

# LA DIMENSIÓN METADIDÁCTICA EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA<sup>1</sup>

Bruno D'Amore ([damore@dm.unibo.it](mailto:damore@dm.unibo.it))

Università di Bologna

Vicenç Font ([yfont@ub.edu](mailto:yfont@ub.edu))

Universitat de Barcelona

Juan D. Godino ([jgodino@ugr.es](mailto:jgodino@ugr.es))

Universidad de Granada

Recibido: 18/06/2007 Aceptado: 25/09/2007

## Resumen

La clase de matemáticas constituye una micro-sociedad donde tienen lugar la construcción y difusión del conocimiento matemático a través de las interacciones sociales entre los estudiantes y el profesor. En consecuencia, el aprendizaje matemático está condicionado por diversos metaconocimientos matemáticos y didácticos. En este artículo, hacemos una revisión de nociones teóricas usadas para el estudio de las normas que regulan la construcción social del conocimiento matemático, en particular las normas sociomatemáticas y el contrato didáctico. Seguidamente proponemos una aproximación global al estudio de la dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, usando algunas nociones del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

**Palabras claves:** normas matemáticas y sociomatemáticas, contrato didáctico, metacontrato, dimensión normativa, educación matemática, enfoque ontosemiótico

## Summary

Mathematics classroom is considered as a micro-society where the building and diffusion of mathematical knowledge takes place through the social interactions between the teacher and the students. Therefore, mathematics learning is conditioned by different mathematical and didactical meta-knowledge. In this paper we first summarize the theoretical notions used to study the norms that rule the social construction of mathematical knowledge, in particular socio-mathematical norms and didactic contract. We then propose a global approach to study the meta-didactical dimension of mathematics teaching and learning processes, by using some notions of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction.

**Key words:** mathematical and socio-mathematical norms, didactical contract, meta-contract, normative dimension, mathematics education, onto-semiotic approach.

## Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático

En diversos trabajos realizados en el marco del “enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático”<sup>2</sup> (Godino y Batanero, 1994; Font y Godino, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhemi, 2006; D'Amore y Godino, 2006; Godino, Font, Wilhemi y Castro, 2007; Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006) se han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático:

- 1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);

---

<sup>1</sup> <sup>1</sup>Versión ampliada y revisada de la conferencia invitada al *Ile Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique*. Uzès (France), 31 Octobre - 3 Novembre 2007.

- 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
- 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;
- 4) Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
- 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El primer nivel de análisis pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas; su finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis didáctico debiera progresar desde la situación – problema y de las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (análisis 1) a las configuraciones de objetos (epistémicas / cognitivas) y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (análisis 2) hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, lo cual constituye un tercer nivel o tipo de análisis didáctico orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

Las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas están condicionadas y soportadas por una compleja trama de normas y metanormas, que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (niveles 1 y 2 de análisis), sino que también regulan otras dimensiones de los procesos de estudio (cognitiva, afectiva, etc.).

El cuarto nivel de análisis considerado en el “enfoque ontosemiótico” (EOS) pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio. Este nivel es el resultado de tener en cuenta los fenómenos de índole social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva – explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo aquí y por qué?

Sin embargo, la Didáctica de la Matemática no debería limitarse a la mera descripción que lo deja todo como estaba, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Por tanto, son necesarios criterios de “idoneidad” o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora. Se trata de realizar una acción o meta-acción para ser más precisos (la valoración) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En consecuencia, ha de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.

En consecuencia, consideramos necesario aplicar un quinto nivel de análisis a los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su *idoneidad didáctica* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

El objetivo de este artículo es profundizar en el cuarto nivel de análisis, esto es, en desarrollar herramientas para el estudio de las normas y metanormas que condicionan y soportan los procesos de estudio matemático. En particular, se realiza un estudio de la dimensión metadidáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática que complementa el realizado en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2007) sobre las normas que regulan los procesos de estudio. Así mismo, se desarrolla el trabajo de D'Amore (2005) y D'Amore y Godino (2007).

Una vez presentados los diferentes niveles del análisis didáctico y planteada la necesidad de desarrollar herramientas para el análisis de la dimensión normativa (y metanormativa), en la siguiente sección hacemos una síntesis de las nociones teóricas usadas en Didáctica de la Matemática para abordar el estudio de la dimensión normativa y metanormativa. En la tercera sección proponemos un posicionamiento del “enfoque ontosemiótico” (EOS) sobre los constructos expuestos en los apartados anteriores<sup>3</sup> e indicamos algunas de las implicaciones que se derivan del mismo. Para ello introducimos, entre otras, las nociones de metapráctica y metaobjeto.

### **Antecedentes teóricos sobre normas en educación matemática**

El estudio de los fenómenos de índole social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constituye una línea de investigación de creciente desarrollo en educación matemática. Se complementan de este modo las investigaciones de índole cognitiva que centran su atención principalmente en el aprendizaje del sujeto individual. En estos trabajos, *saber y hacer matemáticas* se concibe como una actividad esencialmente cultural y social (Lerman, 2000).

El estudio de los mencionados fenómenos ligados a las interacciones sociales en la clase y su dependencia de otros factores externos (culturales, políticos, etc.) está siendo abordado desde diversos planteamientos y usando herramientas teóricas dispares. Así, desde el Interaccionismo simbólico (Sierpínska y Lerman, 1996; Godino y Llinares, 2000) se usa la noción de “norma social” y “norma sociomatemática” (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996); en la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) algunos aspectos del “contrato didáctico” desempeñan un papel similar a las anteriores; en un marco sociológico más general se utiliza, entre otras, la noción de “habitus” (Bourdieu, 1972) para explicar el proceso por el cual lo social se interioriza en los individuos.

En el apartado 2.1 comenzamos haciendo una síntesis de las nociones elaboradas en el marco del interaccionismo simbólico para abordar el estudio de los fenómenos de índole social en la clase de matemáticas. En el apartado 2.2 sintetizamos la noción de contrato didáctico según se concibe en la “teoría de situaciones didácticas” y también la de metacontrato didáctico propuesta por Chevallard (1988). En el apartado 2.3 describimos las nociones de grupos secundarios en la clase de matemáticas y prácticas de adaptación, desarrollada en D'Amore (2005). El uso que se hace en este trabajo del prefijo “meta”, aplicado a las prácticas, nos lleva a explorar las investigaciones didácticas que se han interesado por la dimensión “meta” (metacognición y metaconocimiento), en particular el trabajo de Robert y Robinet (1996) que sintetizamos en la sección 2.4.

## Normas sociales y sociomatemáticas

Las investigaciones en educación matemática realizadas en el marco del interaccionismo simbólico (Sierpinska y Lerman, 1996; Godino y Llinares, 2000) ponen de manifiesto que las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por 'obligaciones' o normas no explícitas (Voigt, 1994). Las normas sociales en el seno de la clase son convenciones que describen cómo comunicarse unos con otros, así como las obligaciones que describen cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación.

La investigación sobre la enseñanza ha identificado la existencia de unas normas sociales que ayudan a caracterizar las micro-culturas del aula. Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula no importando la disciplina de la cual se trate. Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes. Por ejemplo, se supone que en la clase los alumnos deberían adoptar una actitud crítica hacia las afirmaciones que se hacen, tanto por uno mismo como por los demás, independientemente de si se trata de una clase de matemáticas, de ciencias o de literatura. Se espera (norma social) que los estudiantes expliquen las soluciones que proponen a cualquier cuestión. Son normas sociales caracterizadas por explicar, justificar y argumentar ya que se supone que en situaciones ideales los estudiantes deberían desafiar las explicaciones y justificaciones de sus compañeros, así como justificar sus propios argumentos.

Sin embargo, existen aspectos normativos del discurso matemático, generados en el seno de la clase, que son específicos de la actividad matemática escolar. Por ejemplo, la comprensión de lo que en el aula se puede considerar "matemáticamente diferente", "matemáticamente sofisticado", "matemáticamente eficiente" y "matemáticamente elegante", así como lo que se ha de asumir como una explicación matemáticamente aceptable. Voigt (1995) identifica, además, como normas socio-matemáticas,

- las normas de clase que implican la valoración de una solución a un problema como inteligente o inventiva, y
- las explicaciones y argumentaciones consideradas como matemáticamente correctas.

Es decir, las normas socio-matemáticas son aspectos normativos del discurso o retórica matemática que son específicas de la actividad matemática de los estudiantes y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Existen unas normas sociales que rigen una discusión y un intercambio de argumentos independientemente de lo que se está diciendo (norma social, por ejemplo, que se deben presentar argumentos diferentes de los que se han presentado hasta ese momento), junto con el reconocimiento de lo que es matemáticamente aceptable, teniendo en cuenta sobre lo que se está hablando (norma socio-matemática, por ejemplo que lo propuesto es matemáticamente diferente). Metodológicamente, tanto las normas sociales generales como las normas socio-matemáticas se infieren al identificar regularidades (o rupturas) en los patrones de interacción social. Tienen con frecuencia un carácter "meta" ya que se refieren a otras prácticas matemáticas (justificar, explicar, operar, ...).

### **Contrato y metacontrato didáctico**

Para la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) el único medio de “hacer” matemáticas es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a este respecto, plantear nuevas cuestiones. «El profesor debe por tanto efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. Si esta devolución se lleva a cabo, el alumno entra en el juego y si acaba por ganar, el aprendizaje se ha realizado» (Brousseau, 1986, p. 51). De esta manera sintética se describe la parte esencial del “contrato didáctico”, las reglas que deberían seguirse en el diseño e implementación de procesos de estudio de las matemáticas para lograr un verdadero aprendizaje. La principal tarea del profesor será seleccionar “buenas situaciones – problemas” que den sentido al saber matemático pretendido, procurar su “devolución” a los estudiantes creando las condiciones para que éstos se involucren en una verdadera actividad matemática de resolución, comunicación y validación de las soluciones.

Pero, ¿qué ocurre si el alumno rehúsa o evita el problema, o no lo resuelve?. El maestro tiene entonces la obligación social de ayudarlo e incluso a veces de justificarse por haber planteado una cuestión demasiado difícil. «Se establece una relación que determina -explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el profesor y el alumno, tienen la responsabilidad de administrar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de ese contrato que es específico del “contenido”: el conocimiento matemático pretendido» (Brousseau, 1986, p. 51).

El contrato didáctico se puede interpretar como el “tira y afloja” que se establece en las relaciones profesor – alumno tendentes a que el aprendizaje de un saber matemático se realice de la manera más autónoma posible por parte del alumno. El profesor “tira” cuando cede el protagonismo al aprendiz enfrentado a una situación, se abstiene de dar información adicional; pero cuando el nuevo conocimiento se revela como demasiado alejado del alcance del alumno y existe riesgo de abandono, el profesor “afloja” aportando información, modificando el “medio” al que se tiene que enfrentar el alumno. En la teoría de situaciones el contrato didáctico es consustancial con el objetivo de aprendizaje autónomo del alumno enfrentado a un medio didáctico.

«La intervención del profesor modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el alumno debe aprender. El objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente» (Brousseau, 1988; p. 322).

Las actuaciones del profesor y los alumnos deben cumplir las siguientes expectativas:

- el profesor debe crear las condiciones suficientes para que los alumnos se apropien de cierto conocimiento, y que reconozca cuándo se produce tal apropiación;
- el alumno debe cumplir las condiciones establecidas por el profesor;
- la relación didáctica debe “continuar”, cueste lo que cueste;
- se supone que el profesor crea las condiciones suficientes para la apropiación de los conocimientos por los alumnos y debe “reconocer” esta apropiación cuando se produce.

Al igual que en el interaccionismo simbólico, donde las normas sociomatemáticas son negociadas en el seno de la clase, lo esencial del “contrato didáctico” no son las normas que restringen las actuaciones del profesor y los alumnos, sino el proceso de búsqueda (negociación) de las cláusulas del contrato hipotético. De este modo, las prácticas (comportamientos) del profesor y de los alumnos en un ambiente de estudio regido por PARADIGMA, Vol. XXVIII, N° 2, diciembre de 2007 / 49-77

la dialéctica de las situaciones adidácticas, propia de la teoría de situaciones, son objeto de reflexión e interpretación por parte de dichos agentes, originando metaconocimientos de naturaleza similar a las normas sociomatemáticas descritas en la sección anterior.

En el propio desarrollo del contrato didáctico, sus cambios y rupturas en el avance de la progresión didáctica, Chevallard (1988, p. 58) identifica una estructura que permanece inalterada: «es el conjunto de cláusulas que gestionan, en un campo dado, cualquier adhesión a un contrato, y asegura su eficacia, cualquiera que sean los contenidos particulares». Chevallard llama metacontrato a este conjunto de cláusulas definitorias. «Esta estructura permitiría al alumno identificar y dar significado a los “desplazamientos” del contrato didáctico, las ambivalencias, las polisemias, ..., en una palabra, lo que no se dice y que es constitutivo del contrato didáctico que, en último término, son vividos como rupturas en la legislación que se supone establece» (Sarrazy, 1995, p. 23).

En el caso del contrato didáctico la “cultura” que exige su funcionamiento se presenta como un saber práctico esencial para la eficacia del proceso didáctico, y en particular para el desarrollo y la adquisición de significado por los alumnos de la actividad matemática propuesta. Las relaciones entre el profesor y los alumnos, que son objeto de análisis mediante la noción de contrato didáctico, se caracterizan por su asimetría: cada uno tiene su lugar específico, sus tipos propios de intervenciones legítimas, etc., lo que determina su acción sobre el contrato. «Entre los alumnos y el profesor, en efecto, existe una relación de fuerzas cuyo objetivo es, no solamente el respeto del contrato – que normalmente se adquiere, salvo accidente, en virtud del metacontrato con el cual cada uno está comprometido -, sino el contenido del contrato mismo, es decir sus cláusulas específicas» (Chevallard, 1988, p. 60).

### **Grupos secundarios en la clase de matemáticas y prácticas de adaptación**

D'Amore (2005) identifica fenómenos de índole sociológica ligados al funcionamiento de la clase de matemáticas en cuanto constituida por subgrupos heterogéneos respecto a los intereses y expectativas de aprendizaje.

La clase puede ser vista como una sociedad específica de individuos cuya unidad social se debe a la necesidad, sancionada por ley, de la realización de “prácticas” definidas y en gran medida compartidas. La clase, de hecho, responde a los requisitos típicos que los sociólogos exigen a un grupo de individuos para poder usar la denominación “sociedad” (Robertson, 1977, p. 83). Dichos requisitos son: ocupan un “territorio” común (el aula, la escuela), interactúan entre ellos, saben que pertenecen al mismo grupo, tienen, al menos en parte, una cultura común (o, por lo menos, esto es lo que se supone).

Cada sociedad determina sus prácticas específicas; algunas tienen origen en los objetivos constitutivos por la sociedad (a veces abstractos), otros en la adaptación al hecho mismo de esta pertenencia. Por tanto, estas “prácticas” se pueden dividir en dos grandes categorías: (1) aquellas establecidas a priori por dicha sociedad (el aprender, el compartir la actividad, ...), (2) aquellas que nacen a causa del objetivo que con dicha actividad se planea obtener (la competitividad, las acciones relativas al contrato didáctico, aquellas destinadas a hacer suponer a quien evalúa que se poseen habilidades que de hecho no se tienen, ...).

Las primeras son prácticas codificadas y por tanto funcionales (Robertson, 1977); son aquellas que dan un significado a la constitución misma de dicha sociedad; las segundas, en relación con las prácticas funcionales, podemos considerarlas como prácticas desviadas o extra-funcionales. La tipología de estas prácticas desviadas

es diversa. Entre otras, tenemos prácticas que permiten llegar a los resultados deseados utilizando métodos no apropiados (por ejemplo, ante un problema que pregunta qué día será el 30 de enero del 2030 con el objetivo de poner en funcionamiento el álgebra modular, el alumno responde utilizando un calendario que ha encontrado en internet) o bien prácticas que claramente violan las normas y metanormas del contrato didáctico (por ejemplo, cuando el alumno copia las tareas de un compañero, con lo cual está renunciando a ser protagonista de la construcción de su propio conocimiento).

Las dos tipologías de prácticas están condicionadas por perspectivas diversas. Por ejemplo, en el seno de la misma clase, algunos estudiantes tienen como objetivo aprender lo que se ha establecido a priori como conocimiento a adquirir (significados institucionales) (Godino y Batanero, 1994), para otros el objetivo es aprender a influir en el juicio que hará quien evalúa (este hecho no es típico sólo de las clases de los primeros niveles escolares, sino de todos los niveles, incluida la universidad y el postgrado).

Entre los estudiantes de una misma clase algunos aceptan las actividades y objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor como representante de una institución de referencia y tratan de apropiarse de los significados propuestos. Otros grupos de estudiantes no asumen plenamente tales objetivos y significados, bien por carencias en los conocimientos previos necesarios, o por inadaptaciones respecto de los compromisos escolares.

El hecho que la instrucción se conciba como la transmisión sistemática y formalizada de conocimientos, habilidades y valores debería llevar a la realización de determinadas prácticas funcionales. Pero, dado que tal sistematicidad y formalización son burocratizadas en un sistema social que prevé una evaluación, este hecho desencadena automáticamente la necesidad, en una parte de los sujetos implicados, de realizar determinadas prácticas desviadas como adaptación a la sociedad – clase. Algunas de estas prácticas desviadas, por ejemplo “copiar” de un compañero las tareas, se pueden considerar metaprácticas personales en el sentido que son prácticas desviadas que subvierten algunas de las metanormas del contrato didáctico y que se guían por metanormas personales del alumno (por ejemplo, es “lícito” copiar las respuestas del compañero en una prueba de evaluación, si con ello se consigue aprobar).

Un análisis de tipo sociológico deberá develar los orígenes de las desviaciones en las prácticas ligadas a los procesos de adaptación de los sujetos a la micro-sociedad formada por la clase, discriminándolos respecto de otros obstáculos de origen didáctico, epistemológico y cognitivo.

Por otra parte, las prácticas de los individuos que pertenecen a la sociedad están en conexión con las expectativas y las limitaciones puestas por el entorno en el cual viven y por las posibilidades que éste ofrece. Por tanto, las prácticas no son libres; por el contrario, están fuertemente condicionadas por el entorno, sistémicamente entendido (Bagni y D’Amore, 2005; D’Amore, Radford y Bagni, 2006). Ahora bien, a pesar de que el macro contexto proyecta expectativas de comportamiento en alumnos y profesores, los comportamientos se (re)construyen por medio de procesos sociales del aula y deben interpretarse, en primer lugar, desde el micro contexto del aula (Civil y Planas, 2004).

Desde este punto de vista, las prácticas (de las dos categorías enunciadas líneas arriba) que se realizan en el aula forman parte de un sistema de adaptación de los individuos (los estudiantes) a la sociedad, bajo la dirección (custodia, análisis, ejemplificación, tutela, evaluación, ...) de otro individuo que la institución social reconoce como su representante (el docente).

## Investigaciones sobre metacognición social e individual en Didáctica de la Matemática

En relación con el uso del prefijo “meta” en las investigaciones didácticas, Robert y Robinet (1996) hicieron un estudio extenso y sistemático, que abarca los trabajos sobre metacognición realizados bajo el enfoque de la psicología cognitiva (estrategias de los sujetos individuales enfrentados a tareas de resolución de problemas), como también investigaciones que podrían incluirse en la perspectiva interaccionista. «Cuando el profesor expone conocimientos en clase (en la fase de institucionalización por ejemplo), acompaña su discurso estrictamente matemático de frases que se refieren a dicho discurso, pero sin contener necesariamente informaciones matemáticas en sentido estricto: el profesor puede hablar de manera cualitativa de los conocimientos que trata de descontextualizar, puede explicar para qué sirven, cómo utilizarlos, puede mencionar los errores frecuentes que ocasionan. Por tanto hay en este comportamiento *todo un discurso sobre las matemáticas*, más o menos importante, más o menos difuso, más o menos explícito, que nosotros vamos a clasificar como discurso meta en tanto que discurso sobre las matemáticas» (p. 147).

Para estos autores el prefijo “meta” ligado a palabras tales como cognición, cognitivo, conocimientos, ..., tiene dos tipos de significados, correspondientes a diversas investigaciones originariamente psicológicas:

- la metacognición hace referencia a la conciencia individual, esto es, al conocimiento que tiene el sujeto de sus propios procesos de resolución de problemas (control, supervisión, evaluación, ...)
- los metaconocimientos referidos a conocimientos potenciales de un sujeto (un alumno o un ordenador) sobre el aprendizaje, la construcción de los conocimientos, esto es, los métodos (especialmente científicos), o sobre el propio conocimiento; el acento se pone sobre los contenidos más que sobre la conciencia que tiene el sujeto de ellos.

En el caso de las matemáticas, Robert y Robinet agrupan los trabajos en los que se hace un uso de lo “meta” en dos apartados: a) Los “precursores”: Piaget y el análisis reflexivo; Polya y los métodos; Glaeser y la heurística. b) La literatura anglo-sajona después de 1985, Schoenfeld y la corriente de la “resolución de problemas”. Proponen un uso más ampliado del prefijo “meta” delante de palabras tales como conocimiento, cognitivo o cognición para «designar los elementos de información o de conocimientos **SOBRE** las matemáticas, su funcionamiento, su utilización, su aprendizaje, tanto si son generales o están ligados a un dominio particular» (p.156). Tales informaciones se refieren a

- los métodos, estructuras y organización del conocimiento matemático;
- al acceso al conocimiento matemático, acceso de un individuo dado o más general (juegos de cuadros, papel de los cuestionamientos, ejemplos y contraejemplos, así como el papel de la reflexión epistemológica en el aprendizaje);
- los modos de producción y funcionamiento matemático (control, guía).

### Un enfoque ontosemiótico de los metaconocimientos matemáticos y didácticos

En los procesos de estudio de las matemáticas en las instituciones escolares, se ponen en juego diversos tipos de conocimientos que podemos agrupar en dos categorías: matemáticos y didácticos, incluyendo en los didácticos los aportados por otras disciplinas, como pueden ser la psicología y la sociología, pero que deben ser asumidos y articulados por la Didáctica de las Matemáticas. Hemos visto en las investigaciones referidas en las



secciones anteriores que ambos tipos de conocimientos son objeto de reflexión, clasificación, valoración, ... por las personas que intervienen en la relación didáctica, dando lugar a nuevos conocimientos de segundo orden, o metaconocimientos.

En esta sección proponemos un posicionamiento del EOS sobre los constructos expuestos en los apartados anteriores e indicamos algunas de las implicaciones que se derivan del mismo.

### **Contrato didáctico**

Para el EOS resulta especialmente relevante la adaptación sociológica de la noción de “juego de lenguaje” realizada, entre otros, por Appel (1985) y Habermas (1987), en la cual la comprensión individual es el resultado de la participación en un juego de lenguaje cuyas reglas son públicas. “Comprender” consiste en “saber orientarse” mediante el reconocimiento de la regla o reglas correspondientes. De acuerdo con este punto de vista, consideramos que no es posible analizar un proceso de instrucción sin comprender, dicho en términos de Wittgenstein (1953), las reglas del juego de lenguaje en el que se desarrolla. Es decir, el sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico en un contexto institucional determinado.

Consideramos que constructos como “contrato didáctico”, “normas sociales y sociomatemáticas”, se usan para referirse, en cierta manera, al conjunto de reglas del “juego de lenguaje” en el que participan profesores y alumnos cuando participan en un proceso de instrucción. Dichos constructos son nociones útiles, pero en nuestra opinión insuficientes, para dar cuenta de la complejidad de la dimensión normativa de los tales procesos.

En el EOS, después de hacer una síntesis de los variados modos de entender el contrato didáctico y las normas sociales y sociomatemáticas en didáctica de las matemáticas, se adopta una perspectiva que integra estas nociones como parte de una “dimensión normativa de los procesos de estudio”. En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2007) se adopta un punto de vista global sobre la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática proponiendo clasificar las normas según dos direcciones complementarias:

- a. El momento en que intervienen las normas: diseño curricular, planificación, implementación y evaluación. Las normas no sólo se ponen de manifiesto en los momentos o fases en que tienen lugar las interacciones profesor – alumnos (implementación), sino también en los momentos de planificación, evaluación, y en la fase de diseño curricular, donde se configuran los significados de referencia que orientan y condicionan los significados pretendidos, implementados y evaluados.
- b. La faceta o dimensión del proceso de estudio a que se refiere la norma: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. Esto permite fijar la atención en las normas que regulan:
  - El trabajo del profesor en relación conl saber matemático (entendido como sistema de prácticas institucionales).
  - El trabajo de los estudiantes en relación conl saber matemático (entendido como sistema de prácticas personales).
  - El uso los recursos tecnológicos y temporales (faceta mediacional).
  - La interacción docente –discente y discente-discente.

- La afectividad de las personas que intervienen en el proceso de estudio.
- La relación con el entorno (sociocultural, político, laboral, ...) en el que se desarrolla el proceso de instrucción (faceta ecológica).

Las normas también se pueden clasificar según su origen y el tipo y grado de coerción, como se indica en la figura 1.

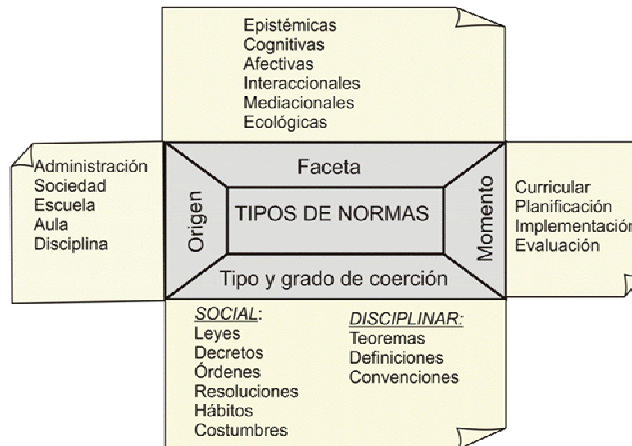


Figura 1: Dimensión normativa. Tipos de normas

## Metacontrato

Como se ha indicado en la sección 2.2, en la literatura sobre el contrato didáctico se distingue entre contrato y metacontrato didáctico. Desde nuestro punto de vista el metacontrato didáctico se entiende como el conjunto de normas que forman parte de cualquier contrato didáctico. Algunas de estas normas son claramente metanormas, en el sentido de que son normas que se aplican a otras normas. Por ejemplo, la regla que dice que hay que respetar las reglas, o la regla que dice que siempre se está siguiendo alguna regla. En cambio, hay otras normas que forman parte de este metacontrato, no tanto por el hecho de que se puedan considerar como metanormas, porque son normas sobre normas, sino por el hecho de que se mantienen inalterables durante un cierto periodo (por ejemplo durante una etapa educativa) y forman parte de todos los conjuntos de normas que se van sucediendo durante este periodo, aunque después no se cumplan o lo hagan de forma defectuosa. En este sentido, el caso del contrato didáctico, entendido en la manera clásica de Brousseau, también tiene un componente meta-normativo, dado que los estudiantes interpretan y valoran las cláusulas implícitas del contrato, haciéndolas explícitas y comunicables.

Hay ejemplos evidentes de este tipo de normas del metacontrato que se mantienen inalterables durante un cierto periodo, por ejemplo, la norma que dice que, en principio, hay que intentar implementar el significado pretendido, o la que dice que no hay que copiar en los exámenes, etc. Otro ejemplo, menos evidente, son las normas metaepistémicas que a continuación pasamos a comentar.

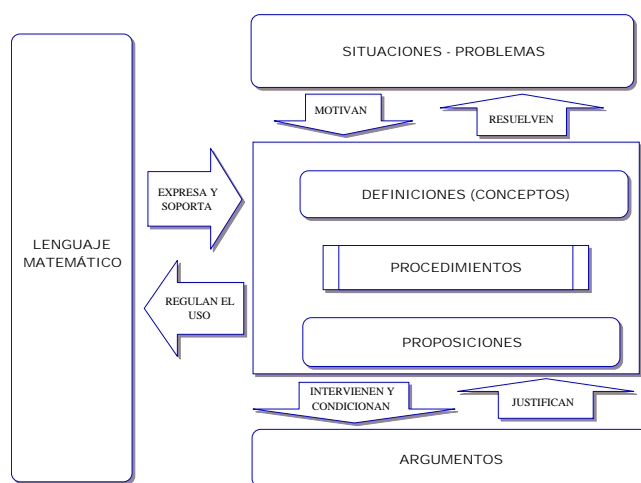
En la clase de matemáticas se establece un compromiso básico: enseñar y aprender matemáticas. En el EOS se llama *faceta epistémica de la dimensión normativa* (o *normas epistémicas*, para abreviar) al conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una determinada institución. Las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje, las representaciones que se utilizan, las definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Dicho en la

terminología del EOS, las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan.

En el EOS se considera que, para describir la actividad matemática, es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas... 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas (figura 2). Las configuraciones informan de las “condiciones epistémicas para dicha actividad” (configuración previa) o de los “indicadores del producto o resultado de dicha actividad” (configuración emergente). Si además de la “estructura” interesa analizar su génesis y “funcionamiento” son necesarias otras herramientas, en especial los procesos asociados (Font, Rubio y Contreras, 2007).

La herramienta *configuración epistémica* nos permite ver la estructura de los objetos que posibilitan la práctica matemática. En nuestra opinión, el par <configuración epistémica, prácticas que posibilita> es una herramienta mucho más explicativa que el constructo “normas matemáticas” utilizada en algunas investigaciones realizadas en el marco sociocultural (Planas y Gorgorió, 2001).

Las normas epistémicas contemplan las configuraciones epistémicas que regulan la práctica matemática en un marco institucional específico. Por otra parte, cada uno de los componentes de la configuración epistémica está relacionado con normas metaepistémicas (usualmente consideradas como normas sociomatemáticas, aunque hay algunas investigaciones en las que se las considera como normas matemáticas). Si nos fijamos, por ejemplo, en las situaciones-problemas, es necesario que el alumno pueda responder a preguntas del tipo, ¿qué es un problema? ¿cuándo se ha resuelto un problema? ¿qué reglas conviene seguir para resolver un problema?, etc. Lo mismo si nos fijamos en el componente “argumento” ya que el alumno necesita saber qué es un argumento en matemáticas, cuándo se considera un argumento válido, etc. En consecuencia, las configuraciones epistémicas llevan asociadas un sistema de normas, que pueden ser compartidas (configuración metaepistémica), o personales de los estudiantes involucrados en los procesos de aprendizaje correspondientes (configuración metacognitiva).



**Figura 2:** Componentes y relaciones en una configuración epistémica

La configuración metaepistémica se genera y, sobre todo, se mantiene durante un largo período de PARADIGMA, Vol. XXVIII, N° 2, diciembre de 2007 / 49-77

tiempo (por ejemplo, un curso o una etapa educativa) y coexiste con muchas configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo.

Puesto que las configuraciones metaepistémicas son utilizadas para valorar la práctica matemática que se realiza, se puede considerar que las configuraciones metaepistémicas juegan, en cierta manera, un rol axiológico en la actividad matemática.

En el marco de las investigaciones socioculturales se da una controversia sobre el papel de las normas matemáticas. En algunas investigaciones, por ejemplo Planas y Gorgorió (2001), se habla explícitamente de “normas matemáticas” siendo, según nuestra clasificación, la norma considerada una norma metaepistémica. Por otra parte, hay autores que defienden eliminar la categoría de normas sociomatemáticas y limitarse a hablar de normas matemáticas puesto que consideran que todas las normas matemáticas son el resultado de una actividad sociocultural (Sekiguchi, 2005). En nuestra opinión, la propuesta de considerar configuraciones epistémicas y configuraciones metaepistémicas puede dar luz sobre dicha controversia.

En el EOS más que hablar de metacontrato, se propone hablar de la dimensión metanormativa de los procesos de instrucción. En dicha dimensión se consideran tres grandes bloques: las normas metaepistémicas, las metainstruccionales y las metacognitivas. La figura 3 ilustra estos tres bloques de la dimensión metanormativa.

El profesor quiere que los alumnos se apoyen en una configuración epistémica previa para realizar unas prácticas matemáticas de las que se obtendrá una configuración epistémica emergente; dicha realización estará regulada por la configuración metaepistémica (que, como ya se ha dicho, coexiste con otras configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo). Para ello, implementará una configuración instruccional que, a su vez, también estará regulada por una configuración metainstruccional. Por otra parte, el profesor pretende que sus alumnos personalicen las configuraciones epistémicas en configuraciones personales, las configuraciones metaepistémicas en metacognición matemática y las configuraciones instruccionales en metacognición didáctica.

La constitución de estas configuraciones “meta” (metaepistémica, metainstruccional y metacognitiva) en muchos casos emerge de procesos no explícitos, sino basados en ciertos hábitos o maneras de actuar. Por ejemplo, la costumbre del profesor de incluir, en el enunciado de los problemas que se resuelven mediante una suma, palabras claves como “añadir” o “sumar” puede hacer emerger conocimientos que forman parte de la configuración metacognitiva de los sujetos miembros de la institución correspondiente: los problemas de sumar incorporan en su enunciado la palabra clave “añadir”.

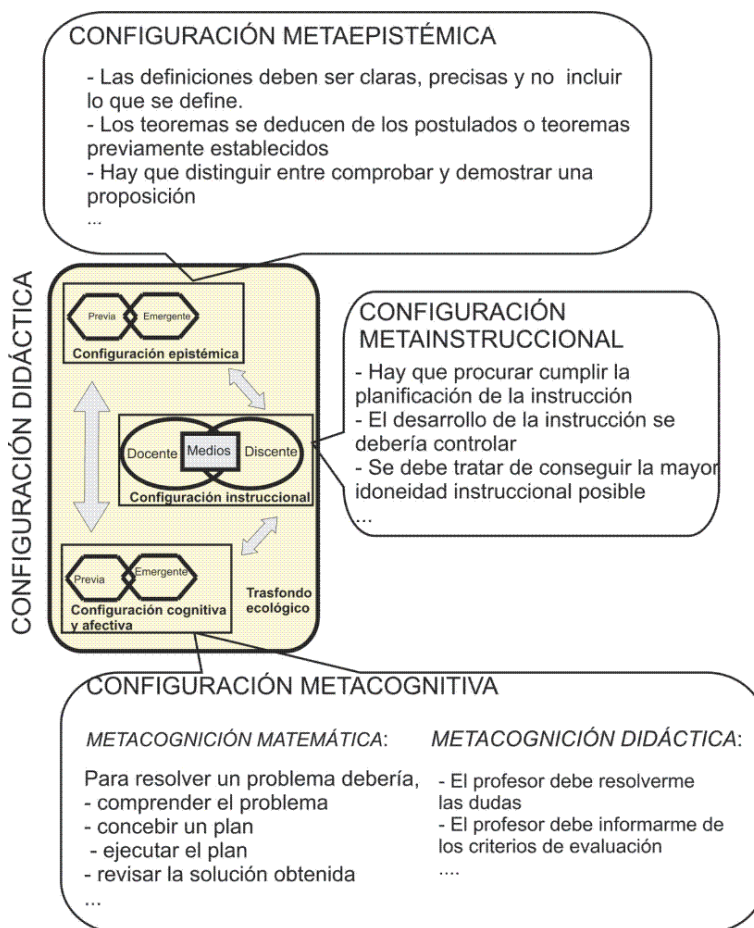


Figura 3: Componentes de la dimensión metanormativa

## Metaprácticas y prácticas desviadas

### Metaprácticas

Las prácticas que son posibilitadas y reguladas por las configuraciones “meta” se pueden considerar como metaprácticas. Por ejemplo, la práctica que consiste en revisar una demostración de un teorema para ver si se ajusta a lo que se considera una demostración matemática sería una metapráctica.

Las metaprácticas están asociadas a una nueva clase de situaciones-problemas metamatemáticas o metadidácticas. ¿Cómo espera mi profesor que demuestre este tipo de problemas? (o sea, ¿qué es una demostración matemática en estas circunstancias particulares, según mi profesor?) ¿Debería el profesor explicarme cómo resolver este tipo de problemas? etc.

### Prácticas desviadas

El hecho que la instrucción se conciba como la transmisión sistemática y formalizada de conocimientos, habilidades y valores debería llevar a la realización de determinadas prácticas funcionales; dicho en la terminología del EOS, el conjunto de prácticas personales que conforman el significado personal del alumno debería ser acorde con el significado institucional implementado, el cual, a su vez, debería ser representativo del PARADIGMA, Vol. XXVIII, N° 2, diciembre de 2007 / 49-77

significado de referencia. Para conseguir este objetivo, se realiza un proceso de instrucción que está regulado por diferentes tipos de normas (epistémicas, cognitivas, mediacionales, afectivas, interaccionales y ecológicas). Las interpretaciones y valoraciones que hace el alumno de este tipo de normas pueden ser el origen de prácticas funcionales (que es lo que espera la institución), o bien de prácticas desviadas (no deseadas por la institución). Por ejemplo, la valoración e interpretación que haga el alumno de las normas ecológicas puede ser la causa de ciertas prácticas desviadas relacionadas con la evaluación.

En los procesos de instrucción, la faceta normativa - ecológica tiene como principal objetivo conseguir dos tipos de competencias en los alumnos. Por una parte, la sociedad encarga a la escuela que eduque a sus ciudadanos y los comprometa con su comunidad, es decir, se trata de educar a ciudadanos garantizando la asunción de los valores de una sociedad democrática, garantizando los derechos de todos y fomentando los deberes cívicos. Por otra parte, el objetivo de la institución educativa es conseguir una formación inicial de profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional. Por tanto, en el momento de tomar decisiones sobre los fines del proceso educativo, se han de tener presente los amplios sectores sociales no relacionados directamente con esta situación educativa pero sí afectados por ella: la sociedad en su conjunto que será atendida por los nuevos profesionales.

Esta faceta normativa - ecológica tiene que ver con los contenidos que se van a enseñar ya que los significados pretendidos que se especifican en las directrices curriculares tratan de contribuir a la formación socio-profesional de los estudiantes. El cumplimiento de los programas es otro requisito que condiciona el trabajo del profesor ya que los aprendizajes logrados por sus estudiantes constituyen el punto de partida de los estudios en cursos posteriores. La obligación de asegurar un determinado nivel de conocimientos y la obligación de informar de él a la sociedad está en el origen de la obligación que tiene el profesor de matemáticas de hacer evaluaciones sumativas que informen a los padres y a la sociedad en general del nivel de logro matemático alcanzado por los estudiantes.

La necesidad de una evaluación sumativa desencadena automáticamente la necesidad, en una parte de los sujetos implicados, de realizar determinadas prácticas desviadas como adaptación a la sociedad – clase. Algunas de estas prácticas desviadas, por ejemplo copiar en los exámenes de matemáticas, se pueden considerar metaprácticas personales en el sentido que son prácticas desviadas que subvierten algunas de las metanormas funcionales que condicionan el proceso de instrucción, y que se guían por metanormas personales del alumno (por ejemplo, “hay que copiar cuando se pueda”).

A propósito del desvío de las prácticas, hay un momento en el cual se presenta este desvío, un momento en el cual el alumno renuncia a realizar prácticas matemáticas y empieza a realizar prácticas desviadas como medio de adaptación a un sistema en el que no se siente integrado. No obstante, el alumno procura que las prácticas desviadas puedan ser consideradas por el profesor como prácticas matemáticas (por ejemplo, en lugar de razonar, aprender los procedimientos de manera memorística).

La generación de prácticas desviadas, en ocasiones, puede ser inducida por el propio profesor (por ejemplo, mediante un énfasis en las rutinas o, más en general, por las prácticas que se derivan de una equivocada interpretación de su papel como profesor), con lo cual dichas prácticas desviadas no entran en contradicción con el conjunto de normas que condicionan el proceso de instrucción. En estos casos, los significados efectivamente implementados en el aula pueden tener poca idoneidad epistémica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) si se comparan con un significado de referencia institucional.

Las interpretaciones y valoraciones de los alumnos se reinterpretan en el EOS por medio del constructo “objetos personales matemáticos y didácticos”. Como consecuencia de las prácticas realizadas en los procesos de instrucción en los que ha participado, el alumno genera, además de objetos personales matemáticos, “objetos personales didácticos”.

Los objetos personales matemáticos y didácticos del alumno y sus significados (entendidos como sistemas de prácticas, configuraciones y metaconfiguraciones asociadas) no se pueden considerar aisladamente sino que hay que considerarlos integrados y conexiónados. Por ejemplo, cuando consideramos el objeto personal “función” de los alumnos hay que ser conscientes que estamos considerando un objeto cuyo significado constituye un conjunto de prácticas sobre las funciones, su enseñanza y aprendizaje. Este conjunto de prácticas se puede descomponer en prácticas matemáticas en las que interviene el objeto matemático “función” y prácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las “funciones”.

A su vez estos significados están relacionados con otros significados entre los que podemos destacar, su significado personal de “matemáticas”, de “aprender” y de “enseñar”. Algunos de estos significados de objetos personales didácticos se pueden considerar incluso como significados de objetos personales metadidácticos.

El significado de los objetos matemáticos y didácticos del alumnado se concreta en un conjunto de prácticas, algunas de las cuales son funcionales, pero muchas otras son prácticas desviadas. Las prácticas desviadas que pone en juego el alumno ante una cierta situación (matemática o instruccional), y que son calificadas como desviadas desde el punto de vista de una institución de referencia, pueden estar motivadas por metaconocimientos del alumno, bien matemáticos (metacognición matemática), o bien didácticos (metacognición instruccional o didáctica). Dicho de otra manera, algunas de las prácticas desviadas se pueden considerar como metaprácticas.

Los alumnos personalizan los significados institucionales (configuraciones epistémicas y prácticas que posibilitan) en significados personales (configuraciones cognitivas y prácticas que posibilitan). También personalizan las configuraciones metaepistémicas (y las prácticas que posibilitan) en forma de metacognición (y prácticas personales que posibilitan); y finalmente también personalizan las normas instruccionales y las prácticas instruccionales en las que han participado, en forma de normas instruccionales personales (y prácticas que posibilitan). Estos tres componentes constituyen el núcleo de los significados de los objetos matemático-didácticos de los alumnos (figura 3). Dichos significados se concretarán en prácticas funcionales y en prácticas desviadas.

Queremos resaltar también que, de la misma manera que hay un momento en el cual el alumno realiza prácticas desviadas como medio de adaptación a un sistema en el que no se siente integrado, las instituciones también pueden realizar prácticas desviadas como adaptación a otras instituciones. Por ejemplo, las pruebas de acceso a la universidad establecen relaciones de dependencia institucional respecto de los centros de estudio de educación secundaria. Si en tales pruebas de acceso no se incluyen habitualmente problemas de probabilidad, aunque sí aparezcan en los currículos oficiales, probablemente los profesores de secundaria le darán menos importancia (o no la tratarán) en el desarrollo de sus cursos. Se genera así una práctica desviada: infravaloración o ausencia de la probabilidad.

La noción de dependencia institucional está estrechamente relacionada con la de transposición didáctica (Chevallard, 1991), puesto que, como resultado de la adaptación de una institución a otra, se produce un tipo de transposición u otra. Es decir, los significados de referencia (entendidos como sistemas de prácticas, configuraciones epistémicas y metaconfiguraciones epistémicas asociadas) se pueden convertir, como resultado de la transposición didáctica, en unos significados pretendidos, implementados y evaluados que sean muy poco representativos de los significados de referencia. Si bien esta falta de representatividad puede ser significativa en el caso de las prácticas y las configuraciones epistémicas, donde realmente suele ser significativa dicha falta de representatividad es en la configuración metaepistémica. Dicho de otra manera, la transposición didáctica, actúa tanto en la dimensión normativa como en la dimensión metanormativa, pero es en ésta última donde es más evidente..

### **Reflexiones Finales**

En este trabajo hemos introducido unas primeras ideas sobre lo que podríamos llamar una perspectiva metanormativa para el análisis didáctico. Se trata de describir de una manera sistemática y coherente un conjunto de hechos y fenómenos didácticos que ocurren de manera inevitable y que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las nociones introducidas permiten articular, dentro de un mismo sistema, herramientas y resultados ya conocidos, obtenidos bajo modelos teóricos diferentes, como son algunos fenómenos del contrato didáctico de la teoría de situaciones (Brousseau, 1997), las normas sociomatemáticas introducidas en las investigaciones sobre interaccionismo simbólico (Godino y Linares, 2000), las prácticas de adaptación (D'Amore, 2005), y en general el uso de lo "meta" en las investigaciones cognitivas y didácticas (Robert y Robinet, 1996).

Podemos decir que los trabajos mencionados en la sección 2 sobre antecedentes teóricos afrontan cuestiones relacionadas con la construcción social del conocimiento matemático en la clase de matemática. En el caso del interaccionismo simbólico, el centro de atención no son tanto las propias prácticas matemáticas, sino la reflexión sobre dichas prácticas y las condiciones sociales de su realización. Por ello podemos considerarlo en cierto sentido como estudios metacognitivos, no referidos a la cognición individual, sino social.

En el caso de la teoría de situaciones el eje central es la construcción del conocimiento matemático por los propios estudiantes, pero al tener lugar en la clase y ser resultado de las interacciones de los alumnos con el medio creado por el profesor (del que también forma parte) tienen lugar procesos de reflexión e interpretación, tanto sobre los propios objetos matemáticos (situaciones, técnicas, etc.) como sobre los papeles a desempeñar por los distintos agentes. Esto quiere decir que, en una clase de matemáticas conducida y observada con las herramientas de la teoría de situaciones, tienen lugar procesos metacognitivos de índole social sobre los objetos matemáticos y didácticos, pero que en el desarrollo actual de dicha teoría no son explícitamente discriminados respecto de los procesos cognitivos propiamente dichos.

El desarrollo del enfoque ontosemiótico que se ha realizado en este trabajo permite la incorporación al análisis didáctico de la dimensión normativa (y metanormativa). Se han propuesto herramientas que permiten el análisis de las normas y metanormas que condicionan los procesos de instrucción. Creemos que la principal aportación de este trabajo es un desarrollo integrado de las siguientes nociones: "contrato didáctico", "metacontrato", "normas sociales y sociomatemáticas", "valoración e interpretación de la norma" y "prácticas de adaptación" en el marco del enfoque ontosemiótico.

Para finalizar queremos resaltar que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben



orientarse al logro de unos objetivos formativos que incluyan unas prácticas matemáticas valiosas para la formación de los ciudadanos y profesionales y ello requiere también la apropiación de unos metaconocimientos sobre las propias matemáticas y sobre los conocimientos didácticos que contribuyan positivamente a dicha formación. El objetivo de la investigación didáctica en este campo debe ser clarificar el papel de los metaconocimientos, discriminar sus diferentes tipos y funciones en los procesos de estudio de las matemáticas y evitar, en la medida de lo posible, efectos no deseados de ciertas prácticas y metaprácticas desviadas.

### Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MCYT-FEDER.

### Notas

1. Recordemos que, a finales del siglo XIX, se desarrolló una línea de estudio en el ámbito de la reflexión sobre los fundamentos de la matemática, la cual se conoce como *metamatemática*. Esta línea de estudio coincide con la tentativa de matematizar también los instrumentos, las técnicas, los lenguajes y las prácticas con las cuales se construye la propia matemática; en un programa de este tipo participó también David Hilbert (Lorenzen, 1971).
2. En el diseño curricular incluimos también las actividades de reflexión e indagación realizadas por la comunidad de personas e instituciones interesadas en la planificación global del estudio de las matemáticas.
3. Hay que tener en cuenta también la perspectiva macrosociológica del grupo que configura la identidad del sujeto que interpreta y valora, la cual evidentemente también influye en la generación de los objetos personales matemático-didácticos del alumno y en su significado.

### Referencias

- Apel, K.O. (1985). *Transformación de la filosofía*, vols I y II. Madrid: Taurus.
- Bourdieu, P. (1972). *Esquisse d'une theorie de la pratique*. Genève: Droz.
- Bagni, G. T., y D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19, 1, 73-89.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 309-336.
- Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Chevallard, Y. (1988). Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation. *IREM Marseille*, 14, 40-75.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 7-12.
- Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room* PARADIGMA, Vol. XXVIII, N° 2, diciembre de 2007 / 49-77

*cultures*. Hillsdale, N.J.:Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matemática interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*. 19 (3), 325-336.
- D'Amore, B. y Godino, J.D. (2006). Puntos de vista antropológico ed ontosemiótico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 20 (1), 9-38.
- D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). Metapráticas matemáticas y didácticas originadas en relaciones de dependencia institucional. *Documento interno*, Universidad de Bolonia.
- D'Amore, B., Radford, L. y Bagni GT. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B (1), 11-40.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores, *Educação Matematica Pesquisa* 8 (1), 67-98.
- Font, V., Rubio, N. y Contreras, A. (2007). *Procesos: Una mirada desde el Enfoque Ontosemiótico*. Conferencia invitada RELME, 21. Maracaibo, Venezuela.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26, 1, 39-88.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 9 N° Especial, 131-155.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2007). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Conferencia Invitada en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Maracaibo, Venezuela.
- Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1), 70-92.
- Gusmao, T. R. S. (2006). Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: Una perspectiva ontosemiótica. Tesis Doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.
- Habermas, J. (1987). *Teoría de la Acción Comunicativa I. Racionalidad de acción y racionalización social*. Madrid: Taurus.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (19-44). Westport: Ablex.
- Lorenzen, P. (1971). *Metamatemática*. Madrid: Tecnos.
- Planas, N. y Gorgorió, N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (1), 135-150.

- Robert, A. y Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), 145-176.
- Robertson I. (1977). *Sociobiology*. New York: Worth Publishers Inc.
- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, 112, 85-118.
- Sekiguchi, Y. (2005). Development of mathematical norms in an eighth-grade japanese classroom. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 153-160). Melbourne: PME.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, NL: Kluwer, Academic Publ.
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.
- Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures* (pp. 163-199). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. N. York, Macmillan.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

## LOS AUTORES

### **Bruno D'Amore**

PhD in Mathematics Education, Universidad "Costantitno Filosofo", Nitra, Eslovaquia. Full Professor en la Universidad de Bologna, Facultad de ciencias matematicas, fisicas y quimicas, Departamento de Matematica NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)  
Investigacion sobre los fundamentos epistemológicos de la didáctica de la matemática  
*damore@dm.unibo.it*

### **Vicenç Font**

Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Barcelona  
Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica  
Facultat de Formació del Professorat; Universitat de Barcelona  
Didáctica del Análisis; Epistemología i Didáctica del Análisis; Enfoque Ontosemiótico  
*vfont@ub.edu*

### **Juan D. Godino**

Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada (España)  
Facultad de Ciencias de la Educación  
Desarrollo y aplicaciones del Enfoque Ontosemiótico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.  
*jgodino@ugr.es*