

PERSPECTIVA DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO DISCIPLINA TECNOCIENTÍFICA¹

Juan D. Godino

CONTENIDO²:

1. Didáctica de las Matemáticas y Educación Matemática. Relaciones con otras disciplinas.
 2. La Didáctica de la Matemática como disciplina científica.
 3. Principales perspectivas y líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas.
 - 3.1. Teoría y filosofía de la educación matemática.
 - 3.2. Psicología de la educación matemática.
 - 3.3. Resolución de problemas y modelización
 - 3.4. Visiones socioculturales
 - 3.5. El punto de vista sociocrítico
 - 3.6. Perspectivas semióticas
 - 3.7. El interaccionismo simbólico
 - 3.8. Didáctica fundamental de las matemáticas.
 - 3.9. La fenomenología didáctica de Freudenthal
 - 3.10. Otras perspectivas teóricas y líneas de investigación relevantes.
 4. La Didáctica de las Matemáticas como saber científico, tecnológico y técnico.
 - 4.1. Disciplina autónoma, pluridisciplinariedad y transdisciplinariedad
 - 4.2. Conexión teoría-práctica
 5. Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas.
 - 5.1. La perspectiva sistémica
 - 5.2. Concepciones de didáctica de la matemática y problemas de investigación
 - 5.3. El dilema teoría-aplicación en las concepciones de la didáctica
 - 5.4. Paradigmas de investigación
 - 5.5. Elementos para una perspectiva de síntesis
 6. Consolidación de la Didáctica de las Matemáticas.
 - 6.1. Aspectos de la educación matemática
 - 6.2. Consolidación institucional
 - 6.3. Confusión de paradigmas y agendas
 - 6.4. Divorcio teoría-práctica
- Referencias
Anexo: Catálogo de revistas y publicaciones relevantes

Los objetivos de este trabajo son los siguientes: 1) Clarificar la naturaleza de la Didáctica de las Matemáticas y sus relaciones con otras disciplinas; 2) Sintetizar las principales líneas o perspectivas de investigación; 3) Reflexionar sobre las relaciones de la Didáctica de las Matemáticas con la práctica de la enseñanza, la tecnología educativa y el conocimiento científico; 4) Analizar la dependencia de los problemas de investigación respecto de los paradigmas y metodologías de investigación; 5) Reflexionar sobre el estado de actual de consolidación institucional de la Didáctica de las Matemáticas en el panorama internacional. Así mismo, incluimos en anexo un catálogo de

¹ Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Septiembre, 2010. (Disponible en, <http://www.ugr.es/local/jgodino>)

² Este trabajo es una versión revisada y ampliada del capítulo, “Hacia una teoría de la educación matemática” (Godino, 1991).

revistas y publicaciones relevantes que recogen los resultados de las investigaciones en el área de conocimiento.

“Si la epistemología es la teoría del conocimiento, y la epistemología de las matemáticas es la teoría del conocimiento matemático, entonces la epistemología de la educación matemática debe referirse al mismo estudio, pero de las proposiciones de la educación matemática más bien que de las relativas a las matemáticas” (Sierpinska y Lerman, 1996). Nuestro trabajo se orienta en esa dirección: Se trata de reflexionar sobre el área de conocimiento Didáctica de las Matemáticas, a fin de analizar sus fuentes, su naturaleza y cómo se viene desarrollando.

1. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA. RELACIONES CON OTRAS DISCIPLINAS

Interesa, en primer lugar, realizar una clarificación terminológica. El término educación es más amplio que didáctica, por lo que se puede distinguir entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática. Esta es la opción tomada por Rico, Sierra y Castro (2000; p. 352) quienes consideran la educación matemática como “todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas” que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La Didáctica de la Matemática la describen estos autores como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación.

Sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina Didáctica de la Matemática. En este trabajo tomaremos ambas denominaciones como sinónimas. También, las identifica Steiner (1985) para quien la Educación Matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

Steiner (1990) representa mediante el diagrama de la Figura 1 la disciplina Educación Matemática (EM) que está relacionada, formando parte de él, con otro sistema complejo social que llamaremos Sistema de Enseñanza de la Matemática (SEM) - denominado por Steiner "Educación Matemática y Enseñanza" -, representado en el diagrama por el círculo de trazo más grueso exterior a la EM. En dicho sistema se identifican subsistemas componentes como: La propia clase de matemáticas (CM); La formación de profesores (FP); Desarrollo del currículo (DC); La propia Educación Matemática (EM), como una institución que forma parte del SEM; ...

La figura también representa las ciencias referenciales para la Educación Matemática tales como: Matemáticas (M), Epistemología y filosofía de las matemáticas (EFM) - Historia de las matemáticas (HM), Psicología (PS), Sociología (SO), Pedagogía (PE), etc.

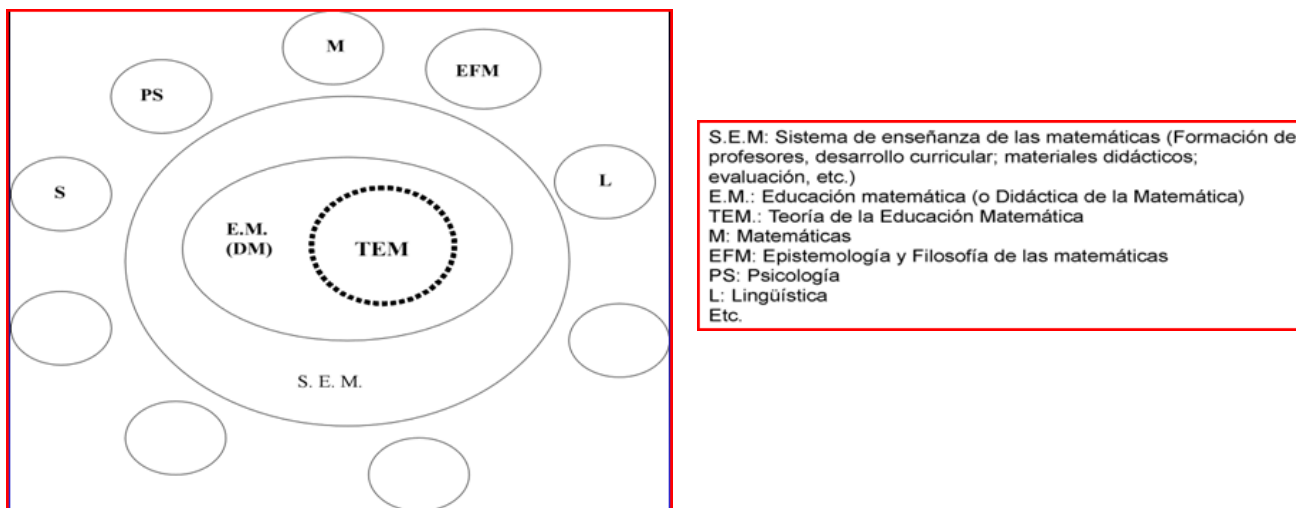


Figura 1: Relaciones de la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas y sistemas (Steiner,1990)

En una nueva corona exterior Steiner sitúa todo el sistema social relacionado con la comunicación de las matemáticas, en el que identifica nuevas áreas de interés para la Educación Matemática, como la problemática del "nuevo aprendizaje en sociedad" (NAS) inducido por el uso de ordenadores como medio de enseñanza de ideas y destrezas matemáticas fuera del contexto escolar. También sitúa en esta esfera las cuestiones derivadas del estudio de las interrelaciones entre la Educación Matemática y la Educación en Ciencias Experimentales (ECE).

La actividad de teorización (TEM) es vista por Steiner como un componente de la Educación Matemática, y por ende del sistema más amplio que hemos denominado SEM que constituye el sistema de enseñanza de las matemáticas. La posición de la TEM debería situarse en un plano exterior ya que debe contemplar y analizar en su totalidad el rico sistema global.

Otro modelo de las relaciones de la Educación Matemática con otras disciplinas es propuesto por Higginson (1980), quien considera a la matemática, psicología, sociología y filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de ésta. Visualiza la Educación Matemática en términos de las interacciones entre los distintos elementos del tetraedro cuyas caras son dichas cuatro disciplinas (Figura 2).

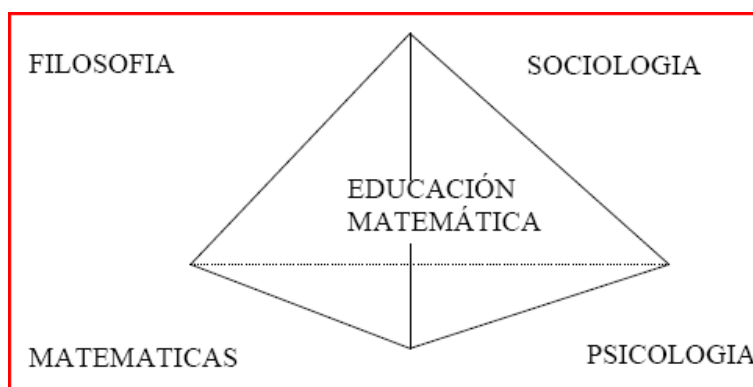


Figura 2: Modelo tetraédrico de Higginson para la Educación Matemática

Estas distintas dimensiones de la Educación Matemática asumen las preguntas básicas que se plantean en nuestro campo: qué enseñar (matemáticas); por qué (filosofía); a quién y donde (sociología); cuándo y cómo (psicología).

En el trabajo citado Higginson describe, asimismo, las aplicaciones del modelo para clarificar aspectos fundamentales como:

- la comprensión de posturas tradicionales sobre la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas;
- la comprensión de las causas que han producido los cambios curriculares en el pasado y la previsión de los cambios futuros;
- el cambio de concepciones sobre la investigación y sobre la preparación de profesores.

2. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

Del estudio de las corrientes epistemológicas se desprende que las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales ni hechos aislados; debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas significativos de investigación y los procedimientos aceptables de plantearlos y resolverlos. Es preciso compaginar la autonomía personal en la elaboración de ideas y conceptos nuevos con la necesidad de que estas ideas sean contrastadas y compartidas. Las teorías son pues frutos o consecuencias de las líneas de investigación sostenidas por una comunidad más o menos grande de especialistas en un campo determinado.

Romberg (1988), de acuerdo con los requisitos exigidos por Kuhn para que un campo de investigación se encuentre en el camino hacia la "ciencia normal", afirma que es necesario que se den las siguientes circunstancias:

- (1) Debe existir un grupo de investigadores con intereses comunes acerca de las interrelaciones existente entre distintos aspectos de un fenómeno complejo del mundo real. Por tanto, debe haber una cuestión central (o dominio) que guíe el trabajo de dicha comunidad particular de especialistas.
- (2) Las explicaciones dadas por la teoría deben ser enunciados sobre la causalidad, de modo que sea posible realizar predicciones acerca del fenómeno.
- (3) Los enunciados se hacen según un vocabulario y una sintaxis sobre la que el grupo está de acuerdo. Existen, además, unos procedimientos aceptados por el grupo de investigadores para probar los enunciados, esto es, para aceptar o rechazar las proposiciones. Los conceptos, proposiciones y teorías de las ciencias se distinguen de los constructos no científicos en que satisfacen los criterios marcados por las reglas del método científico y del razonamiento lógico y están aceptados por las comunidades científicas.

Desde nuestro punto de vista, la exigencia de que exista una comunidad de especialistas que compartan una red de hipótesis y concepciones acerca del planteamiento de los problemas y de los métodos aceptables de resolución, esto es, un único paradigma en el sentido de Kuhn, nos parece demasiado fuerte. Como argumenta Shulman (1986), para el caso de las ciencias sociales y humanas y, por tanto, para la Educación Matemática, la coexistencia de escuelas competitivas de pensamiento puede verse como un estado natural y bastante maduro en estos campos ya que favorece el desarrollo

de una variedad de estrategias de investigación y el enfoque de los problemas desde distintas perspectivas. La complejidad de los fenómenos puede precisar la coexistencia de distintos programas de investigación, cada uno sustentado por paradigmas diferentes, con frecuencia mezcla de los considerados como idóneos para otras disciplinas. El enfoque epistemológico de Bunge (1985a), con su concepción de haces de líneas de investigación competitivas en un campo científico, parece más apropiado para valorar el estado actual del campo de la Didáctica de la Matemática.

Al reflexionar sobre la posibilidad de construir un "área de conocimiento", que explique y sirva de fundamento a la comunicación y adquisición de los contenidos matemáticos, observamos que las didácticas especiales aparecen frecuentemente clasificadas como "capítulos" o enfoques diferenciales de la didáctica, negándoles el calificativo de ciencias de la educación propiamente dichas (Benedito, 1987, p. 91). De este modo, estos autores las reducen a meros conocimientos técnicos, o a la sumo tecnológicos, ya que el saber científico pertenecería al ámbito de la didáctica (general) o a la psicología de la educación.

La interconexión entre la didáctica (general) y especiales puede clarificarse teniendo en cuenta el análisis que hace Bunge (1985a, p. 181) de la relación teoría general y teoría específica. Según explica este autor, una teoría general, como indica su nombre, concierne a todo un género de objetos, en tanto que una teoría específica se refiere a una de las especies de tal género. Por cada teoría general G hay entonces toda una clase de teorías especiales E_i , donde i es un número natural. Cada una de estas teorías especiales E_i contiene la teoría general G y, además, ciertas hipótesis subsidiarias S_{ij} que describen las peculiaridades de la especie i de objetos a que se refiere. Simbólicamente se puede representar,

$$E_i = G \cup \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{in}\}$$

donde n es el número de hipótesis subsidiarias que caracterizan a la teoría específica E_i con respecto a la general G .

Suele decirse que la teoría general "abarca" a cada una de las teorías específicas correspondientes, en el sentido de que éstas se obtienen con sólo agregarle a G ciertas premisas específicas. Pero, como Bunge afirma, es falso. Aunque se lea a menudo, que G contenga o implique a todas las teorías específicas E_i , mas bien es al revés. G se obtendría como la parte común (intersección) de todos los E_i . En otras palabras: dado un conjunto de teorías específicas, se puede extraer de éstas una teoría general con sólo suprimir todas las premisas particulares y dejar las suposiciones comunes a todas las teorías específicas.

Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza. Pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué? ¿enseñanza de qué? Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psicopedagógicos, sociales y culturales. Esto es, los factores "saber a aprender" y "saber a enseñar" pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos. La programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la Educación Matemática, precisa tener en cuenta esta especificidad.

La insuficiencia de las teorías didácticas generales lleva necesariamente a la superación de las

mismas mediante la formulación de otras nuevas, más ajustadas a los fenómenos que se tratan de explicar y predecir. Incluso pueden surgir nuevos planteamientos, nuevas formulaciones más audaces que pueden revolucionar, por qué no, los cimientos de teorías establecidas.

El marco estrecho de las técnicas generales de instrucción (o incluso de la tecnología) no es apropiado para las teorías que se están construyendo por algunas líneas de investigación de la Didáctica de las Matemáticas. El matemático, reflexionando sobre los propios procesos de creación y comunicación de la matemática, se ha visto obligado a practicar el oficio de epistemólogo, psicólogo, sociólogo,... esto es, el oficio de didacta.

3. PRINCIPALES PERSPECTIVAS Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Una vez analizado los requisitos que algunos autores exigen para que pueda hablarse de la existencia de una disciplina científica, nos preguntamos si para la Didáctica de la Matemática existe esa comunidad de investigadores en la cual pueda surgir uno o varios programas de investigación que produzca una teoría o teorías de la Educación Matemática. En este apartado trataremos de describir el "estado de la cuestión" sobre esta problemática, centrándonos en la actividad desarrollada por los grandes núcleos de investigadores, en particular los grupos TME (Theory of Mathematics Education) y PME (Psychology of Mathematics Education). También sintetizamos algunas características básicas de las perspectivas o líneas sobre, resolución de problemas y modelización, visiones socioculturales, la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, el interaccionismo simbólico, el punto de vista sociocrítico y la fenomenología didáctica de H. Freudenthal³.

3.1. TEORÍA Y FILOSOFÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Como afirma Lester (2010, p. 69) la investigación en educación matemática realizada hasta los años 90 se caracterizaba, al menos en Estados Unidos, por ser en gran medida atórica, esto es, con escasas referencias a los fundamentos teóricos en que se basaba, y sin pretensiones de progresar en la construcción de modelos teóricos. Esta circunstancia ha cambiado en los últimos 20 años, como se puede comprobar en los artículos publicados en las principales revistas, donde la referencia al marco teórico en que se apoyan los estudios es un requisito para su publicación. En este apartado presentamos una síntesis de trabajos y reflexiones sobre planteamientos teóricos y filosóficos sobre la educación matemática.

3.1.1. El programa de investigación del grupo TME

En lo que respecta a la existencia de un grupo de investigación con intereses comunes en el desarrollo teórico, podemos decir que la intención del profesor Steiner en el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en 1984, fue precisamente convocar a los científicos interesados en la gestación de una Teoría de la Educación Matemática. En dicho Congreso se incluyó un Área Temática con el nombre "Teoría de la Educación Matemática" a la que se dedicaron cuatro sesiones. Finalizado el Congreso se celebraron nuevas reuniones en las que

³ El artículo de Font (2002) ofrece una descripción de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas complementaria de la que aquí presentamos.

quedó constituido un Grupo de Trabajo que se denominó TME (Theory of Mathematics Education) y en las que se continuaron las discusiones iniciadas en el ICME.

Las sucesivas conferencias de TME que se han celebrado han mostrado que existe una comunidad, al menos en estado incipiente, interesada por construir las bases teóricas de la Didáctica de la Matemática como ciencia, que está constituida por personas con formación e intereses en campos bastante diversificados: investigadores en Educación Matemática, matemáticos, profesores, psicólogos educativos, sociólogos educativos, formadores profesores, etc.

En la configuración de esta comunidad científica existen intereses profesionales que han propiciado una orientación académica a esta actividad. Así, en Alemania, entre 1960 y 1975, se crearon más de 100 cátedras en las escuelas de formación de profesores, asignadas a departamentos de matemáticas; al ser integradas las citadas escuelas en la universidad, la Didáctica de la Matemática se vio en cierta medida equiparada a las restantes disciplinas. En España este fenómeno ha tenido lugar especialmente a partir de 1985 con el reconocimiento de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento y la consiguiente posibilidad de constituir departamentos universitarios los profesores adscritos a dicha área.

Esta situación puede forzar a la Educación Matemática hacia un dominio de especulación científica relativamente desconectado de la realidad social. Steiner (1985), al analizar el papel que la Educación Matemática debería tener dentro de la universidad, propone que esta disciplina adopte una función de vínculo entre la matemática y la sociedad. "Esto es posible y necesario especialmente por medio de su contribución a la elaboración y actualización de muchas dimensiones olvidadas de las matemáticas: las dimensiones filosófica, histórica, humana, social y, comprendiendo a todas estas, la dimensión didáctica" (p. 12).

Podemos hacer una primera aproximación al núcleo conceptual de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica analizando las cuestiones planteadas en el seno del Grupo TME que, dado su carácter abierto, ha reunido, en las sucesivas conferencias, a la mayoría de los investigadores en Educación Matemática interesados por el fundamento teórico de su actividad.

De acuerdo con el programa de desarrollo trazado en la Primera Conferencia (Steiner y cols, 1984), la "Teoría de la Educación Matemática" se ocupa de la situación actual y de las perspectivas para el desarrollo futuro de la Educación Matemática como un campo académico y como un dominio de interacción entre la investigación, el desarrollo y la práctica. En este programa se distinguen tres componentes interrelacionadas:

(A) La identificación y formulación de los problemas básicos en la orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina, tales como:

(1) La existencia de distintas definiciones, incluso discrepantes, de la Educación Matemática como disciplina.

(2) El uso de modelos, paradigmas, teorías, y métodos en la investigación y de herramientas apropiadas para el análisis de sus resultados.

(3) El papel que deben jugar los "macro-modelos", esto es marcos de referencia generales que relacionan significativamente los múltiples aspectos de la Educación Matemática y los micro-modelos, que proporcionan información detallada sobre áreas restringidas del aprendizaje

matemático.

(4) El debate entre "teorías específicas" frente a interdisciplinariedad y transdisciplinariedad.

(5) Las relaciones entre la Educación Matemática y sus campos referenciales como matemáticas, pedagogía, psicología, sociología, epistemología, etc.

(6) Las relaciones entre teoría, desarrollo y práctica: las tareas integradoras y sintéticas de la Educación Matemática frente a las tendencias recientes hacia una ciencia normal y la creciente especialización.

(7) Los aspectos axiológicos éticos, sociales y políticos de la Educación Matemática.

(B) El desarrollo de una aproximación comprensiva a la Educación Matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo, comprendiendo investigación, desarrollo y práctica. Esto lleva a destacar la importancia de la teoría de sistemas, especialmente de las teorías de los sistemas sociales, basadas en conceptos como interacción social, actividad cooperativa humana, diferenciación, subsistemas, auto-reproducción y sistemas auto-organizados, auto-referencia y reflexión en sistemas sociales, etc.

Asimismo, interesa la identificación y el estudio de las múltiples interdependencias y mutuos condicionantes en la Educación Matemática, incluyendo el análisis de las complementariedades fundamentales.

(C) La organización de la investigación sobre la propia Educación Matemática como disciplina que, por una parte, proporcione información y datos sobre la situación, los problemas y las necesidades de la misma, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales y, por otra, contribuya al desarrollo de un meta-conocimiento y una actitud auto-reflexiva como base para el establecimiento y realización de los programas de desarrollo del TME.

La Segunda Conferencia del Grupo TME, celebrada en 1985 en el Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) de la Universidad de Bielefeld (Steiner y Vermandel, 1988), se centró sobre el tema genérico "Fundamento y metodología de la disciplina Educación Matemática (Didáctica de la Matemática)" y, por tanto, la mayoría de las contribuciones resaltaron el papel de la teoría y la teorización en dominios particulares. Entre estos temas figuran:

- teorías sobre la enseñanza;
- teoría de las situaciones didácticas;
- teoría interaccionista del aprendizaje y la enseñanza;
- el papel de las metáforas en teoría del desarrollo;
- el papel de las teorías empíricas en la enseñanza de la matemática;
- la importancia de las teorías fundamentales matemáticas;
- conceptos teóricos para la enseñanza de la matemática aplicada;
- la teoría de la representación como base para comprender el aprendizaje matemático;
- estudios históricos sobre el desarrollo teórico de la educación matemática como una disciplina.

Los grupos de trabajo se dedicaron a diferentes dominios de investigación con el fin de analizar el uso de modelos, métodos, teorías, paradigmas, etc.

El tema de trabajo de la Tercera Conferencia, celebrada en 1988 en Amberes (Bélgica) (Vermandel y Steiner, 1988) trató sobre el papel y las implicaciones de la investigación en Educación Matemática en y para la formación de los profesores, dado el desfase considerable existente entre la enseñanza y el aprendizaje. Concretamente las cuestiones seleccionadas fueron:

- El desfase entre enseñanza - aprendizaje en el proceso real en las clases de matemáticas como un fenómeno tradicional y como un problema presente crucial.
- El desfase entre investigación sobre la enseñanza e investigación sobre el aprendizaje.
- Modelos para el diseño de la enseñanza a la luz de la investigación sobre el aprendizaje.
- La necesidad de la teoría y la investigación en trabajos y proyectos de desarrollo y su posición en el contexto de investigación sobre enseñanza - aprendizaje.
- El papel del contenido, la orientación del área temática y las distintas perspectivas de las matemáticas en el estudio y solución del desfase investigación - aprendizaje y el desarrollo de modelos integradores.
- El desfase enseñanza - aprendizaje a la luz de los estudios sobre procesos e interacción social en la clase.
- Implicaciones del tema de la conferencia sobre la formación de profesores.
- El ordenador como una tercera componente en la interacción enseñanza- aprendizaje.

Los temas tratados en la cuarta Conferencia celebrada en Oaxtepec (México) en 1990 fueron los siguientes:

I. Relaciones entre las orientaciones teóricas y los métodos de investigación empírica en Educación Matemática.

II. El papel de los aspectos y acercamientos holísticos y sistémicos en Educación Matemática.

Asimismo, se inició en esta reunión la presentación de distintos programas de formación de investigadores en Educación Matemática en el seno de distintas universidades, tanto a nivel de doctorado como de máster. Bajo la iniciativa de los profesores Godino y Batanero de la Universidad de Granada, asistentes a esta reunión del Grupo TME, se acordó recabar información sobre este tema, por medio de un cuestionario, a una amplia muestra de universidades de todo el mundo, como una primera fase en la constitución de una red de personas interesadas en el intercambio de información y discusión sobre el tema.

En la quinta Conferencia, celebrada en 1991 en Paderno del Grappa (Italia), se presentó un informe preliminar de resultados de la citada encuesta sobre formación de investigadores (Steiner y cols, 1991)⁴ y distintos trabajos sobre los temas siguientes:

I. El papel de las metáforas y metonimias en Matemáticas, Educación Matemática y en la clase de matemáticas.

II. Interacción social y desarrollo del conocimiento. Perspectiva de Vygotsky sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático en la zona de construcción.

Como se ha expuesto, los fenómenos estudiados en las conferencias del TME incluyen un rango muy

⁴ Publicado posteriormente como artículo: Batanero, C., Godino J. D., Steiner, H. G. y Wenzelburger, E. (1994). The training of researchers in Mathematics Education. Results from an International study. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 95-102.

diverso: matemáticas, diseño de currículum, estudio de los modos de construcción por los alumnos del significado de las nociones matemáticas, las interacciones profesor - alumno, la preparación de los profesores, métodos alternativos de investigación, etc. La razón de esta diversidad se debe a que el término "Educación Matemática" no está aún claramente definido. No parece existir un consenso acerca de las cuestiones centrales para la Educación Matemática que agrupe todos los intereses aparentemente diversos del campo.

Si bien los temas tratados en las Conferencias TME son de interés para distintos aspectos de la Educación Matemática, no resulta fácil apreciar en ellos un avance en la configuración de una disciplina académica, esto es, una teoría de carácter fundamental que establezca los cimientos de una nueva ciencia por medio de la formulación de unos conceptos básicos y unos postulados elementales. Se encuentran muchos resultados parciales, apoyados en supuestos teóricos externos (tomados de otras disciplinas) que tratan de orientar la acción en el aula, aunque con un progreso escaso.

3.1.2. Grupo Internacional de Filosofía de la Educación Matemática

Los intereses teóricos del Grupo TME (promovido por H. G. Steiner en 1984) fueron en cierta medida asumidos, desde 1990, por otro grupo que adoptó como foco principal de atención la Filosofía de la Educación Matemática. En Julio de 1990, Paul Ernest organizó este grupo internacional y comenzó la publicación de una Newsletter con el título de Philosophy of Mathematics Education Newsletters. A partir de 1996 se transformó en una revista electrónica con el título, Philosophy of Mathematics Education Journal (POME). Todos los trabajos publicados, tanto de la Newsletter como de la revista POME, están disponibles en la página web de Paul Ernest: <http://www.ex.ac.uk/%7EPErnest/>

Los fines de esta red son:

- Explorar los desarrollos actuales en la filosofía de las matemáticas tales como el falibilismo de Lakatos, y otras perspectivas humanísticas de las matemáticas.
- Explorar las perspectivas filosóficas de la educación matemática, y hacer que la reflexión filosófica alcance una consideración similar que las restantes disciplinas de la educación matemática.
- Constituir una red internacional abierta de personas interesadas en esta área temática, interpretada de manera amplia, y proporcionar oportunidades para el intercambio y el avance de las ideas y perspectivas.
- Estimular la comunicación informal, el diálogo y la cooperación internacional entre los profesores, investigadores y demás personas comprometidas en las investigaciones y reflexiones de naturaleza teórica y filosófica sobre las matemáticas y la educación matemática.

En el período de 1990 a 1995 se elaboraron 8 Newsletters preparadas por distintos editores. En la segunda etapa, 1996 a 2002 se ha continuado la publicación en calidad de revista electrónica. El último número (que hace el 24) se ha publicado en Julio de 2009. Se trata de una revista en la que las contribuciones no se someten a proceso de revisión anónima, ya que lo que se pretende es el intercambio de ideas de una manera abierta y libre.

3.1.3. Otras publicaciones sobre fundamentos teóricos de la educación matemática

El interés por los fundamentos teóricos y filosóficos de la educación matemática se ha fortalecido a partir de 2005 al celebrarse un “foro de investigación” dedicado al tema en la Reunión Anual del Grupo PME, celebrado en dicho año en Melbourne. En los cinco años posteriores distintos investigadores han venido publicando diversos trabajos en la revista ZDM y el tema ha sido objeto de interés en uno de los grupos de trabajo del CERME (Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática).

En los “handbooks” de investigación en educación matemática encontramos trabajos que muestran un reconocimiento creciente del interés en la teoría de la educación matemática. Por ejemplo, Silver y Herbst (2007) sintetizan el estado de la “Teoría en la investigación en educación matemática” en “Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning” (Lester, 2007), mientras que Coob (2007) aborda en dicho manual el tema “Putting Philosophy to Work: Coping with Multiple Theoretical Perspectives”. Así mismo, un componente central en la primera y segunda edición del “Handbook of International Research in Mathematics Education” (English, 2002; 2008) fue “avances en el desarrollo de teoría”.

Los resultados de todos estos esfuerzos se han concretado en la publicación en 2010 de un libro con el título, “Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers”, editado por B. Sriraman y L. English (Springer, 2010). Este libro contiene 19 capítulos principales, cada uno de los cuales incluye un prefacio y comentarios elaborados por diversos autores, abordándose temas tales como,

- Perspectivas de teorías y filosofías de la educación matemática (B. Sriraman y L. English)
- Reflexiones sobre las teorías del aprendizaje (P. Ernest)
- Fundamentos teóricos, conceptuales y filosóficos de la investigación en educación matemática (F. K. Lester)
- Teorías de la educación matemática: ¿Es un problema la pluralidad? (S. Lerman)
- Reconceptualización de la educación matemática como una ciencia de diseño (R. Lesh y B. Sriraman)
- El ciclo fundamental de la construcción de conceptos subyacente en varios marcos teóricos (J. Pegg y D. Tall)
- Símbolos y mediación en educación matemática (L. Moreno y B. Sriraman)
- Etc.

3.1.4. Naturaleza e importancia de los marcos teóricos para la investigación

La necesidad de construir teorías es evidente, ya que constituyen una guía para el planteamiento de problemas de investigación y para interpretar los resultados de las mismas. Un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones. La teorización es un requisito para que un área de conocimiento alcance la categoría de científica y pueda desempeñar su papel explicativo y predictivo de fenómenos; puede decirse que la investigación científica significativa está siempre guiada por una teoría, aunque a veces lo sea de modo implícito.

Como afirma Mosterín (1987, p. 146), “gracias a las teorías introducimos orden conceptual en el caos de un mundo confuso e informe, reducimos el cambio a fórmula, suministramos a la historia (que sin teoría correría el riesgo de perderse en la maraña de los datos) instrumentos de extrapolación

y explicación y, en definitiva, entendemos y dominamos el mundo aunque sea con un entendimiento y un dominio siempre inseguros y problemáticos”. Este mismo autor nos proporciona una sugestiva metáfora que nos ayuda a no atribuir a las teorías una verdadera realidad independiente de nosotros mismos: “Somos como arañas, y las teorías son como las redes o telas de araña con que tratamos de captar y capturar el mundo. No hay que confundir estas redes o telas de araña con el mundo real, pero, sin ellas ¡cuánto más alejados estaríamos de poder captarlo y en último término, gozarlo!”.

De acuerdo con Lester (2010, p. 69-70) el uso de un marco teórico para conceptualizar y guiar la propia investigación tiene al menos cuatro ventajas importantes:

1. Un marco proporciona una estructura para conceptualizar y diseñar los estudios de investigación. En particular, un marco de investigación ayuda a determinar:

- la naturaleza de las cuestiones preguntas;
- la manera en que las cuestiones se formulan;
- el modo en que los conceptos, constructos, y procesos de la investigación se definen; y
- los principios de descubrimiento y justificación permitidos para crear nuevo conocimiento sobre el tema bajo estudio (esto refiere a los métodos aceptables de investigación).

2. No existe ningún dato sin un marco que dé sentido al dato. El que un conjunto de datos puede contar como evidencia de algo viene determinado por los supuestos y creencias del investigador así como el contexto en el que fueron recogidos. Un aspecto importante de las creencias de un investigador es el marco, basado en la teoría o de otro tipo, que esté usando; este marco hace posible dar sentido al conjunto de datos.

3. Un buen marco nos permite trascender el sentido común. Una comprensión profunda que proviene de una preocupación por construir teoría es con frecuencia esencial para tratar con verdaderos problemas importantes.

4. Necesidad de lograr comprensión profunda. Como investigadores deberíamos tener una comprensión profunda de los fenómenos que estudiamos - las cuestiones importantes (p.e., ¿Qué significa comprender un concepto? ¿Cuál es el papel del profesor en la instrucción? - no simplemente encontrar soluciones a problemas y dilemas inmediatos (p.e., determinar “aquello que funciona”). El marco de investigación ayuda a desarrollar comprensión profunda proporcionando una estructura para diseñar los estudios de investigación, interpretar los datos resultantes de dichos estudios, y extraer conclusiones.

Lester (2010, p. 70) distingue entre tres tipos de marcos de investigación:

1) Marcos teóricos. Un marco teórico guía las actividades de investigación por su dependencia de una teoría formal; esto es, una teoría que ha sido desarrollada usando una explicación coherente y establecida de ciertos tipos de fenómenos y relaciones – la teoría de Piaget del desarrollo intelectual y la teoría del constructivismo socio-histórico de Vygotsky son dos teorías relevantes usadas en el estudio del aprendizaje de los niños.

2) Marcos prácticos. Estos marcos guían la investigación usando “lo que funciona” en la experiencia de hacer algo por las personas directamente implicadas en ello. Este tipo de marco no está informado por la teoría formal sino por el conocimiento práctico acumulado de los prácticos y administradores, los descubrimientos de las investigaciones previas, y con frecuencia los puntos de vista ofrecidos por

la opinión pública. Las cuestiones de investigación se derivan de este conocimiento base y los resultados de la investigación se usan para apoyar, extender, o revisar la práctica.

3) Marcos conceptuales. Se trata de modelos teóricos locales que argumentan o justifican que los conceptos elegidos para la investigación, y las relaciones entre ellos serán apropiados y útiles para un problema de investigación dado. Como los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en la investigación previa, pero los marcos conceptuales se construyen a partir de una matriz de fuentes más o menos usuales y diversas. El marco usado puede basarse en diferentes teorías y diversos aspectos del conocimiento práctico, dependiendo de lo que el investigador pueda argumentar acerca de lo que será relevante e importante para el problema de investigación.

Burkhardt (1988) distinguen entre las teorías que denomina “fenomenológicas” y “teorías fundamentales”. Las teorías fenomenológicas son las que surgen directamente de los datos, constituyendo un modelo descriptivo de una porción particular de fenómenos. Se caracterizan por el rango limitado de objetos a los que se aplican, pero son detalladas y específicas en sus descripciones y predicciones, resultando con frecuencia de utilidad en el diseño del currículo y en la comprensión de los fenómenos que ocurren, por su proximidad a la realidad.

Una teoría de tipo fundamental es una estructura conceptual de variables y relaciones entre ellas que comprende los aspectos esenciales de un conjunto de fenómenos. Tiene un carácter descriptivo y predictivo y es completa dentro de un dominio bien delimitado. Se trata, por tanto, de modelos analíticos que pretenden explicar un rango amplio de fenómenos en términos de unos pocos conceptos básicos. Esta definición se ajusta a ciertos casos típicos de los campos de la física y la biología, como la mecánica de Newton, la teoría genética de Mendel, etc.

Para el caso de las ciencias humanas, Burkhardt se pregunta acerca de la naturaleza y alcance de teorías como el “conductismo”, “constructivismo”, “teorías del desarrollo”. Considera que aunque proporcionan estructuras para comprender los fenómenos, no son completas en un dominio limitado, y por tanto, deben ser usadas a sabiendas de que se presentan sin mecanismos establecidos para su integración fiable en un modelo predictivo. Las considera como descripciones peligrosamente simples de sistemas complejos. En términos de las ciencias físicas no pueden considerarse como teorías ni incluso como modelos, sino como descripciones de “efectos” – aspectos válidos de un sistema de conducta que es preciso tener en cuenta, pero que son cada una de ellas, en sí mismas, inadecuadas y engañosas.

3.2. PSICOLOGÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La psicología de la educación es la rama de la psicología y de la pedagogía que estudia científicamente los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los problemas que en el contexto de los mismos puedan presentarse. Como afirma Gimeno Sacristán (1986), son numerosas las posturas que consideran que la enseñanza es una técnica directamente derivada de una teoría psicológica del aprendizaje que le sirve de fundamento. "Esta situación de dependencia es claramente perjudicial para perfilar un campo teórico propio tanto para la Didáctica General como para las Didácticas Especiales, ya que las sitúa en un estado de colonización esterilizante en cuanto a la propia creación teórica" (Sacristán, 1986, p. 18).

La psicología de la educación "amenaza", pues, con acaparar el estudio de la conducta humana en las

situaciones de enseñanza, reduciendo al máximo el ámbito de la Didáctica. Dentro de ella, una rama es la psicología de la instrucción, definida por Genovard y Gotzens (1990, p. 33) como la "disciplina científica y aplicada desarrollada a partir de la psicología de la educación, que estudia las variables psicológicas y su interacción con los componentes de los procesos de enseñanza - aprendizaje que imparten unos sujetos específicos que pretenden enseñar unos contenidos o destrezas concretas a otros individuos igualmente específicos y en un contexto determinado".

Estos autores analizan y clasifican diferentes teorías y modelos instruccionales desde una perspectiva interaccionista en tres tipos: interacción cognitiva, social y contextual. La interacción cognitiva, en la que sitúan las teorías de Piaget, Bruner y Ausubel, designa las teorías instruccionales que subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia, que se produce entre profesores y alumnos y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, que el alumno consiga una asimilación de la información correcta, se realice. También se incluyen dentro del significado de este término las propuestas que destacan la interacción entre los contenidos instruccionales y los procesos y habilidades cognitivas del alumno y cuyo fin coincide igualmente con el que se acaba de citar. La perspectiva de interacción social, que da prioridad al papel de los sujetos que intervienen en la instrucción como facilitadores de los aprendizajes que deben desarrollarse tiene como representantes a Vygotsky y Bandura. Por último, Skinner, Gagné y Cronbach, entre otros, han propugnado teorías que pueden encuadrarse en la interacción contextual por la cual la instrucción es ante todo el producto de la interacción entre los sujetos y algunas de las variables del contexto.

El Grupo PME (Psychology of Mathematics Education)

En la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática, se aprecia también una fuerte presión de la perspectiva psicológica en el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemático. Consideramos que este predominio del enfoque psicológico de la investigación no tiene en cuenta el necesario equilibrio y principio de complementariedad entre las cuatro disciplinas fundacionales de la Educación Matemática descritas por Higgison (1980). El citado predominio se manifiesta viendo la vitalidad del Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education), constituido en el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) y que ha celebrado en 2010 su 34 Reunión Anual.

Los objetivos principales de este colectivo abierto de investigadores, tal como aparecen en sus estatutos, son:

- Promover contactos internacionales e intercambio de información científica sobre la Psicología de la Educación Matemática.
- Promover y estimular investigación interdisciplinar en este área con la cooperación de psicólogos, matemáticos y profesores de matemáticas.
- Fomentar una comprensión más profunda y correcta de los aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus implicaciones.

Al preguntarse sobre cuáles son las cuestiones esenciales para la Educación Matemática para las cuales una aproximación psicológica puede ser apropiada, Vergnaud (1988) cita las siguientes:

- el análisis de la conducta de los estudiantes, de sus representaciones y de los fenómenos inconscientes que tienen lugar en sus mentes;
- las conductas, representaciones y fenómenos inconscientes de los profesores, padres y demás participantes.

De un modo más especial, analiza cuatro tipos de fenómenos cuyo estudio desde una aproximación psicológica puede ser fructífero:

- 1) La organización jerárquica de las competencias y concepciones de los estudiantes.
- 2) La evolución a corto plazo de las concepciones y competencias en el aula.
- 3) Las interacciones sociales y los fenómenos inconscientes.
- 4) La identificación de teoremas en acto, esquemas y símbolos.

Sin embargo, el análisis de las actas de las reuniones anuales del PME revela que los informes de investigación aceptados incluyen tanto investigaciones empíricas como teóricas y que cubren ámbitos no estrictamente psicológicos. No es posible detallar, por su amplitud, los temas tratados en las distintas Conferencias, pero sí puede ser de interés citar el esquema de clasificación de los informes de investigación (research report) ya que indica, a grandes rasgos, las cuestiones sobre las que se está trabajando en la actualidad. Dicho esquema se indica en el cuadro 1.

Cuadro 1: Clasificación de temas, niveles y tipos de investigación en las Conferencias PME

DOMINIOS DE INVESTIGACIÓN (CATEGORÍAS)	
1. Pensamiento matemático avanzado 2. Factores afectivos 3. Pensamiento algebraico 4. Valoración y evaluación 5. Creencias 6. Ordenadores, calculadoras y otros recursos tecnológicos 7. Aprendizaje en personas adultas 8. Sentido numérico en los primeros niveles 9. Epistemología 10. Funciones y gráficas 11. Cuestiones de género 12. Pensamiento geométrico y espacial 13. Visualización e imaginación 14. Lenguaje y matemáticas	15. Modelización matemática 16. Medición 17. Modelos mentales 18. Metacognición 19. Métodos de prueba 20. Probabilidad y combinatoria 21. Resolución de problemas 22. Números racionales y proporción 23. Estudios socioculturales 24. Razonamiento numérico no elemental 25. Formación de profesores y desarrollo profesional 26. Teorías del aprendizaje 27. Tratamiento de datos (estadística)
NIVELES EDUCATIVOS	TIPOS DE INVESTIGACIÓN
31. Preescolar (edad inferior a 7 años) 32. Elemental (edades 5-12) 33. Secundaria (edades 10-16) 34 Post-secundaria (super. a 16)	41. Empírica/ Experimental 42. Estadística 43. Estudio de casos 44. Etnográfica /Interpretativa 45. Teórica /Filosófica

Como afirma Balachef (1990a), más allá de la problemática psicológica inicial del grupo PME, el debate sobre la investigación ha puesto de manifiesto la necesidad de tener en cuenta nuevos aspectos, entre los que destaca:

1) La especificidad del conocimiento matemático. La investigación sobre el aprendizaje del álgebra, geometría, o el cálculo no se puede desarrollar sin un análisis epistemológico profundo de los conceptos considerados como nociones matemáticas. También se reconoce que el significado de los conceptos matemáticos se apoya no sólo sobre su definición formal sino, de un modo fundamental, sobre los procesos implicados en su funcionamiento. Por esta razón se pone el énfasis en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes en lugar de en sus destrezas o producciones actuales.

2) La dimensión social. Tanto el estatuto social del conocimiento que se debe aprender como el papel crucial de las interacciones sociales en el proceso de enseñanza requieren una consideración importante de la dimensión social en la investigación. Uno de los principales pasos en el desarrollo de la investigación en la Psicología de la Educación Matemática es el movimiento desde los estudios centrados en el niño hacia los estudios centrados en el estudiante como aprendiz en la clase. El estudiante es un niño implicado en un proceso de aprendizaje dentro de un entorno específico en el que las interacciones sociales con otros estudiantes y el profesor juega un papel crucial. Con esta evolución de la problemática, se debe desarrollar más investigaciones que utilicen observaciones sistemáticas de la clase o que precisen de la organización de procesos didácticos específicos. Tal investigación requiere nuevos útiles teóricos y metodológicos para producir resultados que sean robustos tanto teóricamente como también con respecto a su significado para propósitos prácticos.

Posiblemente esta apertura del campo de interés del PME lleve a Fischbein (1990) a afirmar que la Psicología de la Educación Matemática tiende a convertirse en el paradigma de la Educación Matemática en general (como cuerpo de conocimiento científico). Además, atribuye a esta línea de trabajo una entidad específica dentro de las áreas de conocimiento al considerar que la adopción de cuestiones, conceptos, teorías y metodologías del campo de la psicología general no ha dado los frutos esperados. La explicación que sugiere es que la psicología no es una disciplina deductiva, y por tanto, la mera aplicación de principios generales a un dominio particular no conduce usualmente a descubrimientos significativos. Incluso aquellos dominios de la psicología fuertemente relacionados con la Educación Matemática - como los estudios sobre la resolución de problemas, la memoria, estrategias de razonamiento, creatividad, representación, e imaginación - no pueden producir directamente sugerencias útiles y prácticas para la Educación Matemática y no pueden representar por sí mismas la fuente principal de problemas en este campo. Incluso la teoría de los estadios de Piaget y sus descubrimientos sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos (número, espacio, azar, función, etc.) no pueden ser directamente trasladados en términos de currículo.

Esta observación no significa que la Educación Matemática debiera vivir y desarrollarse en una concha cerrada, opaca a las influencias externas. Las coordenadas psicológicas y sociológicas son prerequisites necesarios para definir problemas, trazar proyectos de investigación e interpretar los datos. No obstante, estos prerequisites son en sí mismos totalmente insuficientes.

La Educación Matemática, continúa explicando Fischbein, plantea sus propios problemas psicológicos, que un psicólogo profesional nunca encuentra en su propia área. Normalmente un psicólogo no se interesa por los tipos específicos de problemas de representación que aparecen en matemáticas - desde la representación gráfica de funciones y distintas clases de morfismos, a la

dinámica del simbolismo matemático. Es extraño que un psicólogo cognitivo se interese y trate los problemas planteados por la comprensión del infinito matemático con todas sus distintas facetas y dificultades. Con el fin de poder afrontar estos problemas, se necesita un sistema particular de conceptos además de los generales inspirados por la psicología. Pero incluso los conceptos psicológicos usuales adquieren nuevo significado a la luz de las matemáticas y de la Educación Matemática.

Aprendizaje matemático y constructivismo

Dentro del enfoque psicológico, un problema esencial es la identificación de teorías acerca del aprendizaje matemático que aporten un fundamento sobre la enseñanza.

Romberg y Carpenter (1986) afirman que la investigación sobre aprendizaje proporciona relativamente poca luz sobre muchos de los problemas centrales de la instrucción y que gran cantidad de la investigación sobre enseñanza asume presupuestos implícitos sobre el aprendizaje infantil que no son consistentes con las actuales teorías cognitivas del aprendizaje. Se han tratado de aplicar teorías generales (fundamentales) sobre el aprendizaje para deducir principios que guíen la instrucción.

La instrucción basada en principios conductistas tiende a fragmentar el currículum en un número de partes aisladas que podrían aprenderse a través de un refuerzo apropiado. Pero la instrucción efectiva de las matemáticas necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

En el caso de teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget, si bien la ejecución de tareas piagetianas está correlacionada con logros aritméticos, las operaciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje. Consiste en aceptar que el niño construye, de un modo activo, el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento; lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Como afirma Vergnaud (1990a) la mayoría de los psicólogos interesados hoy por la Educación Matemática son en algún sentido constructivistas. Piensan que las competencias y concepciones son construidas por los propios estudiantes. Según Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, no es recibido pasivamente del entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial; no se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto.

Pero el hecho de que la mayoría de los investigadores no especifiquen suficientemente las condiciones físicas y sociales bajo las cuales tiene lugar el conocimiento abre el camino a una amplia variedad de posiciones epistemológicas. Desde un constructivismo simple (trivial, para algunos) que solo reconocen el principio 1 mencionado, al constructivismo radical que acepta los dos principios y,

por tanto, niega la posibilidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad. También se habla de un constructivismo social, que refuerza el papel fundamental del conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad. La solución epistemológica, afirma Vergnaud (1990a), es en principio bastante sencilla: La construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros.

Aprendizaje matemático y procesamiento de la información

Como afirma Orton (1990), no existe ninguna teoría del aprendizaje de las matemáticas que incorpore todos los detalles que cabría esperar y que tenga una aceptación general. Según este autor se identifican en la actualidad dos corrientes de investigación sobre este campo: el enfoque constructivista, considerado anteriormente, y el enfoque de ciencia cognitiva - procesamiento de la información, de fuerte impacto en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático, como se pone de manifiesto en el libro de Davis (1984).

Según Schoenfeld (1987) una hipótesis básica subyacente de los trabajos en ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero que tales estructuras pueden ser comprendidas y que esta comprensión ayudará a conocer mejor los modos en los que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es explicar aquello que produce el "pensamiento productivo", o sea las capacidades de resolver problemas significativos.

El campo de la ciencia cognitiva intenta capitalizar el potencial de la metáfora que asemeja el funcionamiento de la mente a un ordenador para comprender el funcionamiento de la cognición como procesamiento de la información, y como consecuencia comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se considera que el cerebro y la mente están vinculados como el ordenador y el programa.

El punto de vista dominante en ciencia cognitiva actual es que la cognición es llevada a cabo por un mecanismo de procesamiento central controlado por algún tipo de sistema ejecutivo que ayuda a la cognición a ser consciente de lo que está haciendo. Los modelos de la mente se equiparan a los modelos de ordenadores de propósito general con un procesador central capaz de almacenar y ejecutar secuencialmente programas escritos en un lenguaje de alto nivel. En estos modelos, la mente se considera como esencialmente unitaria, y las estructuras y operaciones mentales se consideran como invariantes para los distintos contenidos; se piensa que un mecanismo único está en la base de las capacidades de resolución de una cierta clase de problemas.

Desde el punto de vista metodológico, los científicos cognitivos hacen observaciones detalladas de los procesos de resolución de problemas por los individuos, buscan regularidades en sus conductas de resolución e intentan caracterizar dichas regularidades con suficiente precisión y detalle para que los estudiantes puedan tomar esas caracterizaciones como guías para la resolución de los problemas. Tratan de construir "modelos de proceso" de la comprensión de los estudiantes que serán puestos a prueba mediante programas de ordenador que simulan el comportamiento del resolutor.

Como educadores matemáticos debemos preguntarnos si la metáfora del ordenador proporciona un modelo de funcionamiento de la mente que pueda ser adecuada para explicar los procesos de

enseñanza - aprendizaje de las matemáticas y cuáles son las consecuencias para la instrucción matemática de las teorías del procesamiento de la información.

Como nos advierte Kilpatrick (1985, p. 22) "Podemos usar la metáfora del ordenador sin caer prisioneros de ella. Debemos recordarnos a nosotros mismos que al caracterizar la educación como transmisión de información, corremos el riesgo de distorsionar nuestras tareas como profesores. Podemos usar la palabra información pero al mismo tiempo reconocer que hay varios tipos de ella y que algo se pierde cuando definimos los fines de la educación en términos de ganancia de información".

Como expondremos en la Sección 3.4, otros autores propugnan un enfoque diferente de los procesos de resolución de problemas y enseñanza-aprendizaje, que asignan un papel más activo al resolutor, tienen en cuenta las peculiaridades del contenido matemático así como el papel del profesor y de la interacción social en el aula.

3.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y MODELIZACIÓN

La resolución de problemas, como línea de investigación en educación matemática, ha sido un tema importante en las últimas décadas. El trabajo seminal de Polya (1945) sobre cómo resolver problemas proporcionó el impulso inicial para una gran cantidad de investigaciones que tuvieron lugar en las siguientes décadas, incluyendo cuestiones como la resolución de problemas simulada con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias y heurísticas de resolución de problemas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas. Más recientemente se ha incrementado la atención hacia la modelización matemática en los grados elemental y medio, así como la resolución de problemas interdisciplinares.

Como afirman English y Sriraman (2010, p. 264), una proporción considerable de la investigación inicial se ha enfocado principalmente en los problemas de enunciado verbal del tipo usual en los textos y pruebas escolares. Frecuentemente se trata de problemas "rutinarios" que requieren la aplicación de un procedimiento de cálculo estándar, así como problemas "no rutinarios" que implican alcanzar una meta a partir de un punto de partida cuando el camino no es evidente. Este último tipo de problemas son sin duda esenciales en el aprendizaje matemático, pero son también los que presentan mayor dificultad para los estudiantes.

La importancia que se da a la resolución de problemas en los currículos y en la investigación educativa es el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas que considera que su esencia es precisamente la resolución de problemas. Muchos autores han ayudado a desarrollar este punto de vista como, por ejemplo, Lakatos (1978) con su libro sobre "pruebas y refutaciones". Entre estos autores destaca Polya (1945), para quien la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los educadores matemáticos valoraron positivamente el libro de Polya, viéndolo como un recurso valioso para mejorar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas no rutinarios y como recurso para afrontar la cuestión usual, "¿Qué debería hacer cuando me bloqueo en la solución de un problema?" Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de

actuar de un resolutor ideal, y son básicamente descriptivas. Los trabajos de Schoenfeld (1985) tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas. Schoenfeld (1992) recomienda que la investigación y la enseñanza de la resolución de problemas debería: a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un amplio repertorio de estrategias más específicas de resolución de problemas que se relacionen más estrechamente con clases de problemas específicos; b) favorecer estrategias metacognitivas (auto-regulación y control) de manera que los estudiantes aprendan a usar sus estrategias de resolución de problemas y el conocimiento del contenido; c) desarrollar modos de mejorar las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas y sus propias competencias personales.

English y Sriraman (2010, p. 265) informan de diversas reflexiones y evaluaciones sobre la eficacia de las investigaciones en resolución de problemas concluyendo sobre su escasa relevancia sobre la práctica escolar: “Enseñar a los estudiantes sobre estrategias de resolución de problemas, heurísticas y fases en la resolución ... influye poco en la habilidad para resolver problemas generales de matemáticas” (Lester y Kehle, 2003, p. 508⁵).

¿Por qué es tan difícil, para la mayoría de las personas, la resolución de problemas en matemáticas? Desde nuestro punto de vista, la resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo. Mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberían adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que consideramos no debería ser considerada como una parte aislada del currículo matemático. La resolución de problemas, y en general la modelización matemática, debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas deberían aparecer primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos. Sin embargo, como afirman English y Sriraman, 2010, p. 267), “Desafortunadamente, faltan estudios que aborden el desarrollo conceptual basado en resolución de problemas en interacción con el desarrollo de competencias de resolución de problemas”.

3.4. VISIONES SOCIO-CULTURALES

Sierpinska y Lerman (1996) incluyen en su revisión de las epistemologías de (y para) la educación matemática una síntesis de las visiones socio-culturales aplicadas a nuestro campo de investigación. De acuerdo con estos autores, la etiqueta 'socio-cultural' se usa para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y situaciones sociales de tal modo que no tiene sentido hablar del individuo o de conocimiento a menos que sea visto a través del contexto o de la actividad. Conocimiento es conocimiento cultural considerado como socialmente producido, siempre

⁵ Citado por English y Sriraman, 2010, p. 265.

potencialmente cambiante, trabado con valores sociales y regulado socialmente.

Una característica de las tendencias cambiantes en la investigación en educación matemática durante los años recientes ha sido el interés creciente y la focalización sobre el contexto social de la clase de matemáticas. El papel jugado por el contexto social en el desarrollo de los individuos o de los grupos ha sido teorizado implícita o explícitamente, de muchas maneras; lo que caracteriza los intereses actuales es un desplazamiento desde la identificación de factores sociales sobre el dominio de lo afectivo a una preocupación con la parte que el entorno social y cultural juega como un todo en el desarrollo del niño.

Lave (1988) desarrolló la noción de conocimiento-en-acción en contraste a una perspectiva cognitiva, y localizó las matemáticas en diversos contextos en los que actúan las personas. Sus estudios han sido en su mayor parte sobre las prácticas 'matemáticas' en situaciones de la vida diaria y de los lugares de trabajo. En sus pocos comentarios sobre las matemáticas escolares enfatizó su orientación hacia técnicas y destrezas generalizables que se suponen son aplicables a la vida diaria y fue, naturalmente, crítica en esa aproximación.

Vygotsky y sus seguidores, por el contrario, estuvieron interesados centralmente con el aprendizaje (y la enseñanza). De hecho, Vygotsky no trata con cuestiones sobre la naturaleza de las matemáticas o cualquier otra forma de conocimiento (excepto para la psicología, que intentó redefinir y reestructurar como una ciencia materialista). Vygotsky se interesó por la naturaleza de la conciencia y en particular con su desarrollo. Para él, la comunicación conduce la conciencia y, por tanto, el proceso de aprendizaje era integral para la comunicación. Identificó dos tipos de pensamiento, pensamiento ordinario o espontáneo y pensamiento científico o teórico. Este último es el que pretende de modo consciente la enseñanza y aprendizaje mediante la apropiación por el niño del conocimiento cultural. El primero es el que se logra de manera informal por medio de las interacciones del niño con los compañeros y los adultos.

Vygotsky (1978) identificó una región que llamó 'la zona de desarrollo próximo', que era la diferencia entre lo que un niño podía hacer por sí mismo y lo que podía hacer con la ayuda de un compañero o un adulto experimentado. Este concepto fundamental estableció que todo el aprendizaje tiene lugar con otros, y que el aprendizaje tira de cada persona, de modo que lo que ve hacer a otros hoy, lo hará con ellos mañana y solo después. El aprendizaje conduce al desarrollo, una aproximación que Vygotsky señaló en contraste directo con los escritos de Piaget para quien el desarrollo, en la forma de estadios de desarrollo del niño, conduce el aprendizaje. El proceso de internalización era otra característica fundamental del pensamiento de Vygotsky. Para Vygotsky, 'el proceso de internalización no es la transferencia de 'un plano de conciencia' externo a otro interno preexistente; es el proceso en el que este plano se forma' (Leontiev, 1981, p. 57). Por tanto hay una unificación de la enseñanza y el aprendizaje en el nivel escolar.

Una característica importante de la aproximación de Vygotsky es el sentido en que el mundo, y los individuos dentro de él, son productos de su tiempo y lugar. En particular, la psicología del individuo, expresada como conciencia, se forma mediante la mediación de herramientas, que son expresiones de la situación social, histórica y cultural. Esto lleva a considerar al sujeto y al objeto juntos, superando la dualidad cartesiana. Esto implica que no hay fundamentos para afirmar que existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas, y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje.

Por ejemplo, según la historia de las matemáticas en Occidente, el desarrollo del concepto de número negativo estuvo cargado de obstáculos epistemológicos; muchos matemáticos, incluso hasta el siglo diecinueve, eran reacios a aceptar el concepto (aunque parece claro que los autores Babilónicos de alguna de las tablillas de arcilla de alrededor de 1500 A.C. encontraron más fácil de aceptar tales números). Ahora consideramos los negativos como parte de los enteros, y los niños pueden aprender su naturaleza sin tener que recrear esa historia (parcial); no hay ninguna razón, excepto una hipótesis a priori, de porqué debería haber un paralelismo similar.

En términos de investigación, la aproximación más desarrollada acorde con estas líneas ha sido la denominada Teoría de la Actividad (Garnier, Bednarz y Ulanovskaya, 1991). Aunque Vygotsky señaló la centralidad de la noción de la persona actuante, enfatizó 'el significado' como la mediación entre el individuo y el mundo. La sociedad y la cultura son mediatizadas para el niño por medio de herramientas, y en particular herramientas culturales. En particular, el pensamiento y el lenguaje tienen que ser vistos como dialécticamente relacionados. El lenguaje ofrece al niño significados histórico-culturales heredados, pero cada participante en la conversación u otra actividad usa aquellas herramientas intersubjetivamente para reconfigurar los significados en la comunicación y la acción.

Según el punto de vista de Leontiev, la actividad orienta a los participantes y les proporciona el significado y la motivación inicial. Los significados están socialmente centrados, mientras que el sentido es la perspectiva del individuo. Las acciones de los individuos dentro de la actividad están siempre motivadas por el sentido, que incorpora cognición, cultura y afecto. Finalmente, existen las operaciones o los movimientos específicos que hacen los individuos en respuesta a fenómenos específicos.

Con el término *socioepistemología* se describe, principalmente en la comunidad Latinoamérica de matemática educativa, un marco teórico que propone estudiar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple. El origen de este marco teórico está en los trabajos de Cantoral, Farfán y otros investigadores del grupo de investigación de la Sección de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV (IPN, México) (Cantoral y Farfán, 2003; Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

La socioepistemología se presenta no sólo como una visión ampliada de la epistemología que resalta la relatividad socioepistémica de los significados de los objetos matemáticos (en concordancia con otras visiones socioculturales), sino una manera sistémica de afrontar el estudio de las interacciones entre esta visión de las matemáticas con las dimensiones cognitiva e instruccional. Se plantea el examen del conocimiento matemático considerándolo como social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. Además de asumir como esencial la actividad humana resolviendo problemas como origen de las matemáticas, considera necesario explicitar el componente sociocultural en la construcción del conocimiento matemático, el papel de las herramientas utilizadas y la diversidad de significados atribuibles a los objetos matemáticos.

3.5. EL PUNTO DE VISTA SOCIOCRTICO Y LA INVESTIGACI3N ACCI3N

Como describen Font y Godino (en prensa), una corriente importante en la investigaci3n en Educaci3n Matemática es la que considera que la mejora de los procesos de enseanza y aprendizaje debe tener por objetivo la emancipaci3n de las personas y la transformaci3n social. Para ello, se deben potenciar estrategias de reflexi3n sobre la prctica por parte de los propios actores que promuevan el cambio en esta direcci3n.

Un ejemplo de programa de investigaci3n en Educaci3n Matemática de este tipo es la llamada “Educaci3n Matemática Crítica” (Skovsmose, 1999). Este enfoque propone una agenda de investigaci3n para el estudio de la relaci3n entre educaci3n matemática y democracia. Los aspectos que preocupan a la teoría crítica son, entre otros: 1) preparar a los estudiantes para ser ciudadanos; 2) introducir las matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica los hechos socialmente relevantes; 3) tener en cuenta los intereses de los estudiantes; 4) considerar los conflictos culturales en los que se desarrolla el proceso de instrucci3n; 5) contemplar los aspectos anteriores sobre el proceso de enseanza-aprendizaje de las matemáticas para que el conocimiento matemático se convierta en una herramienta crítica y 6) dar importancia a la comunicaci3n en el aula, entendida como el conjunto de relaciones interpersonales que son la base de la vida democrática.

Otro de los aspectos que más preocupa a la educaci3n matemática crítica son las relaciones entre las matemáticas y la tecnología, la cual, al mismo tiempo que soluciona problemas, genera otros nuevos.

En la perspectiva sociocrítica el profesor debe modificar su rol, pasando de ser reproductor a constructor de conocimiento. Se sostiene que el profesor puede y debe elaborar teoría desde su prctica. Se considera que los docentes pueden, y deben, dedicarse a elaborar teoría pedagógica a partir de la investigaci3n educativa, eliminando la disociaci3n que tradicionalmente se ha planteado entre teoría y prctica, que deja la primera a los investigadores y la segunda a los profesores cuando se enfrentan a las tareas cotidianas de su labor. El investigador es un sujeto más, comprometido con el cambio. La metodología de investigaci3n suele ser la investigaci3n-acci3n participativa. La investigaci3n acci3n es entendida en su aplicaci3n al ámbito escolar, como el estudio de una situaci3n social en la que participan maestros y estudiantes con objeto de mejorar la calidad de la acci3n, a través de un proceso cíclico en espiral de diagnóstico del problema, planificaci3n, acci3n, reflexi3n y evaluaci3n del resultado de la acci3n (Kemmis y McTarggart, 1992; Elliott, 1996).

3.6. PERSPECTIVAS SEMI3TICAS EN EDUCACI3N MATEMÁTICA

Diversas publicaciones recientes están resaltando el papel que la “ciencia de los signos”, la Semi3tica, puede jugar para describir y comprender fenómenos relacionados con la enseanza y el aprendizaje de las matemáticas (Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger y Cifarelli, 2003; Radford, 2006; Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006; Radford, Schubring y Seeger, 2008). De acuerdo con Radford (2006, p. 7), las razones del interés suscitado por la semi3tica en la educaci3n matemática son diversas. Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente una actividad simbólica. Por otro lado, el interés que suscitó en los años 1990 la comprensi3n de la comunicaci3n en el salón de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para

el maestro, comprender la naturaleza del discurso matemático. La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva. Otra razón parece ser el uso cada vez mayor de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La semiótica, de nuevo, parece ofrecer conceptos capaces de ayudar al didáctico en su tarea de entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos. El hecho de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación hacen de la semiótica un campo muy situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural.

Ernest (2006) describe los rasgos característicos de la perspectiva semiótica en Educación Matemática resaltando los nuevos “insight” que la “ciencia de los signos” aporta para describir y comprender los procesos de comunicación y de aprendizaje de las matemáticas. En esta perspectiva teórica se trata de modelizar dentro de un marco coherente, tanto el papel de los sistemas matemáticos de signos, como las estructuras de significados, las reglas matemáticas y la fenomenología que motiva la actividad matemática.

Las razones para utilizar el punto de vista de la semiótica en la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son diversas. La semiótica abarca todos los aspectos de la construcción de signos por el hombre, la lectura e interpretación de los signos a través de los múltiples contextos en que tiene lugar dicho uso. No debe ser, por tanto, extraño el uso de la semiótica para estudiar la actividad matemática, dado el papel esencial del uso de signos en la matemática. Un papel similar desempeñan los signos, los símbolos, notaciones, etc., en la comunicación de las ideas matemáticas en el contexto escolar y en los procesos de aprendizaje. En consecuencia parece justificado el estudio de la matemática escolar desde el punto de vista de la ciencia de los signos.

La perspectiva semiótica de la actividad matemática se caracteriza por centrar su atención de manera primaria en los signos y el uso de los signos, contrariamente a las perspectivas psicológicas que fijan la atención de manera exclusiva sobre las estructuras y funciones mentales. Trasciende los límites de las aproximaciones cognitivas y conductuales de la psicología al adoptar como unidad natural y básica de análisis el signo. Dado que el signo supone un acto comunicativo, la perspectiva semiótica abarca de maneja conjunta las dimensiones individuales y sociales de la actividad matemática, la enseñanza y el aprendizaje. “El foco primario en la perspectiva semiótica es sobre la actividad comunicativa en matemáticas usando signos. Esto implica tanto la recepción y comprensión vía escuchar y leer, y la producción de signos vía hablar y escribir” (Ernest, 2006, p. 3).

La atención se centra no sobre signos aislados sino sobre los sistemas de signos matemáticos y el contenido, las destrezas y capacidades desarrolladas durante el proceso educativo. Los signos y su uso solo se pueden comprender como partes de sistemas más complejos: *los sistemas semióticos*, los cuales comprenden tres componentes: 1) el conjunto de signos (S); 2) el conjunto de reglas de producción de signos (R); 3) las relaciones entre los signos y sus significados, encarnados en una estructura de significados subyacentes (M).

“Los sistemas semióticos implican signos, reglas de uso y producción de signos, y los significados subyacentes. Todos estos elementos dependen de prácticas sociales, y los seres humanos como

criaturas esencialmente usuarias de signos y productores de significados nunca se pueden eliminar de la escena, incluso aunque para algunos fines ponemos en primer plano los signos y las reglas y relegamos a las personas y los significados” (p. 6)

Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) vienen desarrollando una nueva perspectiva teórica para la educación matemática que describen como “enfoque ontosemiótico”, en la cual, reconocimiento el papel fundamental del lenguaje y la semiótica para describir y comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, consideran también fundamentales las cuestiones de índole ontológica. A partir de presupuestos antropológicos para las matemáticas conciben los objetos matemáticos como emergentes de los sistemas de prácticas que realizan las personas para resolver ciertos tipos de problemas. Esta idea, junto con las de configuración de objetos y de función semiótica, permite elaborar una noción operativa de sistema semiótico, complementando de ese modo las perspectivas semióticas en educación matemática.

3.7. EL INTERACCIONISMO SIMBÓLICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA⁶

Una parte sustancial de la investigación en educación matemática se ocupa de estudiar las relaciones entre el profesor, los estudiantes y la tarea matemática en las clases de matemáticas, tratando de encontrar respuestas fundadas a cuestiones del tipo, ¿cómo el profesor y los estudiantes llegan a compartir significados matemáticos para que el flujo de la clase continúe de forma viable?, ¿cómo comprende un estudiante las intervenciones del profesor?

Para intentar responder a estas cuestiones es necesario desarrollar perspectivas teóricas que sean útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas. En este sentido, Bauersfeld (1994) indica que es posible utilizar constructos teóricos procedentes de la sociología y la lingüística (etnometodología, interaccionismo social, y análisis del discurso), pero que, ya que estas disciplinas no están directamente interesadas en las cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos curriculares, es necesario realizar una cierta traducción para responder a las cuestiones específicas de la educación matemática. Esta aproximación se apoya en el supuesto de que se generan diferentes prácticas en el aula si se toma las matemáticas como un conjunto de verdades objetivas, como algo existente y documentado objetivamente, o si se ve la práctica en el aula como un proceso de matematización compartida, guiada por reglas y convenios que emergen de la misma práctica. Esta segunda perspectiva subraya la importancia de la “constitución interactiva” del significado en las aulas y convierte en objeto de investigación las relaciones entre las características sociales de los procesos de interacción, así como las existentes entre el pensamiento del profesor y el de los estudiantes (Bauersfeld, Krummheuer & Voigt, 1988). Una perspectiva teórica que tiene implicaciones analíticas y que ha sido utilizada para estudiar estas relaciones es el interaccionismo simbólico (I.S.), cuyo supuesto básico es que las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo.

Según la síntesis que realizan Sierpinska y Lerman (1996) del programa interaccionista aplicado a la

⁶ Godino y Linares (2000).

educación matemática el interaccionismo es una de las aproximaciones a la investigación sobre el desarrollo intelectual que promueve una visión sociocultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento. Se enfatiza como foco de estudio las interacciones entre individuos dentro de una cultura en lugar de sobre el individuo. El énfasis se coloca en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo el supuesto básico de que los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática (Bauersfeld, 1995). Los fundamentos de la perspectiva interaccionista se pueden esquematizar en:

- el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula,
- las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente, y
- el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.

Objetivos de las investigaciones del programa interaccionista

Como afirman Sierpinska y Lerman (1996), el fin de la mayor parte de la investigación del programa interaccionista en la educación matemática es lograr una mejor comprensión de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal y como ocurren en los contextos escolares ordinarios. Hay menos interés en la elaboración de teorías para la acción y el diseño de acciones didácticas en sí mismas. Los resultados de la investigación en el programa interaccionista no conducen a recomendaciones para la acción sino a la descripción y discusión de diferentes posibilidades. No se pretende mejorar la microcultura de la clase de la misma manera que podemos cambiar el currículum matemático o la macrocultura de la clase caracterizada por principios generales y estrategias de enseñanza.

Algunos de los problemas centrales que ve el interaccionismo para la educación matemática son:

¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos en las diferentes culturas de la clase de matemáticas?

¿Cómo se estabilizan estos significados?

¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan?

Entre las nociones clave del programa IS están los dominios de experiencia subjetiva, los patrones de interacción y las normas sociomatemáticas.

Dominios de experiencia subjetiva

Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, p. 177) elaboran un constructo teórico que denominan 'dominio de experiencia subjetiva' (DES), para adaptar al campo de estudio del aprendizaje matemático las nociones psicológicas de "script" (esquema, guión), "frame" (marco), "expert system" (sistema experto) y "microworld" (micromundo). Según el modelo DES el sujeto siempre forma experiencias en un contexto, en una situación dada. Estas experiencias son totales, esto es, no están limitadas a la dimensión cognitiva, incluyen también aspectos emocionales y motores. Según su especificidad situacional las experiencias de un sujeto se almacenan en la memoria en DES distinguibles. Por tanto, cada DES está formado inevitablemente por la totalidad y la complejidad de la situación en la misma medida en que ha sido experimentado y procesado como relevante por el sujeto.

Patrones de interacción

Debido a la ambigüedad y a las diferentes interpretaciones posibles, la negociación del significado de una situación particular es frágil. Incluso aunque se comparta un contexto, hay un riesgo permanente de un colapso y desorganización en el proceso interactivo. Los patrones de interacción funcionan para minimizar este riesgo. "Los patrones de interacción se consideran como regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes". (Voigt, 1995, p. 178). Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución.

Normas sociales y sociomatemáticas

Las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por 'obligaciones' o normas no explícitas. En las primeras secciones de este trabajo habíamos indicado los supuestos que colocan las perspectivas interaccionistas sobre el uso del lenguaje (entendido ampliamente), subrayando la importancia de la negociación de los significados como una manera de dar cuenta de cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de las nociones matemáticas y desarrollan creencias y actitudes en relación a las matemáticas.

3.8. DIDÁCTICA FUNDAMENTAL DE LA MATEMÁTICA

Dentro de la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la Educación Matemática, se ha ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia -donde sobresalen los nombres de Brousseau, Chevallard, Vergnaud, ...- un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática.

Fruto de este esfuerzo ha surgido una concepción llamada por sus autores "fundamental" de la Didáctica que presenta caracteres diferenciales respecto a otros enfoques: concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la matemática y a teorías específicas de aprendizaje y búsqueda de paradigmas propios de investigación, en una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos.

Como característica de esta línea puede citarse el interés por establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y métodos y considerando las situaciones de enseñanza - aprendizaje globalmente. Los modelos desarrollados comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

El estudio de las relaciones complejas entre la enseñanza y el aprendizaje, en aquellos aspectos que son específicos de las matemáticas, queda concretado por Laborde (1989) en estas dos cuestiones:

- (1) ¿Cómo podemos caracterizar las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori?
- (2) ¿Qué elementos debe poseer la descripción de un proceso de enseñanza para asegurar que pueda ser reproducido desde el punto de vista del aprendizaje que induce en los alumnos?

Un criterio básico que guía la investigación de estas cuestiones es la determinación del significado

del conocimiento matemático que se desea, a priori, que construyan los alumnos y del que realmente alcanzan durante el proceso de enseñanza.

Como afirma Laborde (1989), existe un amplio consenso sobre el requisito metodológico de utilizar la experimentación en una interacción dialéctica con la teoría. El paradigma experimental es concebido dentro de un marco teórico y las observaciones experimentales son comparadas con el marco, pudiendo ser modificado éste a la luz de la consistencia de los conceptos desarrollados y la exhaustividad en relación a todos los fenómenos relevantes.

Concepción de la Didáctica de la Matemática; enfoque sistémico

En Brousseau (1989, p. 3) se define la concepción fundamental de la Didáctica de la Matemática como:

"una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos".

indicando, como objetos particulares de estudio:

- las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores;
- las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Los didactas que comparten esta concepción de la Didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. Se argumenta, para basar ese enfoque, que el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza siempre ha formado parte de la actividad del matemático, de igual modo que la búsqueda de problemas y situaciones que requiera para su solución una noción matemática o un teorema.

Una característica importante de esta teoría, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Bajo esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de igual manera que ocurre con los fenómenos económicos o sociales.

Chevallard y Johsua (1982) describen el SISTEMA DIDACTICO en sentido estricto formado esencialmente por tres subsistemas: PROFESOR, ALUMNO y SABER ENSEÑADO. Además está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc. Pero, entre los dos, debe considerarse una zona intermedia, la NOOSFERA, que, integrada al anterior, constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno. La noosfera es por tanto "la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza".

Brousseau (1986) considera, además, como componente el MEDIO que está formado por el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Presentaremos, a continuación, una síntesis de los principales conceptos ligados a esta línea de investigación. Estos conceptos tratan de describir el funcionamiento del sistema de enseñanza - y de

los sistemas didácticos en particular - como dependientes de ciertas restricciones y elecciones. Asimismo, tratan de identificar dichas restricciones y poner de manifiesto cómo distintas elecciones producen modos diferentes de aprendizaje desde el punto de vista de la construcción por los alumnos de los significados de las nociones enseñadas.

Aprendizaje y enseñanza: Teoría de Situaciones Didácticas

La teoría que estamos describiendo, en su formulación global, incorpora también una visión propia del aprendizaje matemático, aunque pueden identificarse planteamientos similares sobre aspectos parciales en otras teorías.

Se adopta una perspectiva piagetiana, en el sentido de que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto, pero se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber. Los contenidos son el substrato sobre el cual se va a desarrollar la jerarquización de estructuras mentales.

Pero además, el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas (alumno - saber). El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber pero con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la situación - problema y la gestión por el profesor de esta interacción.

Como indica Balacheff (1990a) se está reconociendo en los trabajos sobre Psicología de la Educación Matemática la importancia crucial que presentan las relaciones entre los aspectos situacionales, el contexto y la cultura y las conductas cognitivas de los alumnos. Esta dimensión situacional, que subyace - explícitamente o no - en cualquier estudio sobre procesos de enseñanza, raramente es considerada como objeto de investigación por sí misma. Pensamos que la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau es una iniciativa en este sentido.

Relación con el saber: Relatividad del conocimiento respecto de las instituciones

Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del Hombre - las sociedades humanas - aprendiendo y enseñando matemáticas. Para Chevallard (1989) el objeto principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos - formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saber enseñado - que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

La problemática del estudio puede ser formulada, globalmente y a grandes rasgos, con la ayuda del concepto de relación con el saber (*rapport au savoir*) (institucional y personal). Para este autor, dado un objeto conceptual, "saber" o "conocer" dicho objeto no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Así la expresión "sabe probabilidad", referida a una persona dada, puede ser cierta si nos referimos a las probabilidades estudiadas en la escuela y falsa si nos referimos al mundo académico, e incluso en éste habría que diferenciar si nos referimos al conocimiento necesario para la enseñanza en los primeros cursos de una carrera técnica o al que sería preciso para realizar investigación teórica sobre Cálculo de Probabilidades.

Hay que distinguir pues entre relación institucional (saber referido al objeto conceptual, que se

considera aceptable dentro de una institución) y relación personal (conocimiento sobre el objeto de una persona dada) que puede estar o no en coincidencia con el institucional para la institución de la que forma parte. Sobre estos conceptos, se plantean dos preguntas fundamentales:

(1) ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la viabilidad didáctica de tal elemento del saber y de tal relación institucional y personal a este elemento del saber?

(2) ¿Cuáles son las restricciones que pueden impedir satisfacer estas condiciones?

El problema central de la Didáctica es para este autor el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos. El estudio de la relación personal es en la práctica fundamental, pero epistemológicamente secundario. Este programa, sin embargo, no puede tener éxito sin una toma en consideración del conjunto de condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

Transposición didáctica

La relatividad del saber a la institución en que se presenta lleva al concepto de transposición didáctica, (Chevallard, 1985), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

En una primera fase de la transposición se pasa del saber matemático al saber a enseñar. Se pasa de la descripción de los empleos de la noción a la descripción de la misma noción y la economía que supone para la organización del saber. La constitución de un texto para fines didácticos, reduce así la dialéctica, esencial al funcionamiento del concepto, de los problemas y los útiles matemáticos. Hay una descontextualización del concepto. También se asiste a un fenómeno de deshistorización, por el cual el saber toma el aspecto de una realidad ahistórica, intemporal, que se impone por sí misma, que, no teniendo productor, no puede ser contestada en su origen, utilidad o pertinencia.

Una vez realizada la introducción del concepto, el funcionamiento didáctico va, progresivamente, a apoderarse de él para hacer "algo", que no tiene por qué tener relación con los móviles de quienes han concebido el programa. Su inmersión en el saber enseñado va a permitir finalmente su recontextualización. Pero ésta no conseguirá, en general, sobre todo en los primeros niveles de enseñanza, ni reconstituir el modo de existencia original de la noción, ni llenar todas y únicamente las funciones para las cuales se había decidido introducirlo.

Por ejemplo, y refiriéndonos al tema de la Probabilidad condicional, es frecuente en los textos de Bachillerato encontrar un nuevo concepto relacionado con ella que es inexistente en el Cálculo de Probabilidades a nivel académico. Nos referimos al denominado "suceso condicionado", del que pueden verse en numerosos textos definiciones similares a la siguiente:

"Al suceso consistente en que se cumpla B habiéndose cumplido A, se le llama suceso B condicionado a la verificación del suceso A y se escribe B/A "

Sin embargo, el álgebra de sucesos es siempre isomorfa a un álgebra de conjuntos y las únicas operaciones posibles en un álgebra de conjuntos son las usuales de unión, intersección y diferencia. El estudio de la transposición didáctica se preocupa, entre otras cuestiones, de detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se han producido, con objeto de subsanarlas y evitar que la enseñanza transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

Conclusión

La exposición sintética que hemos hecho de algunas de las nociones teóricas desarrolladas por los didactas franceses es una muestra de que, bajo nuestro punto de vista, la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática está en camino de constituir un "núcleo firme" de conceptos teóricos que sirva de soporte de un programa de investigación en el sentido de Lakatos. Su capacidad de plantear nuevos problemas de investigación, y de enfocar los problemas clásicos bajo una nueva luz, está siendo puesta de manifiesto a través de la producción científica de todo el colectivo de investigadores. Nociones como las de transposición didáctica, contrato didáctico, obstáculo, se utilizan cada vez con mayor frecuencia en las publicaciones en revistas y actas de congresos internacionales de la especialidad.

En todo caso, parece fuera de duda, que existe en Francia una línea de investigación (en el sentido de Bunge) dentro del campo de la Didáctica de la Matemática, con una problemática fuertemente original, como pone de manifiesto Balacheff (1990), que puede significar una ruptura epistemológica para esta disciplina científica. Está por determinar si alcanzará o no el carácter de paradigma predominante (Kuhn) en un futuro más o menos lejano⁷.

3.9. LA FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DE FREUDENTHAL

Un autor que ha aportado una valiosa y extensa contribución a la educación matemática ha sido Hans Freudenthal⁸. Particularmente, el texto *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Freudenthal, 1983) continúa siendo una referencia importante desde el punto de vista de la investigación didáctica, el desarrollo curricular y la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Dos nociones introducidas por este autor continúan siendo objeto de interés y reflexión. Se trata de la propia "fenomenología didáctica" y de la "constitución de objetos mentales", como contrapartida de la "adquisición de conceptos".

Fenomenología didáctica

Para Freudenthal los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos —fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas. Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos; los números organizan el fenómeno de la cantidad. En un nivel superior el fenómeno de la figura geométrica se organiza mediante las construcciones y demostraciones geométricas, el fenómeno "número" se organiza mediante el sistema decimal.

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en la terminología de Freudenthal, describir este noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. Si en esta

⁷ Gascón (1978) hace una "reconstrucción racional" de la evolución de la *didáctica* fundamental, entendida como el resultado de sucesivas ampliaciones de la *problemática espontánea del profesor*. Asimismo interpreta el *enfoque antropológico* (Chevallard, 1992) como uno de los desarrollos naturales de la didáctica fundamental.

⁸ Remitimos al trabajo de Puig (1997) para una perspectiva más amplia de la obra de Freudenthal.

relación entre noumenon y phainomenon se subraya el elemento didáctico, esto es, si se presta atención a cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza—aprendizaje, se habla de la fenomenología didáctica de ese noumenon.

La constitución de objetos mentales

Habitualmente se considera que para concebir un cierto objeto X , se enseña, o se intenta enseñar, el concepto de X . Para conocer los números, grupos, espacios vectoriales, relaciones, concebidos, se inculcan los conceptos de número, grupo, espacio vectorial, relación, o, mejor dicho, se intentan inculcar. Es bastante obvio, de hecho, que a las edades en que se intenta, esto no es factible. Por esta razón, entonces, se intenta materializar los conceptos desnudos (en una “concretización”). Sin embargo, esas concreciones son usualmente falsas: son demasiado bastas para reflejar los rasgos esenciales de los conceptos que tienen que ser “materializados”, incluso si, mediante una variedad de “materiales concretos”, uno desea dar cuenta de más de una faceta. Su nivel es demasiado bajo, muy por debajo del concepto que se persigue. Didácticamente esto significa que el carro va delante del caballo: enseñar abstracciones haciéndolas concretas.

Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Se ha de pedir la ayuda de la fenomenología didáctica si se quiere desarrollar planes para llevar a cabo un enfoque de ese estilo. En la fenomenología didáctica de la longitud, números, etc., los fenómenos organizados por longitud, número, etc., se muestran lo más ampliamente posible. Para enseñar grupos, en vez de empezar por el concepto de grupo y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto, se debería buscar primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto de grupo. Si en una edad dada dichos fenómenos no están a disposición de los alumnos, uno abandona el intento —inútil— de inculcar el concepto de grupo.

Para este enfoque contrario Freudenthal evita el término adquisición de concepto. En su lugar habla de la constitución de los objetos mentales, lo que, desde su punto de vista, precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos.

La crítica que hace Freudenthal al enfoque de "adquisición de conceptos" nos parece que se refiere a una manera de concebir las matemáticas como estructuras conceptuales interpretadas como objetos culturales, fijados mediante definiciones y propiedades, descontextualizadas y despersonalizadas. En un enfoque tradicional de la enseñanza se pretende que el alumno aprenda matemáticas, reducidas a esta visión cultural, como producto terminado y fijado discursivamente. En ese proceso de enculturación de los objetos matemáticos se ha perdido su origen como recursos para la resolución de problemas, externos o internos. Esto es, están desligados de la praxis matemática; el concepto como logos, sin la praxis de donde proviene.

Freudenthal defiende poner por delante la fenomenología, o sea, las situaciones problemas que inducen a la acción matemática, al desarrollo de maneras de actuar, que en una fase posterior se regularán mediante el discurso teórico correspondiente. Sus propuestas de acción didáctica se centran en poner al estudiante ante las situaciones-problemas (fenómenos), con lo cual se comenzará a constituir "objetos mentales", es decir, una estructura cognitiva personal que posteriormente podrá ser enriquecida con la visión discursiva cultural.

3.10. OTRAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN RELEVANTES

Las investigaciones sobre la enseñanza y el currículo matemático constituyen un área de estudio en Didáctica de la Matemática de extraordinario interés (Rico, 1997). Para el mundo de la práctica el currículo y la instrucción son el centro de la acción ya que se orientan hacia necesidades vitales para mejorar los programas de la matemática escolar, planteándose, por tanto, cuestiones básicas para la investigación.

La investigación sobre currículo e instrucción, utilizando resultados de otros campos de la Educación Matemática - teorías del aprendizaje fundamentalmente - trata de ser una indagación sistemática para comprender o mejorar:

- a) la selección y estructuración de las ideas matemáticas a enseñar;
- b) la presentación de esas ideas a los alumnos;
- c) la evaluación de la efectividad del programa y del rendimiento de los alumnos.

En síntesis, se interesa por comprender las combinaciones de contenido, secuenciación, estrategias y sistemas de impartición más efectivos para distintos perfiles de aptitudes de los alumnos.

Un estudio pormenorizado de este campo, que incluye la descripción de la problemática y una valoración de resultados, se puede encontrar en Fey (1980) y Romberg y Carpenter (1986). Asimismo, resaltamos los trabajos de Rico (1990; 1997).

Una característica de las investigaciones sobre el currículo y la enseñanza es su extraordinaria complejidad. Por ello, como indica Fey, los diseñadores de materiales curriculares o de procedimientos de instrucción, con frecuencia, basan sus esfuerzos en la creatividad personal, en juicios intuitivos y en la elaboración de tests informales. Se dispone de poca investigación que explique la dinámica del sistema que pudiese transformar la mezcla de necesidades, intereses y valores en un currículo científicamente fundamentado. Así, la selección de los temas de la matemática escolar, se determina por:

- la estructura interna de la disciplina, sin un análisis epistemológico riguroso;
- el interés público, medido de un modo informal;
- la recomendación de expertos prestigiosos;
- los libros de texto, elaborados a veces con escasa fundamentación científica.

En consecuencia, no parece existir todavía un fundamento teórico y experimental consistente para la investigación sobre el currículo y la instrucción. Entre las cuestiones importantes y estrategias para las investigaciones futuras, Fey (1980) citaba, precisamente, como tema prioritario la búsqueda de una teoría de la instrucción, o sea el diseño de modelos teóricos que relacionen las principales variables curriculares e instructivas.

El objetivo más perseguido en este campo ha sido el de buscar el mejor método de instrucción; pero ha sido improductivo en la identificación de procedimientos generales apropiados, secuenciación de estrategias o formas de presentación. En consecuencia, la investigación se está orientando hacia análisis más microscópicos del proceso curricular y hacia la búsqueda de los efectos que se esperan de una aproximación particular en situaciones y contenidos particulares. Este es el enfoque que se

aprecia en la escuela francesa de didáctica de la matemática para las cuestiones curriculares.

Otras investigaciones sobre currículo e instrucción se han orientado hacia cuestiones generales, independientes de los contenidos particulares. Romberg y Carpenter (1986) afirman que la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza no han estado directamente relacionadas con las matemáticas y que los casos que han versado sobre este contenido se han centrado en mejorar la enseñanza de la matemática tradicional haciéndola más eficiente. Ahora bien, tales estudios se han basado en concepciones de la matemática y del aprendizaje ajenos a la perspectiva y resultados de las investigaciones cognitivas y, por tanto, sus hallazgos positivos podrían incluso ser irrelevantes o posiblemente perjudiciales.

Las ideas sobre el contenido que se enseña son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Romberg, Small y Carnahan (1979) localizaron cientos de estudios que valoraban la efectividad de casi todos los aspectos concebibles de la conducta docente, pero encontraron pocos modelos de instrucción que incluyeran la componente del contenido. Sin embargo, se reconoce la necesidad de acometer investigaciones que tengan en cuenta el contenido específico y las técnicas didácticas apropiadas para tal contenido. En general, los estudios llevados a cabo dentro del paradigma proceso - producto relacionados con la enseñanza de las matemáticas no han logrado dotar a los profesores de una lista de conductas examinables que les hiciera más competentes y les asegurase que sus alumnos aprendan. En cierto sentido, esta investigación refleja los estadios iniciales de lo que Kuhn (1969) denominó "la ruta de la ciencia normal". En ausencia de un paradigma o de un conjunto de principios organizativos, todos los hechos, que posiblemente atañesen a un área problemática, es posible que parezcan de igual relevancia.

Los estudios sobre enseñanza de las matemáticas hechos bajo un paradigma interpretativo, aunque son considerablemente menos numerosos que los positivistas, son interesantes ya que a través de diferentes lentes conceptuales se iluminan diversos aspectos de la enseñanza de la matemática. Como ejemplo puede citarse la línea de investigación sobre el pensamiento del profesor acerca de la Matemática y su enseñanza y el efecto de estas concepciones sobre su acción docente. Esta línea de trabajo está adquiriendo un interés creciente como puede verse en el "handbook" editado por Wood (2008).

Entre las teorías generales que se han proyectado sobre la Educación Matemática, y que sólo han sido mencionadas, destacamos el conductismo, el aprendizaje por descubrimiento (Bruner) y el aprendizaje significativo (Ausubel). La falta de espacio y el enfoque que hemos dado al Capítulo nos impide hacer una presentación con el detalle que requieren. Una síntesis de ellas, desde una perspectiva de la Didáctica de la Matemática, puede encontrarla el lector en el texto de Orton (1988), así como de la teoría del aprendizaje matemático de Dienes. Otra teoría relevante para la investigación didáctica es la de los niveles de razonamiento de Van Hiele que puede consultarse en Jaime y Gutiérrez (1990).

4. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO SABER CIENTÍFICO, TECNOLÓGICO Y TÉCNICO

4.1. DISCIPLINA AUTÓNOMA, PLURIDISCIPLINARIEDAD Y TRANSDISCIPLINARIEDAD

Una vez descritas las principales corrientes de investigación dentro de la teoría de la Didáctica de la Matemática, en esta Sección trataremos de realizar una reflexión final acerca de la naturaleza de este campo como área de conocimiento. ¿Se trata de un saber meramente práctico, una tecnología fundada y dependiente de otras ciencias, o, por el contrario, existen problemas cuyas características requieren un nivel de análisis teórico y una metodología propias de un verdadero saber científico?

Esta reflexión epistemológica, que es esencial para orientar adecuadamente la investigación didáctica, ya que condiciona la formulación de las cuestiones centrales de la misma (Godino, 1990; 1996), apenas ha sido tratada en la bibliografía. Destaca, sin embargo, el trabajo de Brousseau (1989) con el significativo título "La tour de Babel" y las ideas de Steiner, que a continuación exponemos.

Ante la extrema complejidad de los problemas de la Educación Matemática, Steiner (1985) indica que se producen dos reacciones extremas:

- los que afirman que la Didáctica de la Matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte;
- los que, pensando que es posible la existencia de la Didáctica como ciencia, reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspecto parcial (análisis del contenido, construcción del currículo, métodos de enseñanza, desarrollo de destrezas en el alumno, interacción en el aula,...) al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma.

De manera parecida se expresa Brousseau (1989) indicando una primera acepción de la Didáctica de la Matemática, que consiste en la identificación de la didáctica como el arte de enseñar - conjunto de medios y procedimientos que tienden a hacer conocer, en nuestro caso, la matemática.

Brousseau (1989), sin embargo, distingue dos concepciones de carácter científico que denominaremos concepción pluridisciplinar aplicada y concepción autónoma (calificada por Brousseau como fundamental o matemática). Como bisagra entre estos dos grupos se distingue también una concepción tecnicista, para la que la didáctica serían las técnicas de enseñanza, "la invención, descripción, estudio, producción y el control de medios nuevos para la enseñanza: currícula, objetivos, medios de evaluación, materiales, manuales, logicales, obras para la formación, etc."

En el punto de vista que hemos denominado concepción pluridisciplinar de la didáctica, que coincidiría con la segunda tendencia señalada por Steiner, ésta aparece como una etiqueta cómoda para designar las enseñanzas necesarias para la formación técnica y profesional de los profesores. La Didáctica como área de conocimiento científico sería "el campo de investigación llevado a cabo sobre la enseñanza en el cuadro de disciplinas científicas clásicas", como son: la psicología, la semiótica, sociología, lingüística, epistemología, lógica, neurofisiología, pedagogía, pediatría, psicoanálisis, ... En este caso, la naturaleza del conocimiento didáctico sería el de una tecnología

fundada en otras ciencias.

La concepción autónoma tiende a integrar todos los sentidos precedentes y a asignarles un lugar en relación a una teoría unificadora del hecho didáctico, cuya fundamentación y métodos serían específicos, pretendiendo una justificación endógena. Dicha concepción pudiera ser el comienzo de una respuesta a la necesidad señalada por Steiner "de una base teórica que nos permita una mejor comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subrayan las diferentes definiciones de Educación Matemática en uso, para analizar las relaciones entre estas posiciones y conjuntarlas en una comprensión dialéctica del campo total". (Steiner, 1985, pg.11).

En la escuela francesa de Didáctica se observa una aspiración de construir un área de estudio científico propio que no esté encorsetado y dependiente del desarrollo de otros campos científicos, no siempre consistentes. Contrasta este objetivo con la postura de Steiner quien no es partidario de insistir en la búsqueda de teorías internas (home-theories) ya que ve en ellas un peligro de restricciones inadecuadas. La naturaleza del tema y sus problemas reclama una aproximación interdisciplinar y considera erróneo no hacer un uso significativo del conocimiento que otras disciplinas ya han producido sobre aspectos específicos de aquellos problemas.

En el trabajo ya citado, Steiner afirma que la Educación Matemática debe tender hacia lo que Piaget llama transdisciplinariedad, que cubriría no solo las interacciones o reciprocidades entre proyectos de investigación especializados, sino que situaría estas relaciones dentro de un sistema total sin límites fijos entre disciplinas.

Lesh y Sriramn (2010, p. 124) reflexionan también sobre la naturaleza del campo de investigación de la educación matemática. ¿Deberían los educadores matemáticos pensar sobre sí mismos como siendo psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían considerar como los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras? ¿O más bien se deberían considerar como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares – y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales como también por la necesidad de elaborar teorías relevantes? La posición defendida por estos autores es considerar la educación matemática en este último sentido, o sea, como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Del análisis realizado de las características de la didáctica de las matemáticas nos lleva a pensar que se trata de una disciplina tecnocientífica. Se entiende por Tecnociencia, "Un sistema de acciones regladas, informacionales y vinculadas con la ciencia, la ingeniería, la política, la empresa, los ejércitos, etc. Dichas acciones son llevadas a cabo por agentes con ayuda de instrumentos y están intencionalmente orientados a la transformación de otros sistemas con el fin de conseguir resultados valiosos evitando consecuencias y riesgos desfavorables" (Echeverría, 2003).

4.2. CONEXIÓN TEORÍA-PRÁCTICA

Brousseau (1988) analiza la relación que puede existir entre su concepción de la Didáctica de la Matemática, como teoría fundamental de la comunicación de los conocimientos matemáticos, frente a otras perspectivas y orientaciones, afirmando que no hay ninguna incompatibilidad. Por el contrario, es una concepción que favorece la integración de aportaciones de otros dominios y su

aplicación a la enseñanza, y que establece con la práctica una relación sana de ciencia a técnica y no de prescripción a reproducción.

No condena, a priori, ninguna acción en favor de la enseñanza. Pero es preciso comprender que es un error querer a toda costa obligar a la didáctica a comprometerse en cada una de estas acciones y a jugar un papel que no le corresponde. En el mejor de los casos, se le proponen desafíos que no se osaría exigir a ciencias que están, sin embargo, mucho más avanzadas. En el peor de los casos, se corre el riesgo de confiar a sus expertos responsabilidades por encima de sus fuerzas y de reproducir errores semejantes a los que se han visto en otras partes (por ejemplo, en economía, ...). Como se afirma en Godino (1990), la mejora efectiva de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas depende del funcionamiento óptimo de otros elementos, ajenos a la propia investigación didáctica, condicionantes de la toma de decisiones en el sistema didáctico. Particularmente, dada la influencia sobre las decisiones del profesor en el aula de factores como las directrices curriculares, los procedimientos de evaluación externa, la difusión de materiales didácticos, etc., se considera imprescindible facilitar la intercomunicación de los agentes responsables de ellos con los investigadores, así como la potenciación de la investigación didáctica.

De esta investigación didáctica, entendida bajo una perspectiva científica, no podemos esperar la producción de situaciones didácticas modélicas que el profesor debe imitar, "pero es razonable pensar que el desarrollo de la investigación proporcionará algún conocimiento que capacitará a los profesores para afrontar el problema didáctico difícil de conducir la vida de esta sociedad cognitiva original: la clase de matemáticas" (Balacheff, 1990b, p. 7)

5. PARADIGMAS, PROBLEMAS Y METODOLOGIAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA⁹

Cuando un educador matemático o un grupo de profesores se interesan por realizar una investigación, tratando de dar una categoría de trabajo científico a su labor, se encuentra, desde el primer momento, ante el problema epistemológico de la naturaleza de la Didáctica de la Matemática y de los paradigmas metodológicos correspondientes. Estas dos cuestiones afectan plenamente a la formulación de los problemas de investigación y a la determinación de la importancia relativa de los mismos.

En nuestro caso, debido a la falta de tradición investigadora y de paradigmas consolidados en este campo, es aún más importante la clarificación de las cuestiones que han comenzado a configurar la Teoría de la Educación Matemática (Steiner et al. 1984), y de los posibles métodos de investigación de las mismas, ya que condicionan los tipos de investigaciones hacia los cuales podemos dedicar nuestros esfuerzos.

⁹ Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Cuadrante*, 2 (1), pp. 9-22.

5.1. LA PERSPECTIVA SISTÉMICA

La característica principal de la Didáctica de la Matemática es la de su extrema complejidad. Como describe Steiner, esta disciplina comprende "el complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno" [Steiner (1984), p. 16]

Esto ha llevado a distintos autores al uso de la Teoría de Sistemas para su consideración teórica. La noción interdisciplinar de sistema, adoptada por todas las ciencias sociales, se revela necesaria siempre que se tengan razones para suponer que el funcionamiento global de un conjunto de elementos no puede ser explicado por el simple agregado de los mismos, y que incluso el comportamiento de estos queda modificado por su inclusión en el sistema.

En la didáctica de la matemática el enfoque sistémico es claramente necesario, pues, además del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto, y de los propios sistemas conceptuales, hay que considerar los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado.

Una aproximación sistémica para los problemas didácticos es esencial ya que, como afirma M. Artigue (1984):

- muestra que la Didáctica de la Matemática se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe, como consecuencia, desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, aunque sin despreciar los aportes de las disciplinas conexas, en particular la psicología y la epistemología;
- muestra, reagrupándolas en el seno de una estructura común, lo que liga entre sí a las didácticas de las diversas disciplinas pero, al mismo tiempo, indica lo que las separa: saberes diferentes cuya apropiación y transmisión plantea problemas que son, en sí mismos, específicos del conocimiento planteado.

Steiner señala una característica adicional de la visión sistémica de la didáctica de las matemáticas, al indicar que es autoreferente: "con respecto a ciertos aspectos y tareas, la educación matemática como disciplina y como campo profesional es uno de estos subsistemas. Por otro lado, es también el único campo científico que estudia el sistema total. Una aproximación sistémica con sus tareas de auto-referencia debe considerarse como un meta-paradigma organizativo para la educación matemática. Parece ser también una necesidad para manejar la complejidad de la totalidad, pero también porque el carácter sistémico se muestra en cada problema particular del campo" (Steiner, 1985, p. 11).

La concepción fundamental o matemática tiende a integrar todos los sentidos precedentes y a asignarles un lugar en relación a una teoría unificadora del hecho didáctico, cuya justificación y métodos serían específicos y endógenos. Dicha concepción pudiera ser el comienzo de una respuesta a la necesidad señalada por Steiner "de una base teórica que nos permita una mejor comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subrayan las diferentes definiciones de educación matemática en uso, para analizar las relaciones entre estas posiciones y conjuntarlas en una comprensión dialéctica del campo total". (Steiner, 1985, p.11).

La revisión de la literatura y la síntesis que realiza Hurford (2010) sobre la aplicación de nociones teóricas de la teoría de sistemas complejos y dinámicos para entender el funcionamiento de los procesos de aprendizaje muestra, de manera patente, que las visiones de Steiner sobre el enfoque sistémico en educación matemática estaban plenamente justificadas. “Ha llegado el tiempo y las herramientas necesarias están disponibles para que los investigadores en educación construyan modelos del aprendizaje que abarquen la inherente complejidad de manera que hasta ahora no ha sido posible. Estamos preparados para superar los modelos que reducen el aprendizaje al simple emparejamiento de estímulos y respuestas o a colecciones estáticas de “datos fragmentados” y escenas aisladas de aprendizaje del estudiante. Las perspectivas en teoría de sistemas sobre el aprendizaje nos están proporcionando las perspectivas y modelos que necesitamos para dar ese paso” (Hurford, 2010, p. 586-7).

5.2. CONCEPCIONES DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA Y PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN

La investigación en Didáctica de la Matemática, al igual que en otros campos (medicina, agricultura, administración, ...) requiere tanto de desarrollos teóricos como prácticos, esto es, tanto el estudio de los fundamentos del desarrollo cognitivo y las diferencias individuales para el aprendizaje de las matemáticas como de los problemas de toma de decisiones en el aula, la escuela y los programas de formación de profesores (Begle y Gibb, 1980). Se trata de un continuo que va desde la investigación pura, no directamente aplicable a la investigación y desarrollo de tipo tecnológico hasta la elaboración de materiales para la instrucción, después de su correspondiente ensayo y evaluación en entornos tanto de laboratorio como en clases normales.

Las diversas concepciones a que hemos hecho referencia anteriormente se distinguen también por los tipos de problemas que se formulan. Pasaremos a describir, a grandes rasgos, las características de algunos de estos problemas en cada una de las tres concepciones tecnicista, pluridisciplinar y fundamental, así como el dilema teoría-aplicación en el seno de las mismas.

Situados en la posición tecnicista, la investigación se considera como medio de mejora de la planificación de los currículos y la formación de profesores. Este enfoque práctico, de investigación aplicada, está presente en los cuatro niveles con que Burkhardt (1988) clasifica las investigaciones, respecto al número de estudiantes implicados en los mismos:

- Niveles de aprendizaje: proceso de aprendizaje, dificultades y errores, en estudios de casos o de muestras.
- Posibilidades didácticas: Ensayos de innovaciones curriculares con una o pocas aulas; no influye la variable profesor.
- Efectividad de la enseñanza: Introducción de la variable profesor y estudios comparativos de métodos alternativos.
- Cambio curricular: y su proceso de implementación en gran escala.

En el enfoque pluridisciplinar, los problemas fundamentales vienen determinados con frecuencia por la ciencia desde la que se contempla el proceso didáctico. "Entre los que piensan que la educación matemática existe como ciencia, encontramos una variedad de definiciones diferentes, por ejemplo,

el estudio de las relaciones entre matemática, individuo y sociedad, la reconstrucción de la matemática actual a nivel elemental, el desarrollo y evaluación de cursos matemáticos, el estudio del conocimiento matemático, sus tipos, representación y crecimiento, el estudio del aprendizaje matemático de los niños, el estudio y desarrollo de las competencias de los profesores, el estudio de la comunicación e interacción en las clases. etc." (Steiner (1985), pg. 11).

En la concepción matemática o fundamental, la didáctica se presenta como "una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos" (Brousseau, 1989; pag. 3).

Sus objetos de estudio particulares son:

- las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores.
- las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Un rasgo característico de la problemática de investigación derivada de la concepción fundamental, que puede verse con detalle en (Balachef, 1990), es su tendencia hacia la teorización y a la construcción de modelos. "El verdadero objetivo de la didáctica es la construcción de una teoría de los procesos didácticos que nos proporcione dominio práctico sobre los fenómenos de la clase" (Chevallard, 1980; p. 152).

5.3. EL DILEMA TEORÍA-APLICACIÓN EN LAS CONCEPCIONES DE LA DIDÁCTICA

En la exposición que hemos realizado de las concepciones de la didáctica apreciamos el debate dialéctico entre las tendencias hacia la producción de conocimientos teóricos y conocimientos prácticos. En este sentido puede resultar clarificador utilizar las etiquetas "Didáctica Teórica" y "Didáctica Técnica (o Práctica)": la primera sería la disciplina académica que se interesa por describir y explicar los estados y evolución de los sistemas didácticos y cognitivos, mientras que la segunda se interesa por la problemática de la toma de decisiones en el aula, por la acción reflexiva en un lugar y un tiempo específicos.

En la postura del teórico, lo esencial es conocer cómo funciona el sistema y describir leyes de carácter general que expliquen su dinámica. El descubrimiento de estos principios debe ser prioritario, ya que su aplicación llevaría casi de modo inmediato a la solución de los problemas concretos; tratar de resolverlos desconociendo cómo funciona el sistema puede ser un esfuerzo vano condenado al fracaso.

El punto de vista del práctico, del técnico, del investigador aplicado, pensamos que es bien distinto. Hay un problema que resolver aquí y ahora y no es posible esperar a que la ciencia teórica descubra los principios generales que explique esta clase de fenómenos. Este debate teoría-práctica no es exclusivo de la Didáctica, sino que es visible en muchas ciencias actuales: medicina, economía, etc...

En el caso de la Didáctica de las Matemáticas, tanto la concepción tecnicista como la concepción pluridisciplinar (tradicional y dominante) adoptan un punto de vista de "ciencia aplicada"; los principios teóricos generales vienen dados por otras ciencias básicas, especialmente la psicología, pedagogía, sociología, ... La didáctica especial de las matemáticas debe aplicar estos principios al

caso particular de las nociones y destrezas matemáticas y dar solución al problema de la enseñanza de las matemáticas.

La concepción matemática o fundamental de la Didáctica de las Matemáticas se revela contra este reduccionismo atacando, precisamente, el punto esencial: las teorías generales psicopedagógicas como el conductismo, constructivismo, teorías del desarrollo (Piaget, Bruner, ...) aplicadas a la enseñanza- aprendizaje de contenidos específicos no son suficientes. El papel jugado por el saber que se quiere transmitir es fundamental, hasta el punto que, en general, invalida dichos principios. Por tanto, es preciso tratar de construir teorías propias específicas del contenido que explique el funcionamiento del sistema desde la perspectiva del saber. Este punto de vista es, asimismo, claramente sostenido por Freudenthal: "Desconfío fuertemente de las teorías generales del aprendizaje, incluso si su validez se restringe al dominio cognitivo. La matemática es diferente - como he enfatizado anteriormente -, y una de las consecuencias es que no hay en otros campos un equivalente didáctico a la invención guiada" (Freudenthal, 1991, p. 138).

Puesto que se hallan aún en una primera etapa de desarrollo del marco teórico, la escuela francesa reclama una atención preferente hacia las cuestiones teóricas relegando a un papel secundario las cuestiones técnicas, entre otros motivos porque no se disponen de puntos de referencia seguros para realizar propuestas fundamentadas.

Por nuestra parte, y teniendo en cuenta la complejidad del sistema global de enseñanza, que admite también la descomposición teoría, desarrollo y práctica (Steiner, 1985), pensamos que la optimización de su funcionamiento requiere el esfuerzo conjunto de las distintas perspectivas de investigación. Las investigaciones tanto teóricas como aplicadas constituyen aportaciones necesarias. No obstante, los conceptos teóricos y fenómenos didácticos identificados por la concepción fundamental pueden tener un papel especial, por el punto de vista matemático que adopta, ya que de la difusión del conocimiento matemático se trata.

Finalmente, la conexión teoría - práctica, el cambio social que en última instancia reclaman los conocimientos obtenidos por la investigación teórica, precisa la creación de una "interface" que apenas está desarrollada. ¿Puede estar formada por un reconocimiento explícito del tipo de investigación - acción, hecha con una finalidad de cambio social y de formación?. Las investigaciones llevadas a cabo con la participación de profesores en los equipos de investigación pueden constituir esa "interface" del sistema de enseñanza.

En este sentido se expresa Kilpatrick (1988, p. 204), quien aboga por una colaboración más estrecha entre investigadores y profesores: "Una barrera continua para el cambio es el fallo de los investigadores y profesores en nuestro campo para caminar juntos en la empresa de investigación ... "parece que algo no funciona teniendo a un grupo decidiendo qué hacer y otro haciéndolo". Interpretamos esto como una toma de postura hacia un paradigma más próximo a la posición socio-crítica de la investigación - acción (Carr y Kemmis, 1986) si se quiere progresar en la optimización del funcionamiento del sistema en su conjunto.

5.4. PARADIGMAS DE INVESTIGACIÓN

Al tratar de hacer una valoración crítica sobre la naturaleza de los resultados de la investigación en Didáctica de la Matemática nos encontramos con el hecho del carácter relativo de los mismos a las

circunstancias particulares de los participantes (profesores y alumnos) y del contexto. Como señala Howson (1988, p. 269) "un descubrimiento empírico en educación matemática no sólo carece de universalidad respecto al contexto, sino incluso de validez a lo largo del tiempo" ya que la sociedad en que tiene lugar la enseñanza de la matemática cambia constantemente.

Otra circunstancia que afecta profundamente a la validez y significación de los resultados de las investigaciones es la cuestión de la perspectiva bajo la cual se lleva a cabo, esto es, el problema del paradigma de investigación. En este sentido, y siguiendo a Shulman (1986), cabe citar los dos polos extremos:

- el enfoque positivista o proceso-producto, que trata, especialmente, de encontrar leyes y de confirmar hipótesis acerca de las conductas y procedimientos que se asocian con ganancias en el rendimiento de los alumnos;
- el enfoque interpretativo, orientado a la búsqueda del significado personal de los sucesos, el estudio de las interacciones entre las personas y el entorno, así como los pensamientos, actitudes y percepción de los participantes.

El programa positivista o proceso-producto utiliza preferentemente los métodos cuantitativos, generalmente asociados con las mediciones sistemáticas, diseños experimentales, modelos matemáticos, mientras que el programa interpretativo (ecológico, etnográfico, ...) está asociado con las observaciones naturalistas, el estudio de casos, la etnografía y los informes de tipo narrativo. (Erickson, 1986)

Para Eisenhart (1988) los rasgos diferenciales entre ambos enfoques son:

- el modo limitado en que el positivista (comparado con los etnógrafos) entran en las vidas o actividades de los sujetos que estudian;
- escaso interés que los investigadores de la primera tendencia han tenido en los significados intersubjetivos que se puedan constituir en las escuelas o aulas que estudian;
- la investigación positivista raramente usa las teorías socioculturales para ayudarse a interpretar sus descubrimientos;
- dentro del enfoque interpretativo, los antropólogos educacionales, prestan una atención limitada a:
 - las capacidades cognitivas
 - teorías del desarrollo cognitivo y procesamiento de la información
 - rehúsan la manipulación de variables y el forzamiento de los sucesos naturales.
 - raramente se preocupan de intentar hacer algo sobre los problemas educacionales.

Estos programas tan dispares en sus planteamientos han coexistido y aún lo hacen en el campo de la enseñanza y aprendizaje en general, y por tanto, también en la Matemática, especialmente en las investigaciones llevadas a cabo bajo la perspectiva que hemos denominado pluridisciplinar. Pero, como indican Goetz y LeCompte (1988), en general, muchas de las actuales investigaciones educativas, en especial los diseños más creativos, pueden catalogarse en un punto intermedio entre ambos paradigmas. Estos autores prefieren definir el modelo de investigación por cuatro dimensiones o modos suposicionales: deductivo- inductivo, generativo -verificativo, constructivo - enumerativo y subjetivo-objetivo.

La dimensión deductivo-inductivo indica el lugar de la teoría en la investigación: si se parte de teorías previas o éstas son generadas de la investigación. La dimensión generativa verificativa se refiere a la medida en que los resultados de un grupo son generalizables a otros. La investigación verificativa quiere establecer generalizaciones que van más allá de un sólo grupo. Los modos de formulación y diseño de las variables y categorías de análisis definen la dimensión constructiva enumerativa y la subjetiva-objetiva se refiere a los constructos bajo análisis en relación con los participantes estudiados.

Además de los anteriores, hemos de distinguir un tercer paradigma socio-critico, partidario de conectar la investigación con la práctica, con la vista puesta hacia su cambio en la dirección de una mayor libertad y autonomía de los participantes. No es suficiente penetrar en una clase y observar el encuentro educacional. Se precisa también guiar directamente la práctica; esto precisa una mayor colaboración entre el profesor y el investigador (Kilpatrick, 1988).

Un ejemplo de integración entre los diversos paradigmas expuestos viene dado en algunas de las investigaciones desarrolladas por la escuela francesa de Didáctica de la Matemática. Pueden verse, por ejemplo, los trabajos de Brousseau (1986), Douady (1984) y Artigue (1989). Como se ha indicado, el problema principal para la concepción matemática o fundamental es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber con el fin de su optimización, de su control y reproducción en situación escolar esencialmente. Esto va a conducir a conceder una importancia particular al objeto de la interrelación entre los dos subsistemas (saber - alumno) que es la situación-problema y la gestión de esta interacción por el profesor.

Los supuestos subyacentes a este enfoque metodológico son:

- la complejidad del fenómeno que hace necesario un estudio holístico y de casos, así como disponer de técnicas múltiples de recogida de datos;
- la especificidad respecto al saber matemático, que hace posible la generación de hipótesis previas, a partir del estudio de dicho saber y de su génesis epistemológica.

Estos supuestos le llevan a incorporar en su programa de investigación rasgos de los distintos paradigmas considerados, como pondremos de manifiesto a continuación.

Rasgos del paradigma positivista - experimental:

- hay un tratamiento: se preparan con cuidado las lecciones, los profesores, las situaciones, la forma de trabajar, con la finalidad de provocar efectos específicos;
- se formulan hipótesis previas generadas a partir de una teoría general y del estudio "a priori" de la situación, la cual, a su vez, se construye basada en la teoría;
- se apoyan fuertemente en los métodos estadísticos, especialmente las técnicas del análisis multivariante de datos, aunque dichos datos sean esencialmente de tipo cualitativo. Se intenta contrastar o verificar las hipótesis iniciales. En este sentido se satisface la recomendación de Kilpatrick (1981) en el sentido de que los investigadores en educación matemática deben estudiar nuevas técnicas de análisis exploratorio de datos y presentación de resultados.

Rasgos del paradigma ecológico- etnográfico:

- enfoque holístico: estudio sistémico y global del fenómeno;
- datos de tipo cualitativo, interés en las variables de proceso y en las interrelaciones entre los

- componentes del sistema;
- posibilidad de generar nuevas hipótesis en el transcurso de la investigación;
 - estudio de casos. No se usa el muestreo aleatorio. Se describe con detalle el grupo estudiado;
 - técnicas de recogida de datos múltiples, muchas de ellas de tipo etnográfico, como es la observación.
 - uso de técnicas de análisis de datos cualitativos: definición de categorías, aunque con el propósito de cuantificación y análisis estadístico.

Resumiendo respecto a los modos suposicionales de Goetz y LeCompte (1988), podríamos decir que el paradigma de investigación implementado por la concepción matemática de la Didáctica de la Matemática se sitúa en los extremos objetivo y enumerativo, estando en un punto intermedio entre deductivo e inductivo y entre generativo y enumerativo.

5.5. Elementos para una perspectiva de síntesis

Consideramos que el punto de vista sistémico debe conducir a la superación de los posibles antagonismos entre las distintas concepciones y paradigmas. Es necesario un compromiso integrador entre Teoría - Desarrollo - Práctica, entre positivismo, interpretativismo y criticismo. Esto lo da la consideración de las distintas concepciones como puntos de vistas complementarios de una acepción más amplia. "El concepto de complementariedad se presenta como útil adecuado para comprender las relaciones entre diferentes tipos y niveles de conocimiento y actividad" (Steiner, 1985; p. 15)

Las concepciones pluridisciplinar y fundamental parecen compatibles y complementarias. La consideración de la Didáctica de la Matemática como parte de las matemáticas puede permitir una "didáctica matemática" de las matemáticas, de igual modo que existe una lógica matemática o una metamatemática. Esta ciencia no puede sustituir la aportación indispensable de las otras ciencias. No hay un sólo aspecto, una sola categoría de fenómenos en las situaciones de enseñanza; la didáctica (en el sentido fundamental) no ha mostrado claramente todavía los fenómenos que toma a su cargo con conceptos y métodos específicos (Brousseau, 1989).

Inversamente, la integración de los conocimientos exógenos es indispensable y no se puede hacer sino bajo el control de una teoría específica. Asimismo, permite "establecer con la práctica de la enseñanza una relación sana de ciencia a técnica y no de prescripción a reproducción." (Brousseau, 1989; p. 67)

En cuanto a los métodos, Kilpatrick (1981) aboga también por un eclecticismo. No se pueden abandonar las técnicas cuantitativas de tipo estadístico (cuando no han comenzado sino a aplicarse) por los métodos etnográficos exclusivos. El análisis exploratorio de datos lo presenta como complemento enriquecedor de los métodos cuantitativos que los educadores matemáticos deben utilizar. Asimismo, recomienda el planteamiento de líneas de investigación convergentes en las que los estudios exploren una cuestión desde una variedad de perspectivas usando métodos variados, en lugar de insistir en estudios de replicación.

En resumen, las cuestiones planteadas constituyen aspectos esenciales de los puntos propuestos por Steiner (1985) para el programa de desarrollo de la "Teoría de la Educación Matemática":

(1) La identificación y elaboración de problemas básicos en la orientación, fundamentación, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina.

(2) El desarrollo de una aproximación comprensiva de la Educación Matemática en su totalidad, contemplándola como un sistema interactivo que comprende la investigación, el desarrollo y la práctica.

(3) Desarrollo de su papel dinámico que regule el intercambio teoría-práctica y la cooperación interdisciplinar.

6. CONSOLIDACIÓN DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA¹⁰

En este apartado incluimos nuestra visión sobre el estado actual de desarrollo de la didáctica de la matemática como disciplina científica, para lo cual analizamos algunos indicadores empíricos y argumentaciones a favor de tres tesis:

(1) La didáctica de la matemática ha logrado en la actualidad una posición consolidada desde el punto de vista institucional.

(2) Existe una gran confusión en las agendas de investigación y en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente.

(3) Existe un divorcio muy fuerte entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Pero antes de proceder a este análisis nos parece necesario aclarar los aspectos o dimensiones que componen la educación matemática.

6.1. ASPECTOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Consideramos que la educación matemática es un sistema social, heterogéneo y complejo en el que es necesario distinguir al menos tres componentes o campos:

(a) La acción práctica y reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

(b) La tecnología didáctica, que se propone desarrollar materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles.

(c) La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (profesor, estudiantes y conocimiento matemático).

Estos tres campos se interesan por un mismo objeto -el funcionamiento de los sistemas didácticos-, e incluso tienen una finalidad última común: la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Pero la perspectiva temporal, los objetivos, los recursos disponibles, sus reglas de funcionamiento y las restricciones a que están sometidos, son intrínsecamente distintos. El mundo de

¹⁰ Godino, J. D. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. En, A. Martínón (2000). *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp. 347-350). Madrid: Nívola.

la acción práctica es el campo propio del profesor, el cual tiene a su cargo uno o varios grupos de estudiantes a los cuales trata de enseñar matemáticas. El primer objetivo de un profesor es mejorar el aprendizaje de sus alumnos, de modo que estará principalmente interesado en la información que pueda producir un efecto inmediato sobre su enseñanza. El segundo componente, que hemos denominado tecnológico (o investigación aplicada) es prescriptivo, ya que está más comprometido con la elaboración de dispositivos para la acción y es el campo propio de los diseñadores de currículos, los escritores de manuales escolares, materiales didácticos, etc. Finalmente la investigación científica (básica, analítica y descriptiva) está particularmente comprometida con la elaboración de teorías y se realiza usualmente en instituciones universitarias.

Pasamos, a continuación, a desarrollar las tres tesis anunciadas.

6.2. CONSOLIDACIÓN INSTITUCIONAL

El reconocimiento por el Consejo de Universidades de la Didáctica de la Matemática como "área de conocimiento" en 1984, al mismo nivel que las restantes disciplinas universitarias, y el desarrollo de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) de 1984 ha hecho posible en España la creación de departamentos universitarios sobre la base de dicha área, o en unión de otras áreas de didácticas especiales. Estos departamentos han constituido un sólido soporte para el desarrollo de la didáctica de las matemáticas dado que la LRU confía a los departamentos las responsabilidades docentes e investigadores en las áreas de conocimiento correspondientes. En los departamentos se concentran los principales recursos para la investigación, tanto personales (más de 200 profesores permanentes adscritos al área, con una dedicación reconocida a la investigación), como materiales (fondos bibliográficos específicos).

Otro indicador de consolidación institucional consiste en los programas de doctorado específicos ofertados en distintas universidades y de tesis doctorales defendidas sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como también los proyectos de investigación financiados con fondos públicos que se están desarrollando en competición con las restantes áreas de conocimiento. La comunidad de investigadores en didáctica de la matemática ha comenzado a tomar conciencia de su propia especificidad e intereses como se pone de manifiesto en la constitución en 1997 de una sociedad profesional propia, la Sociedad de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) cuyos objetivos y actividades pueden consultarse en la página web, <http://www.seiem.es/>.

Otros síntomas de consolidación de la didáctica de las matemáticas a nivel internacional se derivan de la existencia de instituciones similares a las españolas, o incluso institutos de investigación específicos (CINVESTAV, México), IDM, Alemania, etc.), y sobre todo de la publicación de revistas periódicas de investigación¹¹ (Journal for Research in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Recherches en Didactique des Mathématiques, etc.), la publicación de "handbooks", como el de Grouws (1992), Bishop et al. (1996), Lester (2007), congresos internacionales como PME (Psychology of Mathematics Education, CERME (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), etc.

¹¹ En el anexo hemos incluido una relación de las principales revistas donde se publican trabajos de Didáctica de las Matemáticas y referencia a otras publicaciones relevantes.

Como describe Guzmán (1996), el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) ha propulsado con eficacia los estudios relativos a los problemas de la educación matemática a lo largo del siglo XX y ha contribuido muy poderosamente a la constitución de la nueva disciplina científica que se ocupa de los problemas relacionados con educación matemática. El ICMI Study celebrado en Washington en 1994, cuyos trabajos han editado Sierpinska y Kilpatrick (1998) sobre la naturaleza de la investigación en la educación matemática viene a señalar su madurez como disciplina científica, con objetivos y métodos propios.

Para una perspectiva histórica de la didáctica de la matemática, su nacimiento y consolidación progresiva remitimos al lector al trabajo sistemático de Rico, Sierra y Castro (2000).

6.3. CONFUSIÓN DE PARADIGMAS Y AGENDAS

En cuanto a los programas y métodos de investigación podemos decir que se ha pasado del predominio de un enfoque psicoestadístico en la década de los 70 y parte de los 80, obsesionados por los tests y su fiabilidad, a la proliferación de métodos, la apertura de las agendas de investigación y a la adopción de posiciones eclécticas. Sin que el enfoque psicológico haya perdido importancia (como se puede ver en la vitalidad del grupo internacional PME) se están desarrollando también investigaciones dentro de enfoques diversos como el interpretativo, etnográfico, antropológico, socio-crítico, etc.

Hay autores que defienden el uso de una variedad de enfoques y métodos en la investigación en didáctica de la matemática considerando esta situación como beneficiosa, dada la parcialidad de los mismos. Pero considero que esto origina una fuerte confusión entre las diversas comunidades de investigadores, haciendo a menudo improductivos los esfuerzos. La variedad de enfoques, teorías, métodos está reclamando la realización de investigaciones, más bien propias de la filosofía de la ciencia, que ponga un cierto orden y estructura en el panorama del componente científico de la educación matemática. Considero que, aunque la didáctica de la matemática pueda considerarse una disciplina madura en el sentido sociológico, no ocurre igual necesariamente en el sentido filosófico o metodológico.

El problema de la diversidad de teorías en educación matemática, su comparación y posible articulación sido abordado en el seno de un Grupo de Trabajo del Congreso Europeo de Educación Matemática (CERME) en varias de sus reuniones, fruto de las cuales ha sido la publicación de varios trabajos en las actas de dicho congreso y en la revista ZDM. Bikner-Ahsbals y Prediger (2010) presentan una síntesis de dichos trabajos en la cual describen distintas estrategias de articulación de teorías, viendo la diversidad como un desafío, una fuente de posibilidades y el punto de comienzo para nuevos desarrollos. Consideran que la diversidad de teorías supone desafíos por las siguientes razones:

- Desafíos para la comunicación: los investigadores que usan diferentes marcos teóricos tienen a veces dificultades para comprenderse unos a otros con profundidad debido al uso de diferentes supuestos implícitos y lenguajes.
- Desafíos para la integración de resultados empíricos: los investigadores con diferentes perspectivas teóricas consideran los fenómenos empíricos desde diferentes perspectivas, y por tanto, llegan a resultados diferentes en sus estudios empíricos.

- Desafíos para el progreso científico: mejorar la clase de matemáticas depende in parte de la posibilidad de progreso conjunto a largo plazo de la investigación en educación matemática en la que los estudios y concepciones sobre la escuela se construyen sucesivamente sobre la investigación empírica. La inconmensurabilidad de perspectivas produce a veces resultados incompatibles o incluso contradictorios, que no solo impide la mejora de las prácticas de enseñanza y aprendizaje, sino que incluso puede desacreditar el campo de investigación, el cual puede aparecer como siendo incapaz de discutir, contrastar y evaluar sus propias producciones.

Bikner-Ahsbabs y Prediger (2010, p. 490)) sostienen que la pluralidad solo puede llegar a ser fructífera cuando diferentes aproximaciones y tradiciones entran en interacción. Con el fin de abordar estos desafíos, la diversidad de teorías y aproximaciones teóricas debería ser explotada activamente buscando estrategias de conexión. La conexión de teorías y aproximaciones teóricas puede llegar a ser un punto de partida provechoso para un desarrollo posterior de la disciplina científica de tres maneras:

- Desarrollando estudios empíricos que permitan conectar aproximaciones teóricas con el fin de ganar un creciente poder explicativo, descriptivo o prescriptivo.
- Desarrollar teorías como partes de un conjunto teórico conectado con el fin de reducir el número de teorías tanto como sea posible (¡pero no más!) y clarificar las potencialidades y debilidades de las teorías.
- Establecer un discurso sobre el desarrollo de la teoría, sobre las teorías y sus cualidades para la investigación en educación matemática, que también esté abierto a consideraciones meta-teóricas y metodológicas.

6. 4. DIVORCIO TEORÍA-PRÁCTICA

En cuanto al aspecto de la educación matemática que hemos descrito como práctica reflexiva debemos reconocer la pujanza de las asociaciones de profesores de matemáticas, tanto a nivel regional, nacional como internacional. Un indicador de esto es la existencia de la Federación Española de Asociaciones de Profesores de Matemáticas (con 12 sociedades regionales asociadas), sus respectivas revistas (Suma, Números, Épsilon, etc.) y congresos orientados a los profesores, y a nivel internacional la poderosa NCTM (USA), el ICME (International Commission on Mathematical Instruction), la FISEM (Federación Iberoamericana de Sociedades Educación Matemática, y su revista UNIÓN).

Pero debemos reconocer las escasas y con frecuencia nulas conexiones de estas actividades con el componente científico-académico. Indicadores de esta separación son la existencia de sociedades profesionales independientes (al menos en España, Francia y Portugal), y de revistas de "profesores" y de "investigadores".

Otro síntoma de desconexión, al menos en España, está en el desarrollo de los currículos de matemáticas, que hasta ahora han sido elaborados por comisiones en cuya composición se ignora la existencia de los departamentos universitarios especializados. Pero donde es más crítica la separación es en la formación inicial de profesores de secundaria y en la formación permanente, las cuales se hacen con una escasa participación de los especialistas en didáctica de las matemáticas.

Podemos concluir que la educación matemática como disciplina académica se ha ido consolidando

progresivamente, en la escena internacional, en los últimos 30 años. Pero su desarrollo ha sido desigual en las distintas facetas que la componen, y de manera particular en la articulación entre las mismas.

REFERENCIAS

- Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S. y Cifarelli, V. V. (2003). (Eds). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: LEGAS.
- Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Tesis de Estado. Universidad de París VII.
- Artigue, M. (1989). Ingeniería didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, n. 3, pp. 281-308.
- Begle, E. y Gibb, (1980) Why do research?. En: R. J. Shunway (Ed.) *Research in mathematics education* (pp. 3-19). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Balacheff, N. (1990a). Future perspectives for research in the psychology of mathematics education. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Balacheff, N. (1990b). Beyond a psychological approach: the Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, p. 2-8.
- Balacheff, N. (1990c). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, n. 4, pp. 258-272.
- Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler; R. Scholz; R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, NL: Kluwer Acad. Pb.
- Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: Development and function of mathematizing as a social practice. En L. Steffe y J. Gale (Eds.). *Constructivism in Education*. (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.
- Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. En H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds.). *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp: Proceedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.
- Benedito, V. (1987). *Introducción a la Didáctica. Fundamentación teórica y diseño curricular*. Barcelona: Barcanova.
- Bikner-Ahsbash, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories – An Approach for exploiting the diversity of theoretical approach. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers*. (pp. 483-506). Heidelberg: Springer.
- Bishop, A., Clements, K., Keitel, C. Kilpatrick, J. y Laborde, C. (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4, n. 2, pp. 165-198.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en*

- Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.
- Brousseau, G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, n. 21, pp.47 - 68. [Traducción castellana en la revista Suma, n. 4 y 5].
- Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. *Etudes en Didactique des Mathématiques. Article occasionnel* n. 2. IREM de Bordeaux.
- Bunge, M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.
- Bunge, M. (1985b). *Pseudociencia e ideología*. Madrid: Alianza.
- Burkhardt, H. (1988). The roles of theory in a 'systems' approach to mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.5, pp. 174-177.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1). 27-40.
- Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.
- Carr, W. y Kemmis, S (1986). *Becoming critical*. Deakin University Press [traducción en español: *Teoría crítica de la enseñanza*. Barcelona: Martínez Roca, 1988].
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989) *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. *Actas del Seminario de Grenoble*. IREM Université de Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.
- Chevallard, Y. y Johsua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, n. 1, pp. 159-239.
- Coob, P. (2007). Putting philosophy to work. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3-38). Charlotte, NC: Information Age Publishing and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 5-31.
- Echevarria, J. (2003). *La revolución tecnocientífica*. Madrid: Fondo de Cultura Económica.
- Eisenhart, M.A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 99-114.
- Elliott, J. (1996). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.
- English, L. (2008). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.). London: Routledge, Taylor & Francis.
- English, L. y Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman y L. English (Eds), *Theories of Mathematics Education* (pp. 263-289). Heidelberg: Springer-Verlag.
- Erickson, R. (1986). Qualitative methods in research on teaching. En M.C. Wittrock. *Handbook of research of teaching*. London: Macmillan.
- Fey, J.T. (1980). Mathematics education research on curriculum and instruction. En: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Fischbein, E. (1990). Introduction (Mathematics and Cognition). En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. *Revista EMA*, 7, 2, 127-170.
- Font, V. y Godino, J. D. (2010). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En C. Coll (ed.) *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Graó (en prensa).
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. (China lectures). Kluwer A.P.
- Furinghetti, F. (Ed.) (1991). International Group for the Psychology of Mathematics Education. *Proceeding Fifteenth PME Conference*. Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. Italia.
- Gascón J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.
- Genovard, C. y Gotzens, C. (1990). *Psicología de la instrucción*. Madrid: Santillana.
- Gimeno Sacristán, J. (1986). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya.
- Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutierrez (Ed.), *Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-149). Madrid: Síntesis.
- Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Quadrante*, 2 (1), pp. 9-22
- Godino, J. D. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. En, A. Martínón (2000). *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp. 347-350). Madrid: Nívola
- Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1): 70-92.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Grows, D. (1992). *Handbook of reseach of mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Guzmán, M. de (1996). Madurez de la investigación en educación matemática. El papel del ICMI. En, L. Puig y J. Calderón, (Eds), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: CIDE.
- Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.2 pp. 3-7.
- Howson, G. (1988). Research in mathematics education. *The Mathematical Gazette*, 72, (462): 265-271.
- Hurford, A. (2010). Complexity theories and theories of learning: Literature reviews and syntheses. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers*. (pp. 567-589). Heidelberg: Springer.
- Kemmis, S. y Mctarggart, R. (1992). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.

- Kilpatrick, J. (1981). Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 2, 363-379.
- Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 1-26.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *Proc. 11th Conference PME*. Montreal, p. 3-23.
- Kilpatrick, J. (1988). Change and stability in research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5: 202-204.
- Kuhn, T.S. (1965). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: F.C.E., 1975
- Laborde, C. (1989). Audacity and reason: French research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, n. 3, pp. 31-36.
- Lakatos, I. y Musgrave, A. (1978). *La crítica y el desarrollo del conocimiento*. Barcelona: Grijalbo.
- Lesh, R. y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers*. (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.
- Lester, F. K. (2010). On the theoretical, conceptual and philosophical foundations for research in mathematics education. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers*. (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.
- Mosterín, J. (1987). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.
- Orton, A. (1988). *Learning mathematics. Issues, theory and classroom practice*. London: Cassel. [Traducción castellana: "Didáctica de las Matemáticas". Madrid: MEC y Morata, 1990].
- Orton, R.E. (1988). Two theories of "theory" in Mathematics Education: using Kuhn and Lakatos to examine four foundational issues. *For the Learning of Mathematics*, 8, n. 2, pp. 36-43.
- Polya, G. (1945). *¿Cómo plantear y resolver problema?* México: Trillas, 1965.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori/ICE.,
- Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Número especial, 7-21.
- Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (Eds.) (2008). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1984). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, N.J.: LEA. [Traducción castellana: "La enseñanza de las matemáticas y su fundamento psicológico. Barcelona: Paidós-MEC, 1990].
- Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En: S. Llinares y M.V. Sanchez (Eds), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.
- Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En, L. Rico y D. Madrid (Eds), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ. & IDM.
- Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.

- Sáenz-Ludlow, A., y Presmeg, N. C. (2006). Semiotic perspectives in mathematics education: A PME Special Issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2).
- Schoenfeld, A.H. (1987). Cognitive science and mathematics education: an overview. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. London: LEA, p. 1-32.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, HL: Kluwer A. P.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. [Traducción de Juan D. Godino]
- Silver, E. A. y Herbst, P. (2007). Theory in mathematics education scholarship. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 39-67). Charlotte, NC: Information Age Publishing and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan. [Traducción castellana en: La investigación de la enseñanza, I, Paidós-MEC, 1989].
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente y Universidad de los Andes.
- Sriraman, B. y English, L. (2010). *Theories of mathematics education. Seeking new frontiers*. Heidelberg: Springer.
- Stanic, G.M.A. (1988). A response to professor Steiner's "Theory of Mathematics Education". En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp.
- Steiner, H.G. (1984); Balacheff, N. y otros. (Eds.) Theory of mathematics education (TME). ICME 5. *Occasional paper 54*. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
- Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, Vol 5. n. 2, pp. 11-17.
- Steiner, H.G.; Vermandel, A. (Eds) (1988). Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics). *Proc. 2nd TME Conference*. Antwerp and Bielefeld: Dpt of Didactics and Criticism Antwerp Univ. and IDM.
- Steiner, H.G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 6, pp. 194-197.
- Steiner, G.H.; Batanero, M.C.; Godino, J.D. y Wenzelburger, E. (1991). Preparation of researchers in mathematics education: an international survey (preliminary report). *5-TME Conference*, Paderno del Grappa (Italia)
- Vergnaud, G. (1988). Why is psychology essential? Under which conditions?. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp.
- Vergnaud, G. (1990a). Epistemology and psychology of mathematics education. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vergnaud, G. (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, Vol 10, n. 2,3, pp. 133-170.

Vermandel, A.; Steiner, H:G.(Eds) (1988). Investigating and bridging the teaching-learning gap. *Proc. 3rd TME Conference*. Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ.

Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). (pp. 163-199).

Wenzelburger, E. (1990). Teoría e investigación en Educación Matemática. *4 Conferencia TME*. Oaxtepec (México).

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

ANEXOS: Catálogo de revistas y publicaciones relevantes

Se adjuntan tres Anexos con listados de revistas, monografías y actas de congresos que publican trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, clasificadas por orden de relevancia en el Área de Conocimiento. El anexo 1 incluye las revistas específicas de Didáctica de la Matemática (Serie A), el anexo 2 contiene las revistas de áreas afines que también publican trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Serie B) y el anexo 3 clasifica otras publicaciones (monografías y actas de congresos), indicando algunos ejemplos de tales publicaciones (Serie C).

El criterio para considerar una publicación como relativa a “didáctica de las matemáticas” ha sido su inclusión en la base de datos **MathEduc Database** (FIZ Karlsruhe). La lista completa de esta publicación está disponible en: <http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>

Las revistas se han clasificado en cuatro grupos, A, B, C, y D, en orden decreciente de relevancia. El grupo A comprende sólo las revistas que están incluidas en las bases de datos del I.S.I (*International Scientific Information*) correspondientes a los campos de Educación, Psicología, Matemáticas y Estadística. El grupo B incluye las revistas que publican exclusivamente trabajos de investigación y cumplen los requisitos básicos exigidos a las publicaciones de carácter científico (exigencia de originalidad; aplicación de un proceso riguroso de revisión por árbitros anónimos; ...). El grupo C incluye las revistas que publican, además de trabajos de investigación, otros con una orientación hacia la práctica docente; el grupo D incluye cualquier otra revista, no incluida en las clases anteriores, pero que están incluidas en la base MathEduc.

ANEXO 1: Serie A (Revistas específicas de Didáctica de la Matemática)

TIPO	NOMBRE DE LA REVISTA
A	JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION
A	RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa)
A	BOLEMA - Boletim de Educação Matemática
B	EDUCAÇÃO MATEMATICA PESQUISA
B	EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS
B	FOR THE LEARNING OF MATHEMATICS
B	HIROSHIMA JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION
B	JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR
B	JOURNAL OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATION
B	MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH JOURNAL
B	MATHEMATICS THINKING AND LEARNING
B	MEDITERRANEAN JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION
B	QUADRANTE
B	RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
B	STATISTICS EDUCATION RESEARCH JOURNAL
B	ZDM (ZENTRALBLATT FÜR DIDACTIC DER MATHEMATIK)
B	ZETETIKÉ
C	EDUCACION MATEMÁTICA (México)
C	EPSILON
C	JOURNAL FÜR MATHEMATIK-DIDAKTIK
C	JOURNAL OF STATISTICS EDUCATION
C	MATEMATICA E LA SUA DIDACTICA, LA
C	MATHEMATICS IN SCHOOL
C	MATHEMATICS TEACHER
C	MATHEMATICS TEACHING
C	MATHEMATICS TEACHING IN THE MIDDLE SCHOOL
C	NUMEROS
C	PETIT X
C	PLOT: MATHEMATIQUES ET ENSEIGNEMENT
C	SUMA
C	TEACHING CHILDREN MATHEMATICS

C	UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática
C	UNO. REVISTA DE DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS
D	(Cualquier otra revista incluida en la base MathEduc que no figura en los tipos A, B, C)

ANEXO 2: Serie B (Revistas de áreas afines)

TIPO	NOMBRE DE LA REVISTA
A	AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
A	APPLIED MEASUREMENT IN EDUCATION
A	BRITISH EDUCATIONAL RESEARCH JOURNAL
A	BRITISH JOURNAL OF EDUCATIONAL PSYCHOLOGY
A	BRITISH JOURNAL OF EDUCATIONAL TECHNOLOGY
A	CHILD DEVELOPMENT
A	COGNITION AND INSTRUCTION
A	COMPARATIVE EDUCATION
A	COMPARATIVE EDUCATION REVIEW
A	ECONOMICS OF EDUCATION REVIEW
A	EDUCATIONAL RESEARCH
A	ELEMENTARY SCHOOL JOURNAL
A	ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
A	INTERNATIONAL STATISTICAL REVIEW
A	JOURNAL OF EDUCATIONAL PSYCHOLOGY
A	JOURNAL OF EDUCATIONAL RESEARCH
A	JOURNAL OF THE LEARNING SCIENCES
A	JOURNAL OF RESEARCH IN SCIENCE TEACHING
A	LEARNING AND INSTRUCTION
A	PHI DELTA KAPPAN
A	PSYCHOLOGY IN THE SCHOOLS
A	SCHOOL EFFECTIVENESS AND SCHOOL IMPROVEMENT
A	SCHOOL PSYCHOLOGY QUARTERLY
A	SCIENCE EDUCATION
A	SOCIOLOGY OF EDUCATION
A	TEACHING AND TEACHER EDUCATION
A	YOUNG CHILDREN
B	COGNITION
B	EDUCATIONAL MEASUREMENT: ISSUES AND PRACTICE
B	EDUCATIONAL TECHNOLOGY RESEARCH AND DEVELOPMENT
B	INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICAL EDUCATION IN SCIENCE AND TECHNOLOGY
C	AUSTRALIAN JOURNAL OF EDUCATION
C	COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL
C	EDUCATIONAL TECHNOLOGY
C	ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, L'
C	FOCUS ON LEARNING PROBLEMS IN MATHEMATICS AND SCIENCE TEACHING
C	INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE, L'
C	JOURNAL OF COMPUTERS IN MATHEMATICS AND SCIENCE TEACHING
C	JOURNAL OF RECREATIONAL MATHEMATICS
C	SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS
D	(Cualquier otra revista incluida en MathEduc, de áreas afines, no incluida en los grupos anteriores)

ANEXO 3: Serie C (Monografías y Actas de Congresos)

TIPO A: Monografías y “surveys” de investigación con sistema de árbitros

1. Handbooks

Ejemplos:

- Gutierrez, A. and Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. and Leung, F. K. S. (Eds.). (2003). *Second International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R. and Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass.
- Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., and Laborde, C.(Eds.). (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Biehler, R., Scholz, R.W., Straesser, R and Winkelmann, B.(Eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Grows, D. A. (1992) (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. National Council of Teachers of Mathematics. New York, NY: Macmillan.
- Lester, F. (Ed.) (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

2. Serie de ICMI Studies

Ejemplos:

- Graf, K., Leung, F. Y Lopez-Real, F. (Eds.) (2005). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West*. Berlin: Springer.
- Stacey, K. , Chick, H. y Kendal, M. (Eds.) (2004). *The Future of the teaching and learning of algebra*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Holton, D. (Ed.). (2001). *Teaching and learning of mathematics at university level*. Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Fauvel, J. y Maanen, J. van (Eds.) (2000). *The Role of the History of Mathematics in the teaching and Learning of Mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Mammana, C. y Villani, V. (Eds) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics education as a research domain: a search for identity*. Dordrecht: Kluwer A. P.
(Véase otros ICMI Studies y Actas de Congresos en, <http://www.mathunion.org/icmi/home/>)

3. Monografías sobre educación matemática

Ejemplos:

- Jones, G. A. (2005). *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning*. Berlin: Springer.
- Borba, M. y Villareal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Berlin: Springer
- Anderson, M., Sáenz-Ludlow A., Zellweger, S. y Cifarelli, V.V. (Eds.) (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas.
- Leder, G. C., Pehkonen, E., and Toerner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer A. P.
- Lin, F. L. y Cooney, T. J. (Eds.) (2001). *Making sense of mathematics teacher education*. Dordrecht: Kluwer.
- Atweh, B., Forgasz, H. y Nebres, B. (Eds.) (2001). *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London: Lawrence Erlbaum
- Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L.(eds.). (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer A. P.

TIPO B: Actas de congresos internacionales con sistema de árbitros y trabajos originales de investigación

Ejemplos:

- Pateman, N. A., Dougherty, B. J. y Zilliox, J. (Eds.) (2003). *Proceedings of the Joint Meeting of PME and PME-NA*. Honolulu, USA. Disponible en: <http://onlinedb.terc.edu/>
- Schwank, I. (Ed.)(1999) Proceeding of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Osnabruock: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik. Disponible en, <http://www.fmd.uni-osnabruock.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>

TIPO C: Monografías y actas de congresos que incluyen experiencias y reflexiones sobre la práctica de aula

Ejemplos:

- Rossmann, A. y Chance, B. (2006) (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, G. (2005). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol, 18. (Actas de la 18 Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa). Disponible en, <http://www.clame.org.mx/>

TIPO D: Cualquier otra publicación no incluida en las categorías anteriores