Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales

Miguel R. Wilhelmi*, Juan D. Godino** y Eduardo Lacasta***

Versión 18 de junio de 2004

Resumen

Los objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas en los distintos contextos de uso se estructuran formando *configuraciones epistémicas*. La determinación y la descripción de las configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales nos permite introducir la noción de *holo-significado* de una noción matemática, constituido por la interacción de distintos *modelos* matemáticos asociados a dicha noción. Las nociones de holo-significado y de modelo constituyen un marco para la selección de los significados curriculares que se pretenden enseñar, dentro de una institución educativa concreta, y para la búsqueda de situaciones fundamentales dentro de un proyecto global de enseñanza.

Palabras clave: definición, modelo, significado, sistema de prácticas, currículo, praxeología, situación fundamental.

1. Motivación teórica y plan general

En la actualidad, uno de los grandes problemas que enfrenta la didáctica, si no el principal, es "l'analyse de la détermination simultanée des connaissances précises et des conditions dans lesquelles elles peuvent être proposées et apprises par des sujets ou par des institutions" (Brousseau, 2004, intervención oral en CS ADIREM). Este objetivo precisa de la discriminación y de la descripción de las nociones, procesos y significados matemáticos que han de ser enseñados. En particular, es necesario determinar los significados asociados a los objetos matemáticos en los diferentes contextos de uso en las instituciones escolares y organizarlos como un todo complejo y coherente.

Godino y Batanero (1994) introducen la noción de "sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al campo de problemas en el que se pone en juego la noción" como el objeto primario de descripción del significado institucional y personal de las

*Universidad Pública de Navarra, Pamplona (España). E-mail: miguelr.wilhelmi@unavarra.es
**Universidad de Granada, Granada (España). E-mail: jgodino@ugr.es
***Universidad Pública de Navarra, Pamplona (España). E-mail: elacasta@unavarra.es

nociones matemáticas. En este trabajo estamos especialmente interesados en determinar y describir la relación entre los sistemas de prácticas, los objetos emergentes de tales sistemas y las relaciones que se establecen entre dichos objetos (las cuales deben ser tenidas en cuenta en el análisis del significado de las nociones matemáticas).

Godino (2002) identifica el "sistema de prácticas" con el contenido que una institución asigna a un objeto matemático, estableciendo, por lo tanto, una correspondencia entre el sistema de prácticas (significado sistémico) y la expresión del objeto matemático. En dicho trabajo, la descripción del significado de referencia de un objeto se presenta como un listado de objetos clasificados en seis categorías: nociones, proposiciones, lenguaje, argumentos, acciones y problemas.

Consideramos que estas descripciones del sistema de prácticas son insuficientes por varios motivos. Por un lado, las categorías enunciadas son objetos emergentes del sistema de prácticas en que se pone en juego el objeto matemático y, por lo tanto, son estos objetos los que constituyen el referente explicitable del significado institucional.

> "El significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional" (Godino, 2003, p.38).

Por otro lado, tanto los sistemas de prácticas como los objetos emergentes están relacionados entre sí constituyendo redes o configuraciones epistémicas; la descripción de tales redes debe ser un objetivo del análisis epistemológico de una noción matemática desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por último, el proyecto global de enseñanza puede ser dividido en subsistemas de prácticas ligados a tipos específicos de problemas; para elaborar currículos y construir proyectos de enseñanza, es necesario identificar y describir estos subsistemas de prácticas y los objetos emergentes de tal actividad.

A partir de estas consideraciones nos preguntamos:

- ¿Es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados?
- ¿Qué significa comprender una noción matemática?
- ¿La descripción del significado de una noción como "totalidad" tiene consecuencias sobre la elaboración del currículo y, en particular, permite analizar las aplicaciones de las propuestas educativas con relación a dicha noción?

Para responder estas preguntas, centrando el discurso en la noción de igualdad[1], introducimos las nociones de *modelo* y de *holo-significado* de una noción matemática. Brevemente, un *modelo* de una noción matemática representa el complejo estructurado

[1] En este texto, el término igualdad será utilizado como sinónimo de "igualdad numérica de números reales o en $\mathbb{R}$".

de un sistema de prácticas en un contexto de uso determinado y de los emergentes de dichos sistemas (incluidas las definiciones); el *holo-significado* de una noción matemática representa la expresión de los diversos modelos asociados a la dicha noción (entendidos como un sistema único). Asimismo, las nociones de holo-significado y de modelo nos permitirán analizar la noción de praxeología de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1997) con relación a la práctica matemática y enmarcar la búsqueda de situaciones fundamentales (Brousseau, 1998) en un proyecto global de enseñanza. En concreto, mostraremos en qué sentido la noción de praxeología es rígida para la descripción de las prácticas matemáticas y cómo una situación fundamental debe incluir una muestra representativa de los modelos que componen el holo-significado (aunque con frecuencia tal representatividad tendrá que restringirse a algunos modelos asociados a la noción matemática que se desea introducir o desarrollar).

Con relación a la noción de igualdad, el objetivo de este trabajo es mostrar cómo los diferentes contextos de uso delimitan significados específicos, que se sintetizan en distintas definiciones de la noción de igualdad, no siendo posible privilegiar ninguna de ellas. De esta manera, en la sección 2 introducimos las distintas definiciones de la noción de igualdad; asimismo, apoyándonos en la demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, indicaremos cómo estas definiciones condicionan las prácticas matemáticas en los diferentes contextos de uso. En la sección 3 explicitamos una estructuración de los modelos y significados asociados a la noción de igualdad, destacando las características principales de dichos modelos (con relación a las nociones asociadas, las técnicas privilegiadas y criterios básicos de demostración). En la sección 4 se introduce la noción de holo-significado y se describe el holo-significado de la noción de igualdad; a continuación, se analizan algunas implicaciones curriculares de la noción genérica de holo-significado (§5).

Por último, en la sección 6 se resaltan algunas implicaciones *macrodidácticas* (referidas a la evolución de las preocupaciones fundamentales sobre el estado institucional, social y cultural del saber matemático), *microdidácticas* (donde prevalece la singularidad de los objetos matemáticos y la individualidad de los sujetos agentes) y *teóricas* (relación de las herramientas introducidas con nociones didácticas aceptadas dentro de la comunidad científica).

2. Definiciones de la noción de igualdad

Las definiciones de igualdad representan objetos emergentes de los sistemas de prácticas asociados a los distintos contextos de uso, en ningún caso son el marco de cierre de los significados atribuidos a la noción de igualdad. No existe, por lo tanto, una única definición de igualdad; esto es, dados dos números reales a y b, no hay una sola forma de responder a la pregunta ¿representan a y b el mismo número? Contestar esta pregunta supone, necesariamente, explicitar un dominio matemático de trabajo; a saber: aritmética, algebra, teoría de funciones, $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado, $\mathbb{R}$ como espacio métrico, $\mathbb{R}$ como espacio topológico, análisis y cálculo numérico. De esta forma, según el campo de aplicación, la igualdad entre dos números ($a = b$) queda determinada por unas relaciones específicas a dicho dominio.

En esta sección daremos las definiciones de la noción de igualdad según el dominio matemático de referencia; realizaremos una breve discusión de las mismas que contribuya a su interpretación recta; y, por último, mostraremos, basándonos en la demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, cómo las definiciones dadas condicionan las prácticas operativas y discursivas.

2.1. Definiciones

La definición aritmética remite a la relación de equivalencia que clasifica a un conjunto (el de los números reales) en clases $\mathbb{R}/=$; brevemente, no importa la representación del número sino el valor que éste toma ($\frac{2}{4} \equiv \frac{1}{2}$; $1 \equiv 0,\overline{9}$; etc.); no estamos interesados en determinar cómo quedan definidas las clases (sucesiones de Cauchy, cortaduras de Dedekind, etc.). Brevemente, se define:

Definición 1 (Igualdad como equivalencia) *Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si representan la misma clase; esto es:*

$$a = b \Leftrightarrow \{a\} \equiv \{b\}$$

La igualdad entre dos números reales a y b puede también establecerse por doble desigualdad; $\mathbb{R}$, dotado de las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ y de la relación de orden menor o igual $(\leq)$, es un cuerpo ordenado. Se define:

Definición 2 (Igualdad de orden) *Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si la relación de orden en $\mathbb{R}$ $(\leq)$ cumple para ellos la propiedad antisimétrica; esto es:*

$$a = b \iff [a \leq b \wedge b \leq a]$$

O equivalentemente:

$$a = b \iff (a \in (-\infty; b] \wedge b \in (-\infty; a])$$

El valor absoluto dota al conjunto de los números reales de una métrica (estándar). Se define la distancia entre dos números a y b, se denota $d(a; b)$, como el valor absoluto de la diferencia ($|a - b|$). De esta forma, se define:

Definición 3 (Igualdad métrica) *Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si la distancia entre ambos en nula; esto es:*

$$a = b \iff d(a; b) = |a - b| = 0$$

Se puede interpretar la métrica valor absoluto como una topología sobre $\mathbb{R}$, en tal caso $(\mathbb{R}; d)$ es espacio topológico; en este contexto, afirmar que la distancia entre dos puntos a y b es cero es equivalente a determinar que el conjunto $\{a; b\}$ es conexo. Se define:

Definición 4 (Igualdad conectiva) *Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si el conjunto $\{a; b\}$ es conexo.*

La definición algebraica supone la determinación de un número como solución de una ecuación. Denotamos por $\delta()$ la función característica que asocia 1 a una sentencia verdadera y 0 a una falsa; y por $E()$ a la relación asociada a una ecuación E. De esta forma, $\delta(E(a)) = 1$ significa que el valor a verifica la relación $E()$ o, con otras palabras, a es solución de la ecuación E. De manera similar, $\delta(E(a)) = 0$ significa que el valor a no verifica la relación $E()$, esto es, a no es solución de la ecuación E. Se define:

Definición 5 (Igualdad algebraica) *Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si siempre que a es solución de una ecuación E, b también lo es:*

$$a = b \Leftrightarrow [\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$$

La igualdad entre dos números reales se puede definir también apoyándose en la teoría de funciones. En efecto, para determinar si dos números reales son iguales es suficiente determinar si sus imágenes respecto a una función inyectiva son iguales. Se define:

Definición 6 (Igualdad funcional) *Sea $F_i(D)$ el conjunto de funciones reales de variable real inyectivas y con dominio D. Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si sus respectivas imágenes a través de una función inyectiva son iguales; esto es:*

$$a = b \iff \exists f \in F_i(D), \{a, b\} \subseteq D, f \text{ no lineal, tal que } f(a) = f(b)$$

En la definición anterior, se excluye la posibilidad de que la función f sea lineal, puesto que, en caso contrario, la sentencia anterior se convierte en una tautología semántica que nada dice[2] ($f(x) = mx + n$): $a = b \Leftrightarrow am + n = bm + n \Leftrightarrow a = b$.

En el dominio del análisis matemático, la igualdad se sustituye por la intersección de toda una clase no numerable de inecuaciones o de entornos. Se define:

Definición 7 (Igualdad como proceso de paso al límite) *Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si a está dentro de todo entorno abierto centrado en b ($B(b;\varepsilon)$) o viceversa; esto es:*

$$a = b \iff a \in B(b;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0 \iff b \in B(a;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0$$

O, equivalentemente:

$$(a = b) \Leftrightarrow (|a - b| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0)$$

Por último, la definición numérica de igualdad presupone la aceptación de un margen de error, que depende de la naturaleza del problema o es atribuido al instrumento de cálculo. La ruptura con las definiciones anteriores es radical desde el punto de vista formal; su inclusión obedece a razones pragmáticas (restricciones de medida y cálculo, instrumentos de cálculo —calculadoras, programas de ordenador) y epistemológicas (nociones de *aproximación suficiente* y de *vecindad*, *halo*, etc. —análisis no estándar).

[2] Se acepta una prueba como demostración de la verdad de la tesis de una proposición únicamente si existe una relación entre la proposición y su aplicación y otras proposiciones. "Toda tautología (por ejemplo, $p \vee \neg p$) nada expresa [...] Por ejemplo: 'o llueve o no llueve' es algo que de nada sirve para saber del tiempo" (Wittgenstein, 1978, p.192). Doble función de la prueba: *estructural, interna* (efectúa transformaciones) y *valorativa, exterior* (relación entre la proposición y lo que la trasciende).

Definición 8 (Igualdad numérica) *Sea T una tolerancia de error admitido, dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si a está dentro de un entorno abierto centrado en b y radio menor o igual a T ($B(b;t)$, $t < T$) o viceversa; esto es:*

$$a = b \iff a \in B(b;t),\ t < T \iff b \in B(a;t),\ t < T$$

O, equivalentemente:

$$(a = b) \Leftrightarrow |a - b| < T$$

La tabla 1 representa una descripción sinóptica de las diferentes definiciones; asimismo, se muestran representaciones asociadas a dichas definiciones.

2.2. Breve análisis de las definiciones dadas

El análisis que se muestra a continuación no es relacional; el objetivo es aportar alguna matización a las definiciones dadas que contribuya a su correcta interpretación. Una sucinta confrontación de las definiciones se realiza al final de la sección 2.3.

La definición aritmética remite a la "identidad de nombre". Brevemente, para probar que dos representaciones son el mismo número se hacen transformaciones de las expresiones, que conserven la igualdad, hasta la obtención de una *tautología semántica*, esto es, del mismo representante para ambos números[3].

Las definiciones métrica y de orden muestran criterios de actuación para la demostración de la igualdad de dos números reales; representan una interpretación de la definición aritmética en función de ciertas características atribuibles a $\mathbb{R}$ (cuerpo ordenado, espacio métrico). De esta forma, teóricamente, para la discriminación de números reales se procede en dos pasos: se dota a $\mathbb{R}$ de una propiedad (orden, métrica) y se establece en función de ésta la igualdad o no de dos números.

La pertinencia de la definición de igualdad algebraica se fundamenta en que la ecuación se ha denominado tradicionalmente *igualdad condicional*: la igualdad se cumple sólo para determinados valores de la variable. Es lógico entonces asociar a cada ecuación el conjunto de soluciones o valores que hacen cierta la igualdad y, de manera indirecta, definir un número como la solución de una clase de ecuaciones. El hecho de hablar de "clase de ecuaciones" es estrictamente necesario, puesto que infinitas ecuaciones tienen por solución un determinado número real y sólo dicho conjunto puede discriminar al número real. De hecho, la definición dada resulta más operativa formulada como negación:

$$a \neq b \Leftrightarrow \exists E \text{ tal que } [\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 0]$$

De otra forma, dos números a y b son distintos si se conoce una ecuación E tal que si a es solución, b no lo es; y, viceversa, si b es solución, a no lo es. En definitiva, existe

[3] Se hace la distinción entre tautología lógica y tautología semántica. Una tautología lógica es una afirmación del tipo $a = \overline{a}$, donde a y $\overline{a}$ representan el mismo objeto, sin necesidad de que a y $\overline{a}$ tengan el mismo representante ostensivo (por ejemplo, $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$). La tautología semántica es una tautología lógica que exige la equivalencia tanto del objeto como de su representante ostensivo (por ejemplo, $\sqrt{a} = \sqrt{a}$). Una tautología semántica es autoevidente; una tautología lógica no tiene por qué serlo.

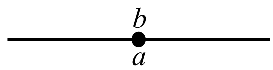
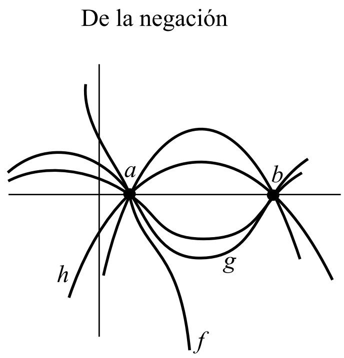
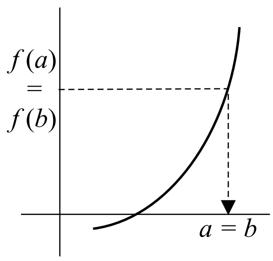
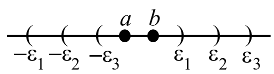
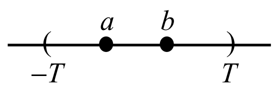
Definición	Descripción ($a = b \iff$)	Representación
Equivalencia	$\{a\} \equiv \{b\}$	
De orden	$[a \leq b \wedge b \leq a]$	
Métrica	$d(a;b) = \|a - b\| = 0$	
Conectiva	$\{a;b\}$ conexo	
Algebraica	$[\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$	
Funcional	$\exists f \in F_i(D), \{a, b\} \subseteq D$, f no lineal, tal que $f(a) = f(b)$	
Proceso límite	$\|a - b\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$	
Numérica	$T > 0$ (arbitrario, pero fijo): $\|a - b\| < T$	

Tabla 1: Definiciones de la noción de igualdad.

una ecuación E para la cual a y b no son simultáneamente solución. La representación gráfica de la tabla 1 refiere esta negación.

La definición como proceso de paso al límite no remite a la identidad de nombre, sino a razonamientos por condiciones suficientes y pérdida controlada de información en cadenas de desigualdades. Bloch (1995) ha señalado la diferencia radical de la prueba analítica respecto a la algebraica; en concreto, ensaya una definición del SSPA (*système spécifique de preuve de l'analyse*). En este orden de ideas, Newton escribe en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en un pasaje analítico: "Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales", citado por Boyer (1969, p.500).

La definición funcional relaciona un concepto genuinamente analítico (función) y la solución de una ecuación. En efecto, sea f una función inyectiva y consideremos la ecuación $f(x) = h$; entonces, si a y b son soluciones de la ecuación, esto es, las relaciones $f(a) = h$ y $f(b) = h$ son ciertas, necesariamente $a = b$. De esta forma, el análisis de la ecuación $f(x) = h$ en términos de las propiedades de la función f asociada, determina una condición suficiente para la igualdad algebraica: no es necesario verificar que, para toda relación $E(\ )$, "$\delta(E(a)) = 1 \iff \delta(E(b)) = 1$", basta con encontrar una relación homogénea[4] $E^*(\,)$, tal que $y = E^*(x)$ sea inyectiva, donde $E^*(\ ) \equiv f(\ ) - h$.

De esta manera, la definición funcional no involucra explícitamente la noción de límite, que es central en el modelo de igualdad analítico. Sin embargo, si la función f es continua, es posible explicitar dicha noción. En efecto, si f es continua en el punto a, $f(a) = h$, se tiene:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |b - a| < \delta \Rightarrow |f(b) - f(a)| < \epsilon \iff \lim_{b \to a} f(b) = f(a)$$

La definición numérica de igualdad puede ser comprendida como una "restricción" de la definición analítica como proceso de paso al límite: fija órdenes de aproximación o establece entornos admisibles de pertenencia. Con otras palabras, dos números analíticamente iguales son numéricamente iguales para cualquier tolerancia. Por otro lado, la definición numérica puede darse de igual manera en términos de resolución de ecuaciones; en efecto, si denotamos por $\delta()$ la función característica que asocia 1 a una sentencia verdadera y 0 a una falsa, y por $E(\ ,T)$ a la relación asociada a una ecuación E con un orden de aproximación T, dos números a y b son numéricamente iguales (con un orden de aproximación T) si:

$$a = b \Leftrightarrow [\delta(E(a,T)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b,T)) = 1]$$

De esta forma, la igualdad numérica bascula entre la igualdad algebraica y la analítica como proceso de paso al límite.

Por último, cada definición de igualdad introducida (§2.1) es un emergente de un sistema de prácticas matemáticas relativo a un campo de problemas determinado, que incluye objetos lingüísticos, nociones y técnicas operatorias específicos. Estos sistemas de

[4]En este contexto, una ecuación es homogénea cuando uno de sus miembros es cero.

prácticas se distinguen unos de otros por su relativa eficacia y generalidad para realizar el trabajo matemático, como mostraremos en la siguiente sección.

La evolución de la noción de igualdad ha seguido el proceso inverso: la práctica matemática ha condicionado los significados atribuidos a la noción de igualdad y, sólo después, tomada esta noción como objeto de estudio, se ha formalizado dicho significado en definiciones. La tarea que consistiría en reconstruir este proceso, esto es, en determinar las prácticas discursivas y operatorias que han hecho emerger las definiciones de la noción de igualdad en los diferentes contextos de uso, no es abordada en este trabajo.

2.3. Influencia de las definiciones en el trabajo matemático: demostración de la proposición "$\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$"

Definir consiste en establecer un conjunto de condiciones necesarias y suficientes que permitan discriminar unívocamente un objeto dentro de un universo. En muchas circunstancias, dicha discriminación se lleva a cabo mediante una formalización; formalización que ha hecho que ciertos autores afirmen que *definir en matemáticas es dar un nombre* (Leikin et al., 2000). Esta perspectiva supondría afirmar que la definición formal discrimina al objeto matemático, es su "medida". Sin embargo, un mismo objeto matemático puede ser definido por medio de formas equivalentes. Dos definiciones son equivalentes si designan el mismo objeto. Sin embargo, no es posible privilegiar *a priori* ninguna de ellas. La pertinencia en el uso de una definición se mide por el grado de adaptación al contexto de aplicación. En particular, apoyándonos en la demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, mostraremos cómo las definiciones de igualdad introducidas condicionan las prácticas operatorias y discursivas. Asimismo, el ejemplo permitirá observar relaciones no triviales entre las definiciones dadas y sus prácticas asociadas.

Demostración según la definición aritmética

$$\sqrt{2} \overset{(1)}{=} \sqrt{2}\cdot 1 \overset{(2)}{=} \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \overset{(3)}{=} \frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \overset{(4)}{=} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \overset{(5)}{=} \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \overset{(6)}{=} \frac{2}{\sqrt{2}}\ \blacksquare$$

Las igualdades quedan justificadas de la siguiente forma:

$\overset{(1)}{=}$ Existencia de elemento unidad en $\mathbb{R}$.

$\overset{(2)}{=}$ Cambio de representante de un objeto matemático.

$\overset{(3)}{=}$ Cambio de representante de un objeto matemático.

$\overset{(4)}{=}$ Producto en $\mathbb{R}$.

$\overset{(5)}{=}$ Potenciación.

$\overset{(6)}{=}$ Cambio de representante de un objeto matemático.

Demostración según la definición de orden

Sean $A = (-\infty; \sqrt{2})$ y $B = (\sqrt{2}; \infty)$. Por la ley de tricotomía:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \in A; \text{ o bien } \frac{2}{\sqrt{2}} \in B; \text{ o bien } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

Supongamos que $\frac{2}{\sqrt{2}} \in A$, entonces: $\frac{2}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$ y, puesto que $\sqrt{2} > 0$, se cumple que $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ y, por lo tanto, $2 < 2$; lo cual es absurdo. De manera similar se demuestra que $\frac{2}{\sqrt{2}} \notin B$, concluyéndose que $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. ■

Demostración según la definición métrica

Supongamos que existe $\varepsilon > 0$, tal que:

$$\varepsilon = d\left(\sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left|\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right|$$

En tal caso, o bien $\sqrt{2} > \frac{2}{\sqrt{2}}$, o bien $\sqrt{2} < \frac{2}{\sqrt{2}}$. Supongamos $\sqrt{2} > \frac{2}{\sqrt{2}}$, entonces:

$$0 < \varepsilon = d\left(\sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left|\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = \frac{2-2}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

De esta forma, $0 < 0$, lo cual es absurdo. De manera similar, si se supone que $\sqrt{2} < \frac{2}{\sqrt{2}}$, se llega a contradición con el supuesto de la existencia de $\epsilon > 0$. En conclusión, $\varepsilon = 0$ y, por lo tanto, $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. ■

Demostración según la definición conectiva

$A = \left\{\sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}$ es conexo puesto que $B = \left\{\sqrt{2} \cdot (1-r) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot r \,|\, r \in [0;1]\right\} \subseteq A$. En efecto:

$$\sqrt{2} \cdot (1-r) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot r = \sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \cdot r = \sqrt{2} - 0 \cdot r = \sqrt{2} \blacksquare$$

Nota: el considerar $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$ supone admitir la validez de la demostración métrica realizada anteriormente.

Demostración según la definición algebraica

Sea E una ecuación polinómica de la cual $x = \sqrt{2}$ es solución ($\delta\left(E(\sqrt{2})\right) = 1$). Puesto que E es polinímica, necesariamente $-\sqrt{2}$ también es solución y, por lo tanto, la ecuación E puede ser escrita en la forma:

$$p(x)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = p(x)\left(x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = p(x)(x^2 - 2) = 0$$

De manera similar, dada una ecuación polinómica E^* de la cual $x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ es solución ($\delta\left(E^*\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1$), necesariamente $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ también es solución de la ecuación E^*, que puede ser escrita en la forma:

$$q(x)\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = q(x)\left(x^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = q(x)(x^2 - 2) = 0$$

De esta manera, $x = \sqrt{2}$ es solución de una ecuación polinómica es condición suficiente y necesaria para que $x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ sea solución de esa misma ecuación:

$$\forall E, \delta\left(E\left(\sqrt{2}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \delta\left(E\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1 \blacksquare$$

En esta demostración se ha considerado que las ecuaciones polinómicas representan el universo de estudio. Sin embargo, la definición 5 propuesta permite contemplar la posibilidad de que las ecuaciones no sean necesariamente algebraicas. Esto, evidentemente, crea un conflicto porque ¿cómo definir la igualdad desde el punto de vista algebraico mediante objetos que exceden dicho campo? Con otras palabras, ¿es pertinente definir un objeto de una obra matemática con elementos traídos de otra obra, sin realizar previamente una transposición de dichos objetos? La situación no es similar a la aceptación (en ciertos periodos del desarrollo matemático) de los números enteros negativos o imaginarios como herramientas "artificiales" de cálculo para la búsqueda de raíces reales de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales. En este caso, dichos números surgen de manera natural de las manipulaciones algebraicas y, por lo tanto, conforman la "esencia algebraica". Sin embargo, cuando se introduce una ecuación no algebraica se sale *ipso facto* del dominio algebraico, al menos en el contexto usual de las prácticas institucionalizadas. Wilhelmi (2003) ha mostrado en qué forma este problema puede ser resuelto con una revisión de la definición de número irracional y de la noción de solución de una ecuación.

Demostración según la definición funcional

Sea $f(x) = x^2$ en $[0; \infty)$. Se cumple:

1. $f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$
2. $f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

De esta manera, puesto que f es inyectiva, se concluye que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. $\blacksquare$

Demostración según la definición como proceso límite

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{2}{x}$ en $[1; \infty)$. Demostrar que $\sqrt{2}$ es punto de corte de f y g ($f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$) es equivalente a demostrar que $x = \sqrt{2}$ es el cero de la función

$h(x) = x - \frac{2}{x}$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } |x - \sqrt{2}| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(\sqrt{2})| < \varepsilon$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left|x - \tfrac{2}{x} - \sqrt{2} + \tfrac{2}{\sqrt{2}}\right| &= \left|(x - \sqrt{2}) - \left(\tfrac{2}{x} - \tfrac{2}{\sqrt{2}}\right)\right| \leq \\
&\leq \left|x - \sqrt{2}\right| + 2\left|\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq \\
&\leq \left|x - \sqrt{2}\right| + 2\left|\tfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}\cdot x}\right| \leq \\
&\leq \left|x - \sqrt{2}\right| + 2\left|\tfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right| \leq \\
&\leq \left|x - \sqrt{2}\right| + 2\left|\sqrt{2} - x\right| = 3\left|x - \sqrt{2}\right| < 3\delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

En conclusión, $\lim_{x\to\sqrt{2}} h(x) = 0$ o, equivalentemente, $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ y, puesto que f y g son continuas en $[1; \infty)$, se concluye que $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. ■

Demostración según la definición numérica

En las mismas condiciones de la demostración analítica como proceso límite, se demuestra que aproximaciones a $x = \sqrt{2}$ son "ceros" de la función $h(x) = x - \frac{2}{x}$ (con un orden de tolerancia arbitrario, pero fijo; en los límites de la herramienta, calculadora o programa de ordenador, utilizado). Entonces, la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ queda demostrada "tolerancia a tolerancia".

En la tabla 2 se muestra un programa editado con la calculadora gráfica y programable *TI-81*. El programa está basado en el método de Newton o de la tangente. Se podían haber editado otros programas; sin embargo, está fuera del alcance de este trabajo discutir características de eficacia, robustez (corrección y detección de errores) y amigabilidad de un programa.

De esta forma, para cada tolerancia T, se demuestra que ($E \equiv h(x) = 0$):

$$\delta(E(\sqrt{2}, T)) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}, T) = \frac{2}{(\sqrt{2}, T)} \ \blacksquare$$

Sucinto análisis relacional de las demostraciones de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

La demostración según la definición como equivalencia puede generalizarse para cualquier número entero $a > 0$: $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$; o, recíprocamente, aceptar la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ como un caso particular de la fórmula $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$. De esta forma, la proposición $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$ puede ser aceptada como una demostración "aritmética en lenguaje algebraico", esto es, se explicita una relación entre las prácticas en un contexto aritmético y aquéllas referidas a un contexto algebraico. De hecho, la fórmula $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$ refiere una permanencia, antes que una acción; de manera similar a lo que sucede con la *identidad* $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Este cambio de "acción a permanencia" delimita el paso de un lenguaje aritmético a uno algebraico. Gascón (1994) ha razonado que el signo igual en contextos aritméticos

```
PrgmD:NEWTON
:DisP "TOLERANCIA"
:InPut T
:1->X
:Lbl 1
:4X/(X^2+2)->R
:If abs(X-R)<T
:Goto 2
:R->X
:Goto 1
:Lbl 2
:DisP "SOLUCION"
:DisP R
```

Tabla 2: Programa editado con una *TI-81* para la obtención del cero de la función $h(x) = x - \frac{2}{x}$, $x \in [1; \infty)$, dada una tolerancia T.

representa una acción: "2 + 3 = 5" es equivalente a "2 más 3 da 5". Sin embargo, en el lenguaje algebraico, existe una dualidad entre el uso como acción ($3x + 2 = 1$) y el uso como permanencia ($a(b + c) = ab + ac$).

La dualidad del signo igual no es privativo del dominio algebraico. La igualdad analítica como proceso de paso al límite mantiene un estado estático y otro dinámico, asociados a la noción de límite. Si consideramos la constante a como sucesión ($a_n = a$, $\forall n$), entonces a_n tiende de a b: $a = b \iff \forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $|a_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N$. El estado de dualidad es más *impactante* que en el dominio algebraico, puesto que la noción de igualdad se manifiesta a la vez como proceso y como objeto; en el fondo, la dificultad radical que se suscita es la dual naturaleza del infinito matemático (potencial-actual). De esta manera, puesto que los procesos infinitos, que en muchas circunstancias implican alguna operación de paso al límite, son densos en el Análisis Matemático, la dualidad proceso-objeto debe jugar un papel central en los análisis didácticos. En este orden de ideas, Tall (1991) llama *procepts*, pro(cess)(con)cepts, a ciertos objetos matemáticos de naturaleza dual; Cornu (1991) identifica en los estudiantes dos concepciones esencialmente distintas con relación a la noción de límite secuencial (estática y dinámica); Schneider (2001) la necesidad de estructurar la introducción de la noción de derivada en dos etapas: una, aproximación afín (no dinámica); otra, límite de secantes (dinámica); etc.

Por otro lado, es posible identificar la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ como el resultado de la búsqueda de los puntos de corte de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{2}{x}$ en $[1; \infty)$:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

La práctica discursiva participa principalmente de la Teoría de funciones, mientras que la práctica operatoria puede ser asimilada a la resolución de ecuaciones de segundo grado. Bascula entonces esta demostración entre las prácticas asociadas a un contexto funcional y aquéllas asociadas a un contexto algebraico.

Por último, la demostración numérica puede ser comprendida en términos analíticos y resuelta en el marco algebraico. En efecto, la determinación de la existencia y unicidad del límite de la sucesión (x_n), viene dada por la fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4x_n}{x_n^2+2} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Esta expresión involucra prácticas discursivas y operatorias tanto analíticas (acotación, pérdida controlada de información, etc.) como algebraicas (manipulación de las expresiones algebraicas involucradas); siendo complejo etiquetar los diferentes momentos (aspectos) de la actividad matemática (como un complejo de nociones, procesos y significados matemáticos puestos en juego). Una vez justificada la convergencia de la sucesión (x_n) a un número positivo, se introducen límites en ambos miembros de la regla de recurrencia y se resuelve la ecuación que resulta:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{x_n^2+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4x_n}{x_n^2+2}\right) \Rightarrow x = \frac{4x}{x^2+2} \Rightarrow x^3+2x = 4x \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

En la sección siguiente mostraremos cómo estructurar los subsistemas de prácticas asociados a los distintos contextos de uso y los emergentes de estos subsistemas (incluidas la definiciones). Proponemos un organigrama de los distintos objetos asociados a la noción de igualdad y de las correspondencias que se establecen entre ellos. Identificaremos en "niveles" los contextos de uso de la noción de igualdad, los sistemas de prácticas asociadas, los objetos emergentes de dichos sistemas, el lenguaje (voz "igualdad") y, por último, la estructura formal a la que explícita o implícitamente se refiere todo el trabajo matemático (operatorio y discursivo) con relación a la noción de igualdad.

3. Objetos, significados y modelos asociados a la noción de igualdad

La interpretación del significado de los objetos matemáticos en términos de "sistemas de prácticas operatorias y discursivas", relativas a un contexto institucional determinado, conduce a postular un relativismo socio-epistémico con relación a los objetos matemáticos, consecuencia de adoptar un punto de vista antropológico para las matemáticas (Godino, 2003). Este relativismo socio-epistémico contradice aparentemente el carácter absoluto y universal que el matemático profesional atribuye a los objetos matemáticos. La solución que proponemos para superar este dilema es que el matemático identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos y prácticas (operatorias y discursivas); estructura que considera como "el objeto matemático", que representa la referencia implícita de la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes en los distintos contextos de uso.

En el caso de la igualdad, la estructura formal puede ser descrita como: "El signo '=' (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo". De esta manera, la estructura formal representa una descripción de la noción de igualdad sin referente explícito a unas prácticas o contexto concretos.

La figura 1 muestra esquemáticamente la diversidad de objetos asociados a la noción de igualdad. Cada definición representa un objeto emergente de un sistema de prácticas en un determinado contexto de uso. Ninguna definición puede ser privilegiada. Cada binomio "definición - sistema de prácticas" (y, en general, "objeto emergente - sistema de prácticas") determinan un *modelo de la noción de igualdad*; esto es, una relación efectiva o potencial con la noción de igualdad (entendida como sistema) que establece un sujeto (o una institución) a partir de un conocimiento *a priori* de dicha noción. El modelo es pues una forma coherente de estructurar los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas relativas a los mismos y los objetos emergentes de tales prácticas; constituyendo una red o configuración epistémica *local* (asociada a un contexto de uso específico). En cierto modo, cada configuración epistémica local "modeliza" un aspecto parcial del significado de la noción correspondiente: la configuración es el sistema modelizador y la noción el objeto modelizado.

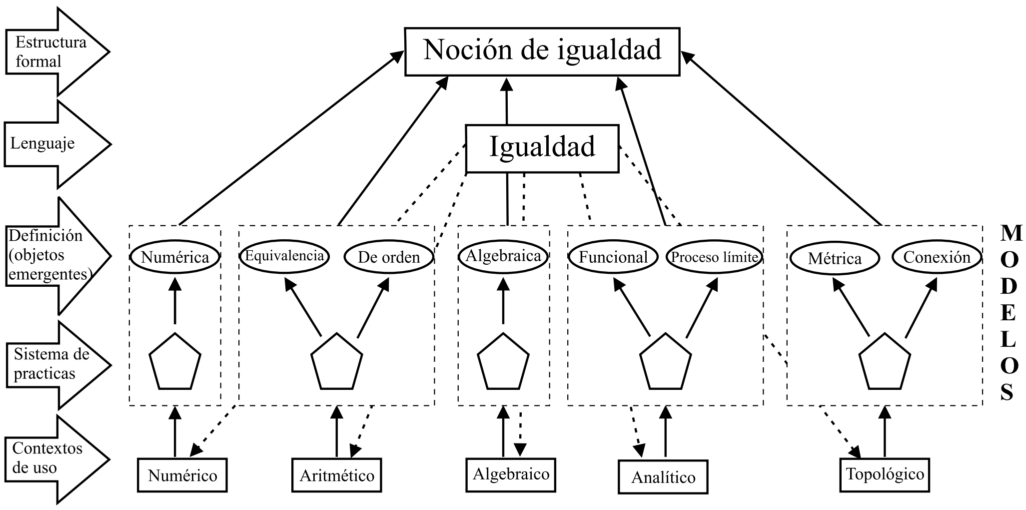


Figura 1: Estructuración de los modelos y significados asociados a la igualdad.

Según los diferentes contextos de uso, la práctica matemática se estructura en torno a ciertas nociones y técnicas matemáticas privilegiadas. Asimismo, la práctica matemática establece ciertos criterios básicos de demostración (sobre cómo evolucionan los procesos deductivos según la naturaleza de las condiciones) y determina pautas de término de una demostración (necesidad de obtención de una tautología semántica, aceptación de una taulogía lógica). De esta forma, es posible explicitar una descripción de los modelos de la noción de igualdad en función de las nociones y las técnicas privilegiadas y las característas de demostración de proposiciones. La tabla 3 sintetiza esta información.

Modelo	Noción	Técnica	Condición	Tautología
Aritmético	Identidad	Transformaciones por equivalencias	Necesaria y suficiente	Semántica
De orden	Relación de orden	Ley de tricotomía	Necesaria y suficiente	Lógica
Métrico	Distancia (valor absoluto)	Transformaciones por equivalencias	Necesaria y suficiente	Semántica
Algebraico	Fórmula Ecuación	Análisis de la estructura de las ecuaciones	Suficiente	Lógico/ semántica
Funcional	Existencia y unicidad de un objeto matemático	Según la naturaleza de los números (algebraicos o trascendentes)	Suficiente	Lógico/ semántica
Analítico	Límite	Avance por pérdida controlada de información	Suficiente	Lógica
Numérico	Comparación y aproximación	Construcción de una sucesión convergente. Programación	Suficiente (tolerancia a tolerancia)	Semántica (tolerancia a tolerancia)

Tabla 3: Características de los modelos asociados a la igualdad.

La noción de *holo-significado* que introduciremos en la sección 4 nos permitirá interpretar la "noción de igualdad" como una red de modelos asociados a dicha noción (*configuración global*). Asimismo, la noción de *holo-significado* nos permitirá responder a la pregunta ¿qué significa que una persona comprende la noción de igualdad?

4. *Holo-significado* de la noción de igualdad

La práctica matemática ha asumido un fenómeno de homonimia con relación a la noción de igualdad; a saber, para evitar un fenómeno de sinonimia, que implicaría designar "cada" igualdad con un término diferente, se mantiene el nombre (igualdad) y el signo (=) común en todos los contextos de uso, aceptando el significado específico que se atribuye a la noción de igualdad en cada uno de ellos[5]. De hecho, desde el punto de vista estrictamente formal, se acepta que la definición de un objeto matemático constituye su significado. De esta forma, el problema sinonimia/homonimia se soluciona sin más que seleccionar una de las definiciones y demostrar a continuación la equivalencia del resto en un teorema. Por ejemplo, si se está trabajando en un contexto eminentemente analítico, se aceptará que dos números a y b son iguales si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple $|a - b| < \varepsilon$ (def.7) y el objetivo será demostrar el siguiente[6]:

[5]Este hecho es una muestra de la imposibilidad de evitar los obstáculos en el progreso de aprendizaje: el discurso se ve constantemente abocado a decidir entre un fenómeno de sinonimia y uno (antagónico) de homonimia. El caso de la igualdad no es patológico; por ejemplo, Wilhelmi (2003) ha observado este mismo fenómeno respecto a las nociones *función continua* y *valor absoluto*.

[6]En el teorema 1 se excluye la definición de igualdad numérica, que es de naturaleza esencialmente distinta. En la sección 2.2 hemos comentado la relación entre la definición numérica y la analítica como proceso de paso al límite.

Teorema 1 (Igualdad) *Dados dos números reales a y b son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. $a = b$.
2. $d(a; b) = 0$.
3. $\{a\} \equiv \{b\}$.
4. $\{a; b\}$ *es conexo.*
5. $a \leq b \wedge b \leq a$.
6. *Para toda ecuación* E, $[\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$.
7. *Sea* $F_i(D)$ *el conjunto de las funciones inyectivas en un dominio* D*, entonces* $\exists f \in F_i(D), \{a, b\} \subseteq D, f \neq \textit{identidad},$ *tal que* $f(a) = f(b)$

Demostrar el teorema 1 supone afirmar que las definiciones dadas designan el mismo objeto (a saber, la igualdad); aún más, la definición de igualdad como proceso límite es considerada como "definición", mientras que el resto de definiciones como "caracterizaciones" unívocas de aquélla. La diferencia entre una definición y una caracterización obedece a convenios matemáticos o usos culturales más o menos explícitos. De esta manera, una caracterización de un objeto matemático es una definición del mismo que rivaliza con una definición anterior que se ha impuesto como natural dentro de unas prácticas institucionales o sociales y sobre la cual, por lo tanto, se ha perdido la conciencia del convenio que la sustenta.

La equivalencia de definiciones se mide en el plano matemático, no en el *cognitivo* (puesto que, en particular, las definiciones no generan las mismas estrategias de acción) ni en el *instruccional* (ya que no vienen motivadas por una introducción equivalente del tópico) ni tampoco en el *didáctico* (dado que el significado social difiere y provoca filiaciones distintas entre el sujeto y el objeto igualdad, generando en el contrato didáctico cláusulas difícilmente equiparables). Por ello, el teorema 1 no representa un instrumento adecuado de estructuración de los modelos asociados a la noción de igualdad.

El estudio de los modelos de igualdad (junto con sus definiciones asociadas) y de la aplicación para la demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ muestran, con relación al significado, la necesidad de un *tránsito flexible* entre los distintos modelos. Wilhelmi (2003) define el *pensamiento matemático flexible* como la acción realizada por un sujeto que le permite el tránsito rutinario entre diferentes modelos asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos; asimismo, le permite establecer nexos firmes entre dichos modelos y uno o varios dominios matemáticos, que determinan un control eficaz de la actividad y capacitan al sujeto para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce. El *holo-significado* incorpora las relaciones entre dichos modelos y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen (que el pensamiento matemático flexible permite identificar, describir y controlar).

Ahora bien, ¿cómo describir el *holo-significado* del signo igual? El signo "=" queda determinado (teóricamente) por las relaciones que se establecen entre los modelos asociados a la noción de igualdad. La figura 2 representa un esquema de dicha noción.

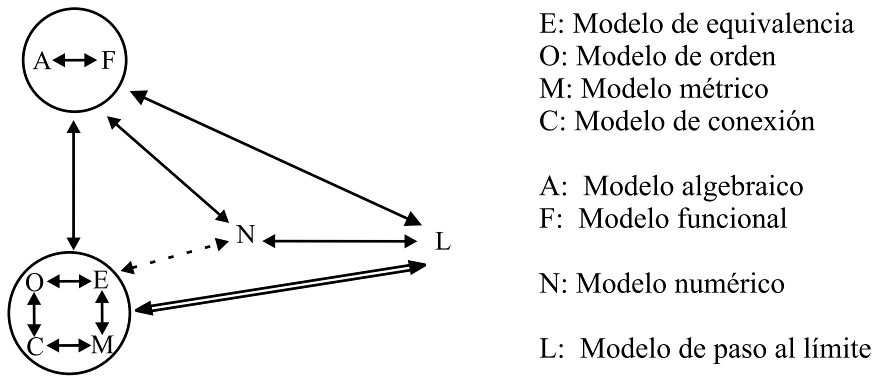


Figura 2: Representación del holo-significado de la noción de igualdad.

En la figura 2, las longitudes de las flechas de relación no son anecdóticas; tampoco el hecho de que unas sean de trazo sencillo, otras dobles y otra discontinua. La longitud determina la distancia de los modelos; distancia medida como *intervalo de tiempo* (dos modelos están próximos si su introducción se puede realizar de manera pertinente dentro de una misma unidad temporal del proceso de estudio) o como *intervalo de lugar* (dos modelos permanecen próximos en la medida en que son utilizados simultáneamente en una amplia clase de situaciones). Las flechas dobles refieren una interacción dialéctica entre modelos: un modelo se comprende esencialmente por oposición a otro modelo. La interacción, entonces, no es circunstancial a unas prácticas naturalizadas o a una estructuración cultural del saber, sino que tiene una relación inescindible con los propios modelos. La flecha discontinua determina una relación de naturaleza no esencialmente epistemológica, sino material (instrumentos de cálculo utilizados) o práctica (usos específicos en las instituciones educativas actuales). Por último, el halo que circunda los modelos determina un sistema de modelos que únicamente pueden ser diferenciados por las realizaciones, esto es, por los usos de los modelos, por los contextos donde aparecen y por el significado atribuido a los mismos.

De esta forma, la distancia entre el modelo aritmético (A) y el modelo analítico (E) se comprende por la debilidad de atracción entre los mismos: escasez de instrumentos ostensivos y ausencia casi total de discurso explícito que contribuya a la aproximación de ambos modelos. Con otras palabras, la debilidad de atracción es una manifestación del desequilibrio evidente que existe entre los modelos aritmético y analítico[7].

[7]En realidad, desde el punto de vista cognitivo, no es evidente establecer que ambos son modelos de la misma noción. De hecho, habría que analizar con detenimiento cómo la idea de "proximidad" influye en la noción de igualdad como equivalencia (en particular, en el momento de emergencia de los números decimales en la escuela).

Cuando el modelo E “irrumpe”, se produce una interacción constante con el modelo A. De hecho, por ejemplo, la sola escritura $\lim a_n = a$ implica la aceptación *ipso facto* de ambos modelos. En este contexto, los modelos A y E permanecen próximos, puesto que son utilizados simultáneamente en una amplia clase de situaciones (proximidad de lugar); sin embargo, están muy distantes en el currículo, no siendo posible establecer su emergencia dentro de una misma unidad temporal del proceso de estudio (distanciamiento de tiempo). ¿Qué implicaciones se derivan de esta distinción clara entre la distancia de lugar (ligada a las prácticas) y la distancia de tiempo (con relación al currículo)? Hemos apuntado (Wilhelmi, 2003) que esta distinción parece constituir una condición necesaria para el surgimiento de un obstáculo epistemológico.

De lo dicho se desprende, por otro lado, que las prácticas escolares privilegian el modelo A y tienden, en muchos casos, huelga decirlo, a reafirmarlo, a perpetuarlo, incluso en ámbitos de aplicación que le son vedados. De hecho, el modelo N es comprendido, en muchas circunstancias, como un subproducto de la noción de límite; la designación de igualdad se restringe, entonces, en la práctica, a la noción de igualdad aritmética como equivalencia, “como posibilidad de obtención de una tautología literal o semántica”. Este presupuesto condiciona el tipo de prácticas naturalizadas dentro de las instituciones escolares actuales con relación a la noción de igualdad; en concreto, la noción de igualdad es considerada una noción *paradidáctica* (Chevallard, 1991).

El modelo E se explica únicamente por oposición dialéctica al modelo A, no siendo posible reducir la interacción entre dichos modelos a las prácticas naturalizadas o a una estructuración cultural del saber: la relación es consustancial a los propios modelos. No sucede así entre los modelos de orden, métrico, topológico y aritmético (algebraico y funcional), que son comprensibles de manera aislada, no siendo necesaria una referencia explícita al otro modelo. Además, la distancia entre estos es mínima, siendo posible discriminar un modelo de otro sólo por el contexto práctico donde aparece y por los efectos que provoca sobre el sistema.

El modelo numérico, como ya hemos señalado, juega un papel articulador entre los modelos algebraico y analítico, por ello se sitúa entre ambos; lo cual no implica que la relación entre los modelos algebraico y analítico siempre se realice por intermedio del modelo numérico. Por otro lado, la relación del modelo numérico con el modelo aritmético se realiza en función de los medios materiales utilizados (el signo igual de las calculadoras representa una aproximación numérica con un orden de aproximación fijado por las características técnicas de la misma) y de las prácticas naturalizadas en las instituciones actuales (se escribe, por ejemplo, que $\pi = 3,1416$, para expresar “aproximadamente iguales” o una “aproximación suficientemente buena”, ¿pero esto no implica en sí mismo la aceptación de un error admisible?).

Por último, ¿qué quiere decir que una persona comprende el “signo igual”? Sucintamente, que interpreta de manera adecuada la figura 2, esto es, que es capaz de discriminar los diferentes modelos de igualdad, de estructurar dichos modelos en un todo complejo y coherente y de afrontar las necesidades operativas y discursivas con relación a la noción de igualdad en los diferentes contextos de uso.

5. Implicaciones curriculares del holo-significado

El análisis hecho sobre la noción de igualdad no es circunstancial ni aislado. Wilhelmi (2003) hace un uso implícito del holo-significado como interacción de modelos matemáticos y muestra cómo esta noción posibilita la descripción sistémica de las nociones "función continua" y "valor absoluto". Asimismo, determina un marco de referencia para las nociones "función continua" y "valor absoluto" dentro del sistema didáctico, esto es, una perspectiva global de qué técnicas se quiere enseñar en un proyecto global de enseñanza. Por otro lado, la descripción del significado de referencia del objeto estadístico "mediana" que se presenta en Godino (2002) como un listado de objetos clasificados en seis categorías (nociones, proposiciones, lenguaje, argumentos, acciones y problemas), puede ser comprendido como el "sustrato base" del holo-significado de la noción de mediana (siendo necesario un análisis relacional que en dicho trabajo queda únicamente apuntado).

Vinner (1991) sugiere que una de las metas de la enseñanza de las matemáticas debería ser encauzar más tempranamente los hábitos de pensamiento cotidiano hacia el modo del pensar técnico-científico y concluye que, en la adquisición de un conocimiento, la definición es la mejor representación del conflicto entre la estructura de las matemáticas y el progreso cognitivo. Sin embargo, en una enseñanza basada en la teoría pedagógica del currículo se infravalora la definición. Y es que, desde la citada perspectiva teórica, la cuestión de fondo es la temporalización y secuencia de contenidos: se introduce un conjunto "suficiente" de nociones, técnicas y proposiciones, para, progresivamente, definir nuevas nociones, descubrir nuevos procedimientos y enunciar nuevos teoremas. Frecuentemente, la introducción de las nociones se realiza de forma ostensiva, de suerte que, a posteriori, casi de manera irremediable, el conocimiento se mostrará ineficaz para afrontar situaciones complejas. Entonces, el sistema educativo procede a definir las nociones, otra vez ostensivamente y de manera formal. A partir de este momento, se acepta, generalmente de forma implícita, que las nociones se adquieren por medio de sus definiciones y que los estudiantes son capaces de usar éstas para resolver problemas y probar teoremas. En definitiva, se presume una transparencia entre el objeto matemático y su definición formal.

Desde la perspectiva del programa epistemológico (Gascón, 1999) la estructuración del currículo sólo es posible en base a las técnicas que se desea enseñar (y justificaciones de estas técnicas), que condicionan los sistemas de prácticas ante una clase de problemas. De esta forma, el holo-significado de un objeto matemático descrito, como interacción de modelos matemáticos asociados a dicho objeto, constituye una herramienta macro y micro didáctica.

La determinación de las técnicas que se desea enseñar permiten establecer orientaciones sobre la ecología de los saberes y la elaboración de una transposición didáctica pertinente, que se concretará en la construcción de un currículo o en la determinación de pautas generales para la confección de un libro de texto dentro de una institución concreta (nivel macrodidáctico). Por otro lado, es posible establecer criterios de descripción y comprensión de las concepciones de los estudiantes en la construcción y comunicación de conocimientos matemáticos específicos, así como potenciales formas de gestión de un aprendizaje de tipo constructivista, donde el profesor necesita, "en tiempo real", anticipar las acciones de los estudiantes y desarrollar mecanismos de recogida de información y de interpretación, así como estrategias de actuación y toma de decisiones, adaptándose a situaciones concretas (nivel microdidáctico).

6. Conclusiones

6.1. Macrodidácticas

El estudio realizado sobre la noción de igualdad pone de manifiesto en particular la necesidad de elaborar instrumentos mejor adaptados a la enseñanza integrada de la aritmética, el álgebra y el análisis; en concreto, medios para evitar los fenómenos de *linealidad* y *reduccionismo*. Brevemente, la linealidad se puede describir afirmando que "la aritmética precede al álgebra y ésta al análisis". Se entiende con esto que son "obras cadena" y que el aprendizaje de cada una establece condiciones previas necesarias para el aprendizaje de la "siguiente". El esquema de enseñanza es:

$$\text{Aritmética} \rightarrow \text{Álgebra} \rightarrow \text{Análisis}$$

El reduccionismo se puede describir en los siguientes términos: el álgebra es comprendida como una aritmética generalizada (con letras) y el análisis como un álgebra de funciones. De esta manera, la enseñanza del álgebra se centra en la manipulación simbólica y en generalizar los métodos aritméticos concretos (implementados sobre números concretos); según Gascón (1994), este hecho ha conducido a una verdadera desarticulación del cuerpo de problemas de la aritmética generalizada. Por otro lado, la enseñanza del análisis ha intentado mostrar la potencia de las manipulaciones formales esbozadas en la enseñanza del álgebra. Estos dos reduccionismos invierten, en la práctica, el esquema anterior:

$$\text{Aritmética} \leftarrow \text{Álgebra} \leftarrow \text{Análisis}$$

La noción de igualdad no puede ser restringida a un dominio matemático único. En efecto, el signo "=" viene determinado por el conjunto de relaciones que se establecen entre los modelos asociados a él y que emergen de las prácticas usuales en las instituciones educativas actuales. Estas prácticas han privilegiado sobremanera el modelo aritmético, remarcando la importancia de las transformaciones "por equivalencias" y la simplificación de expresiones aritméticas y algebraicas para la obtención de representantes "canónicos" de los objetos matemáticos.

Esta focalización del tipo de tareas ha determinado que las relaciones fundamentales entre el sistema conformado por los modelos aritmético, de orden, métrico y topológico y el sistema algebraico-funcional y los modelos analítico y numérico sean de tipo dialéctico; de esta manera, no es posible, en particular, la comprensión de la noción analítica de igualdad como proceso límite sino por oposición a la noción aritmética de relación de equivalencia entre dos objetos.

El análisis de la noción de igualdad es una muestra de que la enseñanza atomizada y lineal de la aritmética, el álgebra y el análisis (en este orden) no contribuye a su aprendizaje; es necesaria una concepción triangular que permita, en cada problema concreto, la interacción de aproximaciones numéricas, algebraicas y analíticas para la obtención de una solución. Aún más, el estudio realizado sugiere el desplazamiento del foco de interés en la enseñanza del análisis matemático: de los análisis formales (por ejemplo, manipulaciones literales de funciones algebraicas) hacia la comunicación y construcción de conocimientos de forma más intuitiva, gráfica y numérica (donde la comparación y la aproximación representan procesos fundamentales). En este contexto, las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas y programables y softwares especializados) deben jugar un papel central en la introducción de las nociones, procesos y significados de objetos analíticos. De hecho, "la recherche en didactique de l'analyse ne peut se déployer en faisant abstraction de la dimension technologique" (Artigue, 1998, p.258).

De esta forma, se denuncia una supuesta necesidad funcional en la enseñanza del Cálculo numérico que lo pospone a la introducción y desarrollo de las nociones fundamentales del Análisis matemático. El estudio numérico de las relaciones entre objetos constituye una vía de acceso a la noción de igualdad, posibilitando un tránsito flexible entre los diferentes modelos propuestos. No hay pues una oposición entre las justificaciones analíticas y numéricas, ni una gradación pragmática de las mismas (ésta únicamente puede establecerse con relación a una teoría y a unos criterios preestablecidos sobre el discurso matemático).

6.2. Microdidácticas

Es necesario construir una ingeniería didáctica para el desarrollo del objeto "igualdad" tal y como ha sido mostrado. Dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998) esto supondría la búsqueda de una situación fundamental, capaz de generar (en la mayoría de los estudiantes) tensiones estables con gran parte de los modelos ligados al saber igualdad, así como filiaciones útiles con los contextos de uso donde dichos modelos se inscriben.

La determinación de una situación fundamental de la noción de igualdad es compleja. Hemos razonado cómo el modelo analítico de igualdad es comprendido, en muchas circunstancias, como un subproducto de la noción de límite; esto nos permite conjeturar que la búsqueda de una situación fundamental de la noción de igualdad es equivalente a la búsqueda de una situación fundamental de la noción de límite secuencial, cuya problemática ha sido ampliamente debatida (limitaciones de la situación del petrolero (Di Martino, 1992); la posibilidad de obtención de situaciones con un componente esencial adidáctico (Bloch, 1999); uso de las nuevas tecnologías para la introducción de la noción de límite secuencial (Wilhelmi 2003); etc.).

La complejidad apuntada no implica el rechazo de la búsqueda de una situación fundamental, ni para la noción de límite secuencial ni para la noción de igualdad. Legrand (1996) ha defendido la tesis paradójica según la cual la búsqueda de situaciones fundamentales es consistente tanto para la investigación en didáctica de las matemáticas como para la enseñanza, independientemente de si se encuentra o no una situación. Grosso modo, Legrand justifica la búsqueda de situaciones fundamentales porque constituye un instrumento fructífero de análisis de saberes, de determinación del proyecto de enseñanza y de selección de intervenciones didácticas. Aún más, "la recherche des situations fondamentales est un passage obligé pour le professeur qui veut engager et gérer un réel 'débat scientifique' sur un savoir précis" (Legrand, 1996, p.223).

La Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) (Godino, 2003) determina una solución para elaborar una "enseñanza de calidad", esto es, una enseñanza que conjugue el *saber hacer* (técnica) y el *significado* (ámbito de aplicabilidad de la técnica), que articule el análisis epistemológico propio de la búsqueda de una situación fundamental (se haya o no obtenido una) con las restricciones metodológicas y de tiempo dentro de una institución concreta. En particular, con relación a la noción de igualdad, el objetivo consistiría en establecer un sistema de prácticas institucionales que posibilite la interacción explícita del modelo aritmético de igualdad con el resto de modelos y, muy en particular, con el modelo analítico, de tal forma que la noción de igualdad, comprendida como sistema, reequilibre los pesos que los modelos tienen con relación al significado personal que los sujetos le atribuyen.

6.3. Teóricas

La TSD postula que todo "saber" puede ser modelizado por una o varias situaciones adidácticas que preservan el significado atribuido a dicho saber. La noción de saber, dentro de la TSD, se refiere explícitamente a los conocimientos que son objeto de estudio (explicitables, comunicables y validables o invalidables) en una cultura y en una sociedad determinada. La noción de *holo-significado* (red de modelos) representa la estructuración del conocimiento objetivado y, por lo tanto, constituye una referencia para el proceso de modelización apuntado. Aún más, la noción de holo-significado puede ser utilizada en el análisis *a priori* de la búsqueda de una situación fundamental para la introducción o desarrollo de una determinada noción matemática; en concreto, determinar el grado de representatividad de la situación con relación al significado institucional pretendido.

Asimismo, las nociones de modelo y holo-significado de un objeto matemático son herramientas teóricas para el análisis epistemológico de los objetos discursivos matemáticos, esto es, los productos culturales resultantes de la actividad matemática. Las nociones de modelo y holo-significado proporcionan una respuesta a las preguntas: ¿qué es una noción matemática?, ¿qué es conocer dicha noción?; en particular, ¿qué es la noción de igualdad?, ¿qué quiere decir conocer la noción de igualdad?

Por otro lado, la TAD propone caracterizar la actividad matemática partiendo de las tareas y de las técnicas, para llegar finalmente al discurso tecnológico-teórico (sin problematizar la naturaleza de los objetos que intervienen en dicho discurso). La noción de praxeología modeliza el conocimiento matemático como actividad humana, entendiendo por conocimiento el producto (refinado) de un estudio sistemático, intencionado, histórico y social. El producto más inmediato del estudio son las técnicas ("saber-hacer"), cuya vigencia está supeditada a un discurso tecnológico-teórico que las justifique ("saber", segundo producto). De esta manera, "saber-hacer" y "saber" constituyen las dos caras de una praxeología ("praxis-logos").

La TAD y TFS comparten los mismos supuestos antropológicos sobre los conocimientos institucionales (saberes). De hecho, los sistemas de prácticas operativas y discursivas son a la TSF lo que las praxeologías matemáticas son a la TAD. De esta forma, la noción de praxeología representa un componente de un esquema más general de la actividad matemática (y de los productos que de ella se obtienen) propuesto dentro de la TFS. De hecho, la TFS considera que cada noción matemática es el antecedente (expresión) de una función semiótica (Godino, 2002) cuyo consecuente (significado) es la configuración formada por el sistema de prácticas, contextos de uso de la expresión y la red de objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (figura 3).

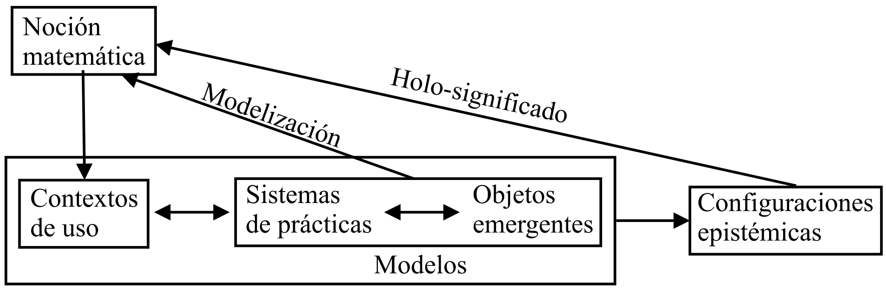


Figura 3: Herramientas para el análisis epistemológico en la TFS.

De esta manera, la TFS está interesada en teorizar la noción de significado en la didáctica, lo que hace mediante la noción de función semiótica y una ontología matemática asociada. El punto de partida de la TFS es tratar de caracterizar la naturaleza y el significado de las nociones matemáticas; se parte de los elementos del discurso tecnológico (nociones, proposiciones, argumentos, etc.) y se concluye que su naturaleza es inescindible de los sistemas de prácticas y contextos de uso correspondientes.

Por último, las nociones de praxeología y de configuración epistémica constituyen herramientas poderosas para el análisis didáctico y curricular. Las teorías del currículo estructuran la materia objeto de estudio en contenidos *conceptuales, procedimentales y actitudinales*, obviando la especificidad de cada disciplina. La TAD propone, en matemáticas, estructurar los currículos en tareas, técnicas, tecnologías y teorías, resaltando las tensiones que fuerzan la aparición de una determinada técnica y las justificaciones necesarias para su "vida" en el contexto escolar (tecnologías y teorías subyacentes). Sin embargo, en el proceso de estudio no siempre se explicita la cuaterna (tarea, técnica, tecnología, teoría).

La TFS, por su lado, distingue seis categorías de objetos primarios constituyentes de un sistema de prácticas: nociones, proposiciones, lenguaje, argumentos, acciones y problemas. Una configuración epistémica es el sistema de objetos (y de funciones semióticas que se establecen entre estos objetos) con relación a la comunicación, validación, formulación o resolución de una situación matemática. De esta forma, la TFS permite describir el análisis de las demostraciones de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ en términos de la noción de sistema de prácticas operatorias y discursivas, sin necesidad de explicitar técnicas generales de demostración o procedimientos de justificación de esas técnicas. En efecto, el núcleo del discurso está constituido por las *definiciones*, que no representan elementos de una praxeología (entendida como cuaterna), sino más bien los objetos ostensivos de una configuración epistémica con relación a la demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (*problema*); de hecho, la *argumentación* de las demostraciones se realiza mediante un *lenguaje* formalizado, se fundamenta en ciertas *nociones* (recta real, relación de orden, distancia, conexión, ecuación, función inyectiva, entorno-límite, error-aproximación), se apoya en *propiedades* de las nociones involucradas y en leyes lógicas (el tercio excluso, por ejemplo) y se lleva a cabo por medio de *acciones* específicas (selección de representantes de un objeto matemático, definición de intervalos o funciones, edición de un programa, etc.).

Reconocimiento

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto de investigación *Impacto de las nuevas tecnologías en la construcción y comunicación del significado de objetos matemáticos en bachillerato*, financiado por la Universidad Pública de Navarra, resolución nº 1.109/2003 de 13 de octubre.

Referencias

Artigue, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 231–262.

Bloch, I. (1995), *Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse*, Mémoire DEA. Bordeaux: Univesité Bordeaux I, LADIST.

Boyer, C. (1969), *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad, 1996.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17–54.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

Cornu, B. (1991), Limits. In D. Tall (ed.), *Avanced Mathematical Thincking* (pp.133–166). Dordrecht, HOL: Kluwer.

Di Martino, H. (1992), *Analyse du contrôle épistemologique d'une situation didactique: La situation du pétrolier*, Mémoire DEA. Grenoble: IREM Grenoble.

[Disponible en: `Http://www.ac-grenoble.fr/irem/publications.html`]

Gascón, J. (1999 Agosto), 'Didactique fondamentale' versus 'Advanced Mathematical Thinkings': ¿dos programas de investigación inconmensurables? *Actes $X^{è}$ Université d'été de Didactique des Mathématiques*, Tomo II (pp.152–170). Houlage: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Gascón, J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à 'l'arithmetique généralisée'. *Petit x* 37, 43–63.

Godino, J.D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

[Disponible en: Http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maetros]

Godino, J.D (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237–284.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.

Legrand, M. (1996), La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221–280.

Leikin, R. & Winicki-Landman, G. (2000), On equivalent and non-equivalent definitions: part 1". *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 24–29.

Schneider, M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques à propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 21(1/2), 7–56.

Tall, D. (ed.) (1991), *Avanced mathematical thincking*. Dordrecht, HOL: Kluwer.

Vinner, S. (1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Avanced mathematical thincking* (pp.65–81). Dordrecht, HOL: Kluwer.

Wilhelmi, M. R. (2003), *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, nº23. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Wittgenstein, L. (1978), *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad, 1987.