las figuras planas como "medio" en la enseñanza de la geometría. Su estudio teórico muestra como se produce *l'illusion de l'évidence : le professeur "voit" dans l'objet ce qu'il veut enseigner, donc l'élève placé face au "même monde", "voit" la même chose*. Algunos resultados (Lacasta, 1998) constatan este fenómeno cuando el "medio material" es el GCF. Dicho de otra forma, se supone que el GCF es un campo común donde el profesor y el alumno "hablan el mismo idioma".

2.3 Tipos de "medio" definidos a partir del "medio material" GCF

Siguiendo el modelo de estructuración del "medio" de Brousseau (1998, p.326-327), el profesor prepara su clase con el "medio material" GCF, pero él debe prever también las interacciones del sujeto con este "medio". En este momento, el sujeto "se convierte" en un sujeto simbólico: el *actor objetivo*. Esta pareja "medio"-actor constituye la situación objetiva que es efectivamente presentada al alumno, con la cual debe interactuar. Constituye –para el alumno– el "medio" adidáctico de salida, organizado por el profesor en torno al saber en juego (figura 1).

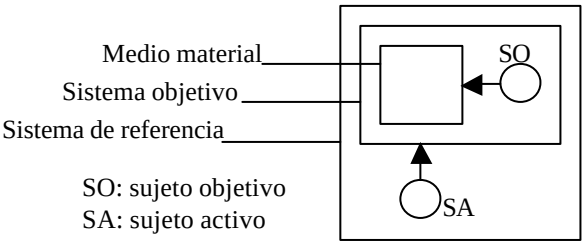

figura 1 (Brousseau, 1998)

A nivel de este "medio objetivo", los funcionamientos del GCF se constituyen en "medios" diversos, que el profesor tendrá que dominar, puesto que él determina implícitamente las dificultades que provocan las interacciones diferentes. Las investigaciones de Lacasta (1995, 1998) y Chauvat (1999) abordan el problema de caracterizar estos "medios" objetivos según los tipos de relación con el GCF permitidos (*efectivos o ficticios, opacos o transparentes*), según el soporte gráfico necesario, su utilidad y sus limitaciones. Cinco "medios" materiales, no necesariamente disjuntos, han sido identificados: nomograma, ilustrador topológico, ideograma, operador, gráfico estructurado matemáticamente (ver anexo, tabla 1).

G. Chauvat (1999) plantea la necesidad de una investigación que tenga por fin una ingeniería[1] que integre de manera razonada los distintos medios GCF. Este planteamiento exige un tratamiento específico del GCF como objeto de saber, no como mera representación (de las funciones), tal y como la organización matemática escolar lo concibe. Un ejemplo notable de esta perspectiva son los trabajos de P. Alson (1996): contrariamente al método seguido en la mayor parte de los cursos de cálculo, en *Métodos de graficación* la tarea principal del alumno consiste en hacer interpretaciones analíticas de los objetos gráficos.

3. METODOLOGÍA

3.1 Participantes

Estudiantes del curso Introducción al cálculo, primer ciclo de la Especialidad de Matemáticas y Física para secundaria de Ciencias de la Educación, Universidad de Piura, Perú.

Las peculiares características de la educación peruana hace que los estudiantes que ingresan a la universidad[2] tengan una formación matemática que se circunscribe, en esencia a: aritmética, álgebra, geometría plana y trigonometría. Por lo tanto, la noción de función (y su representación gráfica) podemos calificarla de "novedosa".

La citada especialidad de Matemáticas y Física, tiene un ingreso de unos 20 estudiantes. Con tres grupos distintos hemos trabajado en los tres últimos años, obteniendo resultados equiparables.

3.2 El problema

En el curso de Introducción al cálculo los estudiantes realizan tareas (en general, no algorítmicas) en el marco gráfico, de forma que aprenden a **describir**[3] y **construir**[4] curvas[5]

---

[1] Ingeniería didáctica: Realización de situaciones de enseñanza que responden a características definidas de antemano en el cuadro de la teoría. Más en concreto, la construcción de una ingeniería didáctica consiste en producir situaciones o medios de enseñanza que responden a problemas técnicos predeterminados, ayudándose de procedimientos repertorizados, en los que los efectos se prevén o se calculan en función de conocimientos científicos precisos.

[2] Los planes de estudio peruanos contemplan que la edad estimada de ingreso a la universidad es de 16 años.

[3] Describir una curva supone dar sus características principales: alturas de puntos representativos, puntos con una altura determinada, cortes con los ejes, conexión, suavidad, partes positiva y negativa, dominio y rango, limitación, partes crecientes y decrecientes, extremos absolutos y relativos, cotas en intervalos.

[4] La construcción de curvas incluye sistemas de codificación convenidos para curvas; por ejemplo: curvas con dominio o rango no acotados, o bien definidos por intervalos abiertos acotados.

[5] Curvas: gráficas de funciones. La noción de función no se ha introducido y no resulta natural hablar de "gráficas de …". Notar, además, que, por tratarse de objetos físicos, se habla de conexión y no de continuidad, por ejemplo.

(verificando ciertas propiedades) y a **operar**[6] con ellas, siempre en el marco gráfico. Este trabajo suele ser suficiente para que los alumnos tengan un tránsito *flexible* por los distintos medios GCF.

En una segunda etapa, se formaliza la relación *curva – fórmula*, que posibilita el paso del marco gráfico al marco analítico, por medio de las *teclas* de la calculadora científica, definiéndose un *alfabeto gráfico*[7].

La cuestión de fondo es el paso de la representación gráfica a la analítica de una función. En primera instancia, sin embargo, nuestra observación se ha limitado al problema microscópico de las dificultades que provienen del cambio de escala. El problema didáctico-matemático subyacente es, en pocas palabras: *el cambio de relación entre las escalas de los ejes cambia el ideograma*. La elección del rango de valores de las abscisas y ordenadas, así como las escalas utilizadas, tienen en la mayoría de los casos por fin un uso como ideograma del GCF. ¿Qué problemas pueden ser asociados al cambio de escala en el paso de la representación gráfica a la analítica de una función? En concreto, la determinación del *alfabeto gráfico* está regida por una conveniente (y no convenida) elección de los valores que van a introducirse en la calculadora y de un plano cartesiano escogido *ad hoc*, ¿qué problemas puede suscitar éstas elecciones?

3.3 Procedimiento y análisis de la muestra

Los estudiantes reciben una "ficha de trabajo" donde deben construir curvas y reflexionar sobre la actividad que realizan, contestando preguntas no cerradas. Las tareas que deben realizar son rutinarias (dentro de la organización matemática específica desarrollada), de forma que lo realmente problemático sea razonar una respuesta coherente a las preguntas que se formulan (ver anexo, ficha de trabajo 1).

Las peculiares características de la muestra y del formato variado de las preguntas (no responden al modelo "test objetivo de respuesta múltiple") impone un *estudio de casos*, que puede abordarse con un estudio no paramétrico y análisis implicativo. De esta forma, como lo señala R. Gras (1992), admitimos una ruptura con la estadística inferencial y descriptiva clásica[8].

4. ALGUNAS OBSERVACIONES

En los tres últimos años, se ha constatado las dificultades que los estudiantes de *Introdución al cálculo* tienen en la descripción y construcción de gráficas de funciones y en el paso de la

---

[6] Obtención de la curva suma, producto, cociente, opuesta o valor absoluto de una dada; también, compuesta de la forma $f((\ ) - c)$, a partir de la curva f.

[7] La noción de *alfabeto gráfico* es prestada de la ingeniría propuesta por P. Alson (1996). Se introducen las funciones elementales (identidad, cambio de signo, inversa numérica, …) de forma "algorítmica": con el uso de la calculadora se contruyen tablas numéricas de valores que permiten representar un conjunto de puntos en el plano, unirlos con trazos sencillos y obtener de esta manera una representación de la función. En analogía con las letras del alfabeto, que sirven para hacer palabras, se piensa en las gráficas así obtenidas como un alfabeto gráfico, que sirve para construir gráficas de funciones dadas por fórmulas más complejas.

[8] El programa cognitivo ha heredado un positivismo que podríamos calificar de "no matizado": la inferencia estadística genera, a nuestro entender, una la ilusión de la transferencia de resultados de unos grupos humanos a otros, "siempre que la muestra sea representativa", desatendiendo criterios de *ecología del saber*. Un tal trabajo, por fuerza, permanece al margen de los matices que jalonan las transiciones cognitivas de los sujetos y que no pueden si no explicarse dentro de un contexto preciso por las relaciones que se establecen.

representación gráfica a la analítica. Algunas patologías se han detectado, como por ejemplo: si se pide representar las curvas del alfabeto gráfico (apartado 3.2) después justo de su construcción (sin realizar, por lo tanto, ningún ejercicio) en planos "no convenientes", los estudiantes encuentran la representación "problemática", solicitando, en la mayoría de los casos, modificar las escalas dadas, de forma que puedan reproducir el ideograma. Por lo tanto, se impone proponer ejercicios a los estudiantes cuyo objetivo es fijar la "imagen" de las curvas del alfabeto gráfico como una dupla *forma-descripción*. Por "forma" entendemos el trazo sobre el plano cartesiano; por "descripción", todas las propiedades asociadas a aquel. Esta tarea, empero, no es fácil. De hecho, los modelos "en acto" que aplican los estudiantes son persistentes, no siendo suficiente la "clase magistral" para su erradicación. Los tres modelos detectados, en esencia distintos, son:

a. **Modelo absoluto**: La curva como ideograma de una fórmula.

b. **Modelo relativo**: La curva como dupla forma-descripción; se admite implícitamente, por lo tanto, que el ideograma define toda una clase de gráficas de funciones.

c. **Modelo mixto o funcional**: Una curva es una representación de una fórmula. Como objeto es una dupla; como representación, un ideograma. La noción de fondo que sobresale es la de función, que posibilita una interacción eficaz con el medio GCF.

El modelo relativo (b) es el institucionalmente aceptado. De hecho, se asimila la representación gráfica de una función al trazo y se "entiende" que la interpretación se obtiene por "visión" de la dupla trazo-plano cartesiano (eventualmente por la dupla trazo-fórmula, trazo-tabla). El trazo aislado define toda una clase de funciones, de forma que el "fondo" (contenido) de la representación no es ya una función concreta.

Chauvat (1999) define la noción de "gráficos geométricamente equivalentes": *s'ils se déduisent l'un de l'autre par un changement de repère élémentaire: changements éventuels d'origine et/ou de graduations*. La equivalencia geométrica de dos gráficos no implica que éstos generen el mismo ideograma si el modelo subyacente es el absoluto, esto es, dos gráficos geométricamente equivalentes generan dos ideogramas diferentes, que se asocian a dos funciones distintas.

A continuación mostraremos un ejemplo para ilustrar este extremo. Situaciones similares se han observado en diferentes prácticas (calificadas y dirigidas), en distintas fases del proceso de estudio. Los estudiantes que han cometido los errores no son simpre los mismos, pero sí todos ellos han sido asociados con el modelo (a). En total, aproximadamente el 30% de los estudiantes ha incurrido en errores del tipo del que se describirá a continuación (donde las funciones trigonométricas se combinan con funciones polinómicas o racionales).

La situación que mostramos nos parece especialmente significativa porque ha hecho emerger dos comportamientos esencialemente distintos que pueden ser asociados al modelo (a). Se pidió: "Represente en el plano 1 de la figura 2 la curva asociada a la fórmula $f(x) = \sin(x) - x$. Para ello, represente la curvas $y = \sin(x)$ e $y = -x$ y súmelas gráficamente. Represente, **por prolongación**, **sin realizar ninguna operación gráfica**, la curva $f(x) = \sin(x) - x$ en el plano 2 de la misma figura". Los dos comportamientos, que el análisis de los cuestionarios nominales permite distinguir son:

1.- La representación en el plano 1 se ve como el ideograma de una función cúbica $y = ax^3$, $a < 0$. De esta forma, la extrapolación en el plano 2 es incorrecta (figura 2).

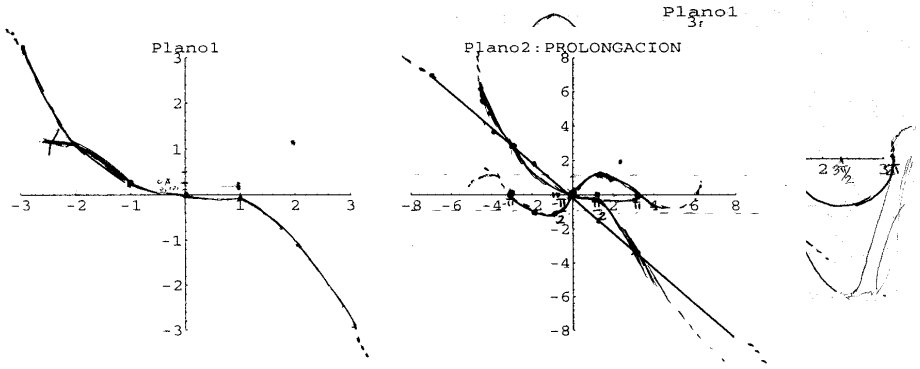

Figura 2

2.- El ideograma de la función seno "impone un comportamiento oscilatorio *que ha de verse*": se asocian, en el mismo plano cartesiano, diferentes escalas para representar la función seno y la función identidad, de forma que se reproduzcan los ideogramas de ambas funciones (figura 3).

Ésta y otras observaciones, que no detallaremos ahora, obtenidas todas ellas en cuestionarios nominales, nos han permitido enunciar unas hipótesis que se desean validar.

5. HIPÓTESIS

Brevemente, la *ostensión* supone la presentación de un objeto que designa la clase de objetos a la que pertenece. En anteriores investigaciones (Lacasta, 1995) hemos analizado la relación de los profesores con los procedimientos ostensivos. La *ostensión gráfica* (mostrar un gráfico es equivalente a una definición o una demostración) la entendemos ahora, de manera restringida, como *ostensión ideogramática*.

Hipótesis 1. El recurso ideogramático del gráfico de funciones genera la ilusión de la *evidencia de comunicación* de la idea representada. En otras palabras, se acepta que la *presentación* de un ideograma equivale a *conocer* la función asociada. El modelo absoluto asociado (que es persistente) genera patologías que se detectan por distintos modos de proceder.

Simplificando, matemáticamente, dada una función numérica f por la regla $y=f(x)$ se define su gráfico geométrico referido a un sistema de referencia R (y, por lo tanto, el conjunto de gráficos geométricos equivalentes). En la representación gráfica de funciones, por lo tanto, es preciso escoger el rango de valores, la unidad de medida de un eje y la relación de ésta con la del otro eje. Las escalas juegan entonces un papel fundamental. En las prácticas usuales, se tiende a representar gráficamente las funciones en planos cartesianos cuya relación entre las escalas es 1:1[9], lo cual condiciona el uso del "medio" material GCF: en particular, el uso como ábaco, la construcción de gráficas que combinen funciones trigonométricas con polinómicas o racionales, la interpretación de problemas que "exigen" una relación desigual entre las

[9] Además, con mucha frecuencia "las señales guía" en los ejes son números enteros.

escalas[10], etc. Además se genera la ilusión de una asignación biunívoca entre una función y una representación gráfica de ella.

Hipótesis 2. El uso sistemático de las escalas 1:1 dificulta la descripción y construcción de gráficas de funciones, así como la resolución de problemas cuya interpretación precisa de una relación desigual entre las escalas.

6. RESULTADOS

En esta sección, se van a comentar resultados referidos a un cuestionario pasado en el curso académico 2001, y que son, como ya se ha dicho, equiparables con los observados en los distintos grupos de trabajo a lo largo de los últimos años. Para el análisis de las repuestas dadas por los alumnos se ha utilizado el análisis implicativo, utilizando el software CHIC (versión 0.6). Como en anteriores oportunidades, los comportamientos óptimos están relacionados con los modelos "en acto" (Vergnaud, 1990) *relativo* y *funcional* identificados en los estudiantes. El árbol jerárquico permite afirmar que existe una relación "fuerte" (niveles de cohesión en torno al 80%, nudos significativos) entre las variables asociadas a las modelos relativo y funcional y aquellas que se asocian a la correcta construcción de las gráficas[11]. Resultados similares arrojan los análisis implicativo e inclusivo.

A continuación se va a hacer una breve exposión de los resultados obtenidos, restringiendo nuestra descripción a las preguntas de la ficha de trabajo 1 (ver anexo). El modelo absoluto, genera un comportamiento que aparece de forma sistemática en la representación de la exponencial en los distintos planos (pregunta 1). Ese comportamiento obedece a un conocimiento que puede describirse en los siguientes términos: "la curva exponecial en 0 tiene altura 1 y con números mayores que uno crece muy rápido y con valores menores tiende a cero y, por lo tanto, esto *debe verse*". De esta forma, la representación del plano primero (ideograma), condiciona las representaciones que se hacen en los otros planos (figura 4).

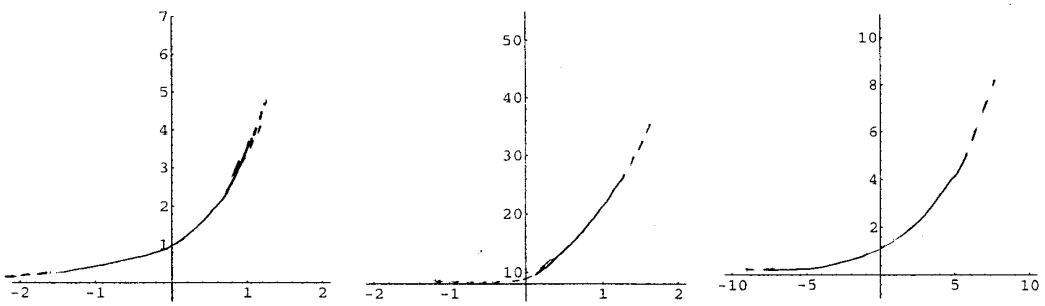

figura 4

Además, siempre se observan resultados extremos en los que los estudiantes rechazan abiertamente la representación en el plano central (figura 5). En cualquier caso, la entrevista posterior permite afirmar que estos alumnos entienden la representación del ideograma como la respuesta al problema, entendiendo, en sentido peyorativo, las otras representaciones como deformaciones de aquella. En este sentido, respuestas como las que se pueden observar en la

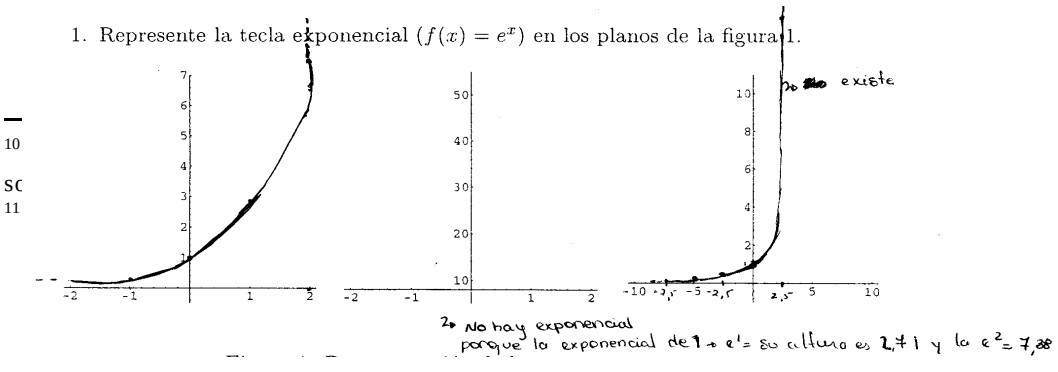

figura 5, permiten hablar de “bloqueo”, porque los estudiantes consideraron que a una fórmula le corresponde una sola representación gráfica (el ideograma, por supuesto)[12].

Paradójicamente, la mayoría de estudiantes que responden que “no” hay una representación de la exponencial “mejor”, manifiestan un modelo absoluto, asociado a la interacción propia del medio ideogramático. La justificación que exponen se resume en términos de unicidad de la fórmula representada y de un uso —directo— como nomograma del “medio” GCF: *para cada x existe una única altura* e^x. Por otro lado, los estudiantes que eligen con preferencia la representación de la exponencial en el primer plano, *puesto que el plano presenta unas escalas más proporcionales entre x e y*. Sólo algunos estudiantes escogen la representación 3, puesto que *se ven mejor las características de la curva* $y = e^x$*: en 0 la altura es 1 y para* $x>0$ *crece muy deprisa y para* $x<0$ *tiende a cero muy deprisa*. La representación segunda no es considerada por ningún estudiante.

Por otro lado, los errores detectados en el ejercicio 2 (ficha de trabajo 1), cálculo de la ecuación que determina la parábola, son simpre cometidos por los individuos identificados con el modelo absoluto. El error más común consiste en asociar a las tres curvas una fórmula de la forma $f(x)=ax^2$ ($a>0$), más no se cumple que el parámetro a sea próximo a 1 (figura 6(b)). Es más, como se puede observar en dicha figura, los coeficientes asociados refieren un *encogimiento – estiramiento* de la parábola $y = x^2$. Por otro lado, gran parte de estos estudiantes, respondieron a la pregunta 2(b) del cuestionario (*¿puede concluir “algo” en relación con la asociación de una fórmula a una curva?*) en términos de “dificultad” del uso como ábaco de estas gráficas. Los resultados más dispares, también los cometen estudiantes pertenecientes al grupo identificado con el modelo absoluto. Un ejemplo, puede verse en la figura 6(c).

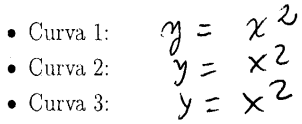

Figura 6 (a)

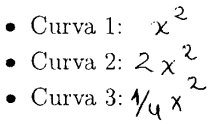

Figura 6 (b)

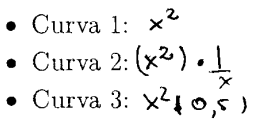

Figura 6 (c)

La gran mayoría de los estudiantes que contestaron correctamente a la pregunta 2 asociadoron la fórmula $y = x^2$ a las tres curvas[13] (figura 6(a)): ¿qué influencia tiene el uso constante de coeficientes enteros en la enseñanza en esta determinación?, ¿qué influencia tiene la estructura del cuestionario, el sentido que van adquiriendo los estudiantes de su objetivo “no rutinario”?, ¿qué influencia tiene el uso del alfabeto gráfico? Por otra parte, estos estudiantes contestaron en términos de “dependencia de la forma de la curva al plano en el que se representa”.

7. AMPLIACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

[12] De hecho, para muchos estudiantes, la expresión *f(x)* es un nombre que designa una determinada curva, no una representación de la función *f*. Más aún, en nuchos casos, como la afirma A. Sierpinska (1992), la idea de correspondencia (a cada *x* le corresponde una y justamente una *y*) desaparece.

[13] Todos los estudiantes asociaron a la primera curva la fórmula $y = x^2$. Este hecho se explica, en primera instancia, por el conocimiento qu tienen los estudiantes del alfabeto gráfico (al cual pertenece la gráfica de la función cuadrática dada) y, en última instancia, porque la determinación no es problemática para ninguno de los modelos implícitos: “hay proporcionalidad entre las escalas de los ejes y se obtiene el ideograma de la función $y = x^2$”.

Como se ha especificado en la sección 3.2, la cuestión de fondo es el paso de la representación gráfica a la analítica de una función[14]. Hasta el momento hemos descrito cómo esta actividad está influenciada por las escalas y los modelos operativos que los alumnos han construido en torno a ellas: ¿qué implicaciones tienen otras transformaciones elementales, tales como traslaciones horizontales y verticales de las gráficas, el producto por un escalar o la gráfica opuesta de una dada[15], en el paso de la representación gráfica a la analítica de una función? ¿Son los estudiantes conscientes de estas transformaciones? ¿Son capaces de construir la gráfica de una función por transformaciones "elementales" de la de una función conocida dada?

7.1 Uso de las calculadoras gráficas TI-81

Se ha organizado una situación, con esquema de juego, con las calculadoras gráficas TI-81, cuya actividad es el paso de la representación gráfica a la analítica y viceversa.

1. **El juego**: Se da una lista de enunciados para representar gráficas de curvas verificando ciertas condiciones. El primer paso es construir, sobre una hoja, una gráfica que cumpla con TODAS las propiedades dadas. El segundo, obtener dicha gráfica en la pantalla de la calculadora, manipulando las teclas convenientemente.

2. **Fases del juego**:

   a. **Explicación del procedimiento**: El profesor explica la mecánica del juego, utilizando la calculadora TI-81 retroproyectable.

   b. **Individual**: Los alumnos reciben un listado de curvas y tienen unos 30 minutos para familiarizarse con el proceso. Los alumnos introducen datos en la calculadora, manipulando las teclas "Y="[16] y "RANGE"[17], pulsan la tecla "GRAPH"[18] y comprueban si la curva obtenida es la deseada (eventualmente utilizando la tecla "TRACE"[19]). Si la curva no es la deseada, modifican algunos de los datos y repiten el proceso.

   c. **Por parejas**: En la fase anterior, los alumnos han tenido la oportunidad de manipular la calculadora, familiarizarse con el procedimiento y comprender cuáles son sus responsabilidades. En esta fase, juegan dos. Uno de ellos construye la curva:

---

[14] De hecho, se puede enmarcar dentro de un problema más amplio que se ha denominado en la literatura didáctica como "traducciones entre los diferentes modos de representación de las funciones" (Janvier, 1983), "juego de marcos" (Douady, 1986) o "cambio de registro semiótico" (Duval, 1994).

[15] La pregunta podía haberse formulado en términos de transformaciones geométricas "elementales" (homotecias, inversiones y traslaciones, fundamentalmente). De hecho, la mayoría de las transformaciones geométricas que operan en el marco gráfico quedan unificadas, por la geometría proyectiva, por el concepto de *homología*. Sin embargo, estas descripciones no nos parecen aquí adecuadas, puesto que "enmascaran" las relaciones con el marco analítico, que condicionan el paso de la representación gráfica a la analítica. Por ejemplo, de forma natural los estudiantes distinguen entre las traslaciones horizonatales (asociadas a la composición de funciones) y las verticales (asociadas a la suma de funciones constantes). Por ello, a este nivel, nos parece especialmente interesante, que la denominación de las transformaciones que "movilizan" las gráficas en el marco geométrico, esté ligada a las operaciones analíticas con las funciones asociadas.

[16] Fórmula asociada a la función.

[17] Rango de valores de ambos ejes.

[18] Permite visualizar la gráfica de la función (siempre que no se haya cometido ningún error en la introducción de datos).

[19] Un punto móvil sobre la gráfica de la función da simultáneamente los valores x y $f(x)$. La tecla "TRACE", por lo tanto, supone un uso como nomograma o ábaco de la gráfica de la función.

jugador-creador (JC). El otro jugador actúa de supervisor: *jugador-fiscal (JF)*. El JC introduce los datos que considera convenientes y pulsa la tecla "GRAPH", entonces el JF acepta o rechaza la gráfica. Según las tareas sean aceptadas (no necesariamente correctas) o rechazadas (no necesariamente incorrectas), los jugadores consiguen puntos, según criterios preestablecidos. De esta forma, es preciso anticipar la representación, para ganar el juego: el JC tiene 2 minutos máximo para pensar (sin pulsar la tecla "GRAPH"), mientras el otro jugador piensa, con una calculadora, cuál sería su respuesta. El juego se prolonga así durante 20 minutos.

d. **Por equipos**: Se forman dos equipos. Un componente de cada equipo sale a competir (escogido al azar, como en el juego del pañuelo, por ejemplo) y representará al equipo: su éxito o fracaso repercutirá en el de todo el equipo[20]. Por ello, se impone que todos los componentes diseñen estrategias comprensibles para todos ellos, no sólo para los "líderes". En concreto, se explicitan algunas de las transformaciones de las gráficas del alfabeto gráfico. Duración: 30 minutos.

e. **Descubrimiento**: El profesor pide a los alumnos que enuncien sus estrategias y las pongan a prueba. Los alumnos enuncian los descubrimientos que han hecho, los escriben en la pizarra y los ejecutan en la calculadora retroproyectable. Alternativamente, los equipos proponen sus reglas "ganadoras": transformaciones que realizan para la obtención de una curva a partir de otra. El otro equipo intenta refutarlas, en tal caso se anota 3 puntos y la regla queda anulada. Si la regla "funciona", entonces el equipo que la ha propuesto se anota un punto y la regla se mantiene. La evolución de las puntuaciones se sigue en una tabla. Cuando se "agoten" las propuestas. Se reanuda el juego, ello contribuye a poner a prueba los enunciados admitidos y a la proposición de unos nuevos.

7.2 Algunos resultados

El juego se ha realizado, hasta la fecha, una sola vez. Los datos arrojados son, por lo tanto, provisionales. Quedan abiertas, en particular, cuestiones de *viabilidad* (reproductibilidad de la situación) y *pertinencia* (¿bajo qué condiciones de contrato pedagógico y didáctico es útil la situación?). Sin embargo, los resultados, que brevemente expondremos, nos parecen relevantes porque se ajustan a los previstos de antemano.

Las observaciones que siguen se fundan en un cuestionario pasado dos semanas después de la situación del "juego" y cuya tarea consiste en la obtención, a partir de una curva del alfabeto gráfico, de otra curva por "transformaciones elementales". La consigna dada a los alumnos explicita que *se debe representar la curva del plano anterior "modificada" por una sola transformación (empezando por una curva dada)*. Además aparece un número sobre abundante de planos, de tal forma que los alumnos deban decir no sólo *qué* transformaciones utilizan, sino también *cuántas*.

Las transformaciones que se espera identifiquen, utilicen, relacionen con el marco analítico y nombren los estudiantes son:

Nombre	Descripción en el marco	Descripción en el marco	Representant

[20] El contrato pedagógico (normativo) es claro: mientras dos compañeros están en la pizarra, el resto guarda silencio, pueden hacerse anotaciones, pero no discutirlas ni comentarlas.

	gráfico	analítico	e algebraico
Traslación vertical	Subir-bajar la gráfica, una altura c	Suma de una función constante c	$T_1 = f(\ ) + c$
Traslación horizontal	Izquierda – derecha la gráfica, una distancia c	Composición con una función de la forma $f(\ )= (\ ) - c$	$T_2 = f(\ (\ ) - c)$
Simetría de eje OX	Gráfica opuesta a la dada	Producto por la función constante $c = -1$	$T_3 = (-1)\, f(\ )$
Homotecia de razón $c > 0$ y dirección OY	Comprensión – dilatación de constante $c > 0$	Producto por una función constante $c > 0$	$T_4 = c\, f(\ )$

De esta forma, grosso modo, los resultados observados son:

1. Los estudiantes denominan las transformaciones indistintamente por *qué hacen con las gráficas* o por la *relación que éstas tienen con el marco analítico*, mezclándose, en muchos casos, ambos puntos de vista en descripciones dadas por un mismo alumno.

2. Un grupo significativo de estudiantes (30%) desatiende la *no conmutatividad* de las transformaciones: aplican T_1 antes que T_3 ó T_4. De hecho, aplican estas últimas transformaciones "sólo donde hay x". Del lado de los estudiantes, ¿el modelo de función como "variación" exige la existencia de "letras"? ¿La manipulación de las gráficas mediante transformaciones en el marco gráfico muestra obstáculos propios del álgebra elemental?

3. En muchos casos (40%) las transformaciones T_3 y T_4 se asimilan como una sóla: *producto por una constante*. Desde el punto de vista matemático esta apreciación es *consistente*, sin embargo, dificulta la ejecución de tareas en el marco geométrico.

4. El manejo de las funciones discontinuas (funciones racionales, por ejemplo) revela que muchos estudiantes (más del 60%) interpretan cada trozo como representante de una función distinta: una misma transformación opera de forma diferente según el trozo de gráfica que se esté considerando; por ejemplo, si la parte de la gráfica es positiva o negativa.

5. La manipulación algebraica correcta de una función no implica la interpretación adecuada de las transformaciones geométricas adecuadas.

8. CONCLUSIONES

- Las escalas se convierten en una *variable didáctica* porque afectan a la jerarquía de las estrategias de resolución y el profesor las puede manipular (fijar o cambiar).

- La *ostensión ideogramática* está en la génesis de la ilusión de la *evidencia de comunicación* de la idea (función) representada.

- Dos gráficos geométricamente equivalentes pueden generar dos ideogramas distintos y, por lo tanto, dos funciones distintas.

- El aprendizaje del "medio" material GCF debe fundarse sobre un modelo relativo. Para ello, se tendrán que proponer situaciones diversas donde el respeto de la escala esté en la base del contrato didáctico.

9. CUESTIONES ABIERTAS

- El uso de las graficadoras modifica el funcionamiento del GCF: ¿cómo se manifiestan los "medios" a que da lugar el GCF? La modificación del medio material objetivo necesita de precisiones teóricas del propio concepto de "medio".

- Según el *pensamiento matemático avanzado* (Tall, 1991) a toda noción matemática se le asocian dos subestructuras: *concept image* (imágenes mentales asociadas a la noción; no necesariamente visuales, aunque éstas ocupan un lugar privilegiado) y *concept definition* (definiciones matemáticas de la noción). El concept-image incluye las representaciones erróneas de la noción (*misconceptions*). ¿Qué concepciones erróneas de la noción de función pueden ser asociadas al uso ideogramático del GCF? ¿Cuáles de ellas se constituyen en *obstáculos*[21]? ¿Cuáles pueden ser catalogados de *obstáculos didácticos*[22]?

- La situación propuesta para "rutinizar" la actividad de paso de la representación gráfica a la analítica, con el uso de las calculadoras gráficas TI-81, necesita matizaciones que aseguren condiciones óptimas para su gestión.

BIBLIOGRAFÍA

ALSON P. (1996), *Métodos de graficación,* Erro, Caracas.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, *RDM,* 19/2, La pensée Sauvage, Grenoble, pp. 135-194.

BOSCH, M. y CHEVALLARD, Y. (1999) La sensibilité de la activité mathématique aux ostensifs. *RDM*, 19/1, La pensée Sauvage, Grenoble, pp.77-124.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des situations didactiques,* La Pensée sauvage, Grenoble.

CHAUVAT, G. (1999), Courbes et fonctions au collège, *Petit x,* 51, Grenoble, pp.23-44.

FREGONA, D. (1995), *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques,* Thèse, Université Bordeaux I.

GRAS, R (1992) L´analyse des données: une méthodelogie de traitement de questions de didactique, *RDM*, 12/1, pp.59-72.

KILPATRICK, J. (1994) Vingt ans de didactique francaise depuis les USA, en M. Artigue et al. (eds.) *Vingt ans de didactique de mathématiques en France,* La pensée sauvage, RDM.

LACASTA, E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles.* Thèse. Université Bordeaux I.

LACASTA, E. y PASCUAL, J. R. (1998) *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Síntesis, Madrid.

[21] Una concepción utilizada con cierto éxito en una familia de acciones y que ha permitido hacer algunos avances al sujeto se vuelve un obstáculo, si los conflictos cognitivos se prolongan sin que se logre eliminar el conocimiento falso o si reaparece de manera fortuita y descontrolada. Un obstáculo no es, por tanto, una dificultad o una falta de conocimiento; es más bien una concepción que tiene un campo de éxito y de fracaso y que resiste.

[22] Conocimientos que resultan de decisiones didácticas inadecuadas.

SIERPINSKA, A (1992) Theoretical perspectives for developement of the funtion concept. HAREL, G & DUBINSKI, E. (ed.) *The concept of function: spects of Epistemology and Pedagogy*, MAA 25, Whasington DC, pp.23-58.

TALL, D. (ed.) (1991) *Advanced Mathematical Thincking*, Kluwer, Dordrecht.

VERGNAUD, G. (1990) Théorie des champs conceptuels, *RDM*, 10/2-3, pp.133-170.