CRITERIOS DE IDONEIDAD DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Aplicación a una experiencia de enseñanza de la noción de función[1]

Juan D. Godino[2], Miguel R. Wilhelmi[3] y Delisa Bencomo[4]

Resumen

La intención última de la investigación didáctica es encontrar dispositivos "idóneos" para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos. De esta manera, un objetivo para la didáctica de las matemáticas debe ser la descripción y la valoración de la pertinencia de un proceso de instrucción matemática efectivo; asimismo, es necesario determinar pautas para la mejora del diseño y la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Estas implicaciones para la docencia no tienen carácter normativo o técnico (obtención de un listado de prescripciones "a ejecutar"), sino explicativo. En este trabajo analizamos la idoneidad de un proceso de instrucción sobre la noción de función con estudiantes universitarios según tres dimensiones: epistémica, cognitiva e instruccional.

1. PROBLEMA DIDÁCTICO Y MARCO CONCEPTUAL

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) tiene un doble objetivo: uno, la *intervención crítica* en los sistemas didácticos (los saberes didácticos fundamentados científicamente acotan la acción); otro, la *prueba de la contingencia* (contraste de las propuestas teóricas elaboradas). De esta forma, la ingeniería didáctica pretende controlar *a priori* la puesta en escena de proyectos de enseñanza. En una segunda fase, llamada análisis *a posteriori*, el análisis a priori se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales está basado. Esta comparación se realiza distinguiendo tres dimensiones (cognitiva, epistémica e instruccional[5]) y, por supuesto, teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

La intención última de la investigación didáctica es encontrar dispositivos "óptimos" para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos, teniendo en cuenta las restricciones institucionales de las dimensiones cognitiva, epistémica e instruccional. La ingeniería didáctica articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en

[1] *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* (en prensa)
[2] Universidad de Granada. E-mail: jgodino@ugr.es
[3] Universidad Pública de Navarra. E-mail: miguelr.wilhelmi@unavarra.es
[4] Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela. E-mail: dbencomo@uneg.edu.ve
[5] La dimensión instruccional hace referencia a las interacciones docente - discente - recursos, lo que Artigue (1989) asocia a las "características del funcionamiento del sistema de enseñanza".

una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto. Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que en última instancia deben poner en marcha dichos recursos.

Por ello, es necesario poder valorar la práctica docente de los profesores y, a partir de esta valoración, determinar pautas para la mejora del diseño y de la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Estas implicaciones para la docencia no tienen carácter normativo o técnico (obtención de un listado de prescripciones "a ejecutar"), sino explicativo (determinación de criterios para la valoración de la viabilidad y de la adecuación a un proyecto de enseñanza).

El objetivo en este trabajo es, pues, en cierta forma, inverso al de la ingeniería didáctica: partiendo de realizaciones efectivas, evaluar la idoneidad y pertinencia de un proceso de instrucción matemática[6]. Apoyándonos en la propuesta elaborada por Godino (2003) proponemos evaluar la idoneidad de los procesos de instrucción matemática según tres criterios:

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).

2. *Idoneidad cognitiva*: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos humanos, materiales y temporales disponibles[7].

3. *Idoneidad instruccional*: las configuraciones y trayectorias didácticas posibilitan que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (*a priori*), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (*a posteriori*), para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos disponibles, que determinan restricciones institucionales de carácter matemático y didáctico).

Vamos a aplicar y desarrollar estas nociones al análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción sobre la noción de función, implementado por un profesor con un grupo de estudiantes universitarios de primer curso de ingeniería; en concreto, nos preguntamos ¿en qué medida es idóneo el proceso de instrucción observado? La pertinencia del análisis de

---

[6] Como metodología de la investigación, la ingeniería didáctica también contempla que el análisis de las realizaciones efectivas determine reformulaciones más o menos extensas de los planteamientos previos y que estos nuevos planteamientos sufran, de igual manera, la prueba de la contingencia. Sin embargo, en este proceso, el origen de cada "ciclo" es siempre las realizaciones potenciales (*análisis a priori*), mientras que nosotros proponemos iniciar el proceso de investigación a partir de las realizaciones efectivas.

[7] En el análisis de la dimensión cognitiva es preciso tener en cuenta los procesos sociales de construcción y comunicación de los objetos matemáticos. Las restricciones institucionales (de personal, materiales y de tiempo) determinan un marco para el análisis y la determinación de la dimensión cognitiva: "lo cognitivo" no es sinónimo de "proceso mental".

este caso se fundamenta en su representatividad de un tipo de comportamiento instruccional más general implementado según un enfoque "constructivista ingenuo".

Para cumplir los objetivos esbozados el artículo lo estructuramos de la siguiente forma: en la sección 2 describimos el proceso instruccional observado; en la sección 3, determinamos los tipos de significados institucionales y personales asociados a la noción de función; en la sección 4, discutimos la idoneidad del proceso instruccional; y, por último, en la sección 5, hacemos una breve síntesis del estudio realizado y resaltamos algunas implicaciones del mismo.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO INSTRUCCIONAL OBSERVADO

El objetivo de la enseñanza observada consiste en que los estudiantes recuerden, interpreten y formalicen las definiciones de correspondencia, función, rango, dominio y tipos de funciones, aplicándolas en una situación que pone en juego conocimientos de la física: el lanzamiento vertical hacia arriba de una pelota con una velocidad inicial. Se supone que los alumnos han estudiado previamente las definiciones de dichas nociones y se acepta que la tarea matemática es un "ejercicio de aplicación". Implícitamente, el profesor presupone que los estudiantes son capaces de interpretar estas definiciones, de realizar una *generalización disyuntiva*[8] y, de esta forma, identificar los componentes esenciales de la función parabólica propuesta y utilizar el significado aprendido como instrumento para la realización de la tarea propuesta[9]. Las consignas dadas a los alumnos se incluyen en la tabla 1.

Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad V_o por lo que su altura t segundos después, es $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ metros, donde g es la aceleración de la gravedad. Si se lanza la pelota con una velocidad de $32\, m/s$ y $g = 10 m/s^2$ (aprox.):
1. Determinen la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la grafica de $y(t)$.
2. ¿Es $y(t)$ una relación o una función? Si es una función, ¿cuál es su dominio, codominio y rango?
3. ¿Es $y(t)$ una función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva?
4. Si $w(t) = 10 - 2t$ es la velocidad de desintegración de la pelota, ¿a qué altura llegará, ahora, al cabo de tres (3) segundos? Calcule la función compuesta $(y \circ w)(3)$.
5. Al cabo de cuanto tiempo regresará la pelota al lanzarla con una velocidad de $32\, m/s$?
6. ¿Qué velocidad hay que dar a la pelota para que alcance una altura máxima de 100 m.
7. ¿Qué altura alcanzará la pelota y qué velocidad hay que imprimirle para que regrese a los seis segundos?

Tabla 1: Cuestiones propuestas a los estudiantes

El profesor organizó el proceso de estudio dividiendo la clase en equipos de cuatro alumnos, asignando a cada uno de ellos una parte de la tarea. Un alumno de cada grupo explicó al resto de la clase la solución encontrada en el seno del grupo. El profesor completaba o corregía la explicación del alumno. La *trayectoria didáctica implementada*,

[8] *Generalización disyuntiva*: Recuerdo de ideas aprendidas de memoria (y, por lo tanto, sin graves problemas de integración con las ideas preexistentes), que son utilizadas como una información adicional que capacita para resolver nuevos problemas (Tall, 1991).

[9] De otra forma, la dialéctica *instrumento-objeto* (Douady, 1986) no es problemática.

es decir, la secuencia de modos de gestión de los significados implementados a propósito de un objeto matemático específico, incluye, por tanto, configuraciones de tipo *cooperativo*, *dialógico* y *magistral* (Godino, 2003, pp.202–204).

Para trabajar las cuestiones propuestas se dedicaron cuatro clases de 45 minutos. En la tabla 2 se presenta de manera resumida la descripción de las actividades realizadas en cada una de ellas.

Clase	Descripción
1	El profesor dio las instrucciones de la tarea y sorteó las partes del problema que debían ser expuesta en clase por cada uno de los grupos. Se dedicó la mayor parte del tiempo a la resolución del primer apartado. La clase finaliza con la representación gráfica de la expresión $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$, $v_0 = 32\ m/s$, $g = 10\ m/s^2$.
2	Esta clase se inicia con la exposición por parte de los alumnos del segundo apartado del problema; el profesor presenta un contraejemplo de función utilizando para ello la representación gráfica de la expresión matemática de la forma $x = (y-a)^2 - b;\ a,b > 0$, y continúa trabajando el segundo apartado mediante una serie de preguntas y respuestas. Además, un grupo de alumnos presentó el cuarto apartado y el profesor expuso la composición de funciones utilizando diagramas de Venn. El profesor finalizó la clase con otra serie de preguntas y respuestas a fin de clarificar las nociones de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.
3	Para iniciar esta clase los alumnos exponen el tercer apartado. El profesor, no conforme con las explicaciones dadas por los alumnos, propuso una nueva tarea: determinar qué es una relación, qué es una función y qué tipos de funciones existen (en particular, determinar si la función $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ es suprayectiva o inyectiva).
4	En esta clase los alumnos de los grupos correspondientes expusieron con la ayuda del profesor los apartados 5, 6 y 7.

Tabla 2: Resumen de las actividades realizadas en clase.

El análisis del proceso instruccional descrito es consustancial a la teoría didáctica, como en general lo es todo hecho o fenómeno didáctico. Los criterios de idoneidad se apoyan en la noción de significado y en los tipos de significado identificados (institucionales y personales). De esta forma, es necesario determinar qué identificamos con la expresión “significado de un objeto matemático” y qué tipos de significados discriminamos. En la siguiente sección realizamos una descripción más “comprometida” del proceso instruccional, posicionándonos dentro de un enfoque ontológico y semiótico de la cognición y de la instrucción matemáticas (Godino, 2003).

3. TIPOS DE SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES

Godino (2002) identifica el “sistema de prácticas operativas y discursivas” con el significado que una institución asigna a un objeto matemático, estableciendo, por lo tanto, una correspondencia entre el sistema de prácticas y la expresión del objeto matemático[10]. Para analizar los significados institucionales de un objeto matemático, Godino (2003) propone distinguir cuatro tipos, que designa como significado institucional *de referencia*, *pretendido*, *implementado* y *evaluado*.

3.1 SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo de instrucción. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Con todo ello, construirá un sistema de prácticas que designa como *significado institucional de referencia* del objeto.

A partir del significado de referencia, el profesor selecciona, ordena, y delimita la parte específica que va proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Tendrá para ello en cuenta el tiempo asignado a dicho proceso, los conocimientos previos de los estudiantes y los recursos materiales disponibles. Al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instructivo se denomina *significado institucional pretendido*.

Como consecuencia de las intervenciones del profesor y de los alumnos el significado institucional pretendido cambia de hecho, por lo que finalmente se implementa un sistema de prácticas que puede diferir respecto de las planificadas. Con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales interesa hablar del *significado implementado*, como el sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes[11].

Un cuarto tipo de significado institucional se pone en juego en el proceso de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado. Se configura de esta manera el *significado institucional evaluado*.[12]

---

[10] De manera análoga define "significado personal"; así, si el principal gestor del significado es una institución se habla de "significado institucional" y, si es una persona, de "significado personal".

[11] Cada estudiante particular elabora a partir del proceso instruccional un significado *global* (sistema de prácticas operativas y discursivas que potencialmente puede asociar dicho estudiante a propósito de un objeto matemático); la parte del significado global que se adapta al significado institucional enseñado se identifica con el significado *aprendido*, que no tiene por qué coincidir con el significado *declarado*, que la institución puede observar, describir y evaluar.

[12] Los tipos de significados institucionales y las relaciones que entre ellos se establecen pueden ser interpretados en términos de la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985), es decir, como el conjunto de transformaciones adaptativas necesarias para que un objeto de saber se convierta en un objeto de enseñanza. En un trabajo futuro pretendemos confrontar estas dos perspectivas teóricas de análisis de procesos didácticos.

En la institución donde se inscribe el proceso instruccional observado, el significado de referencia de la noción de función se identifica con el sistema de prácticas en el contexto de la teoría de conjuntos, esto es, como las manipulaciones esencialmente discursivas de una terna $(A, B, y = f(x))$, donde A representa el conjunto inicial; B, el conjunto final; y, por último, $y = f(x)$ la regla de correspondencia. En este ámbito, la definición prototípica de función (emergente del sistema de prácticas y referente explícito del mismo) es enunciada en términos conjuntistas de la siguiente forma:

> Dados dos conjuntos A y B, no vacíos, una función de A en B es una correspondencia $f \subseteq A \times B$ que cumple:
>
> (i) $(a, b), (a, b') \in f \Rightarrow b = b'$
>
> (ii) $\forall a \in A, \exists\, b \in B\ ((a, b) \in f)$

La enseñanza tiene entonces por objetivo la formalización de la noción de función (significado pretendido). Para ello, el profesor propone una situación de modelización extramatemática (ver tabla 1), a partir de la cual construye el significado efectivamente enseñado. El análisis del proceso instruccional muestra en qué forma hay una distorsión fundamental entre los significados pretendido y enseñado y cómo esto condiciona el significado aprendido por los estudiantes y la clase de problemas que potencialmente podrían abordar éstos a propósito de la noción formal de función (significado personal global).

3.2. HOLO-SIGNIFICADO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Cuando nos interesamos por la enseñanza y aprendizaje de cualquier noción matemática no podemos limitarnos a explicar la definición más general posible; cualquier definición de un concepto matemático es como la punta del iceberg de un sistema de prácticas operativas y discursivas, relativas a diversos contextos de uso, que constituyen su origen y razón de ser. En el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática (Godino, 2002) se asume que tales sistemas de prácticas constituyen "el significado del objeto"; y dado que tales prácticas son relativas a cada marco institucional se deriva una relatividad y pluralidad de objetos y significados, allá donde la cultura matemática habitual identifica un único objeto y significado. La adopción de una ontología y epistemología plural y relativista para las matemáticas educativas es útil para describir y comprender los procesos de transposición didáctica y la construcción social e individual de los conocimientos matemáticos.

El concepto de función es un buen ejemplo para mostrar la diversidad de sistemas de prácticas y contextos de uso, progresivamente más amplios, en los cuales podemos mostrar la pluralidad de significados derivados de cada subsistema de prácticas (Biehler, 1997). La reconstrucción del "significado de la función" es un primer paso necesario para poder comprender los procesos de enseñanza efectivamente implementados y elaborar criterios para su mejora. Diversos autores se han interesado por dicha reconstrucción desde un punto de vista histórico y epistemológico (Youschkevitch, 1976; Sierpinska, 1992). En concreto, Ruiz (1998) hace un estudio sistemático y caracteriza siete "concepciones epistemológicas" del objeto función, las cuales describe usando la tripleta conceptual de Vergnaud (1990) (situaciones, invariantes y representaciones). Nosotros preferimos interpretar tales "concepciones" en términos de subsistemas de prácticas institucionales ligadas a contextos de uso particulares, y de objetos emergentes (tipos de problemas, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentos); cada una de estas *configuraciones epistémicas* modeliza aspectos parciales del *holo-significado* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004) del objeto función, el cual desempeñará el papel de significado "global" del objeto función y que determina el referente en una investigación específica.

En la figura 1 sintetizamos la reconstrucción que hemos realizado del holo-significado de la noción de función, que vamos a utilizar como significado institucional de referencia para analizar el proceso de estudio observado.

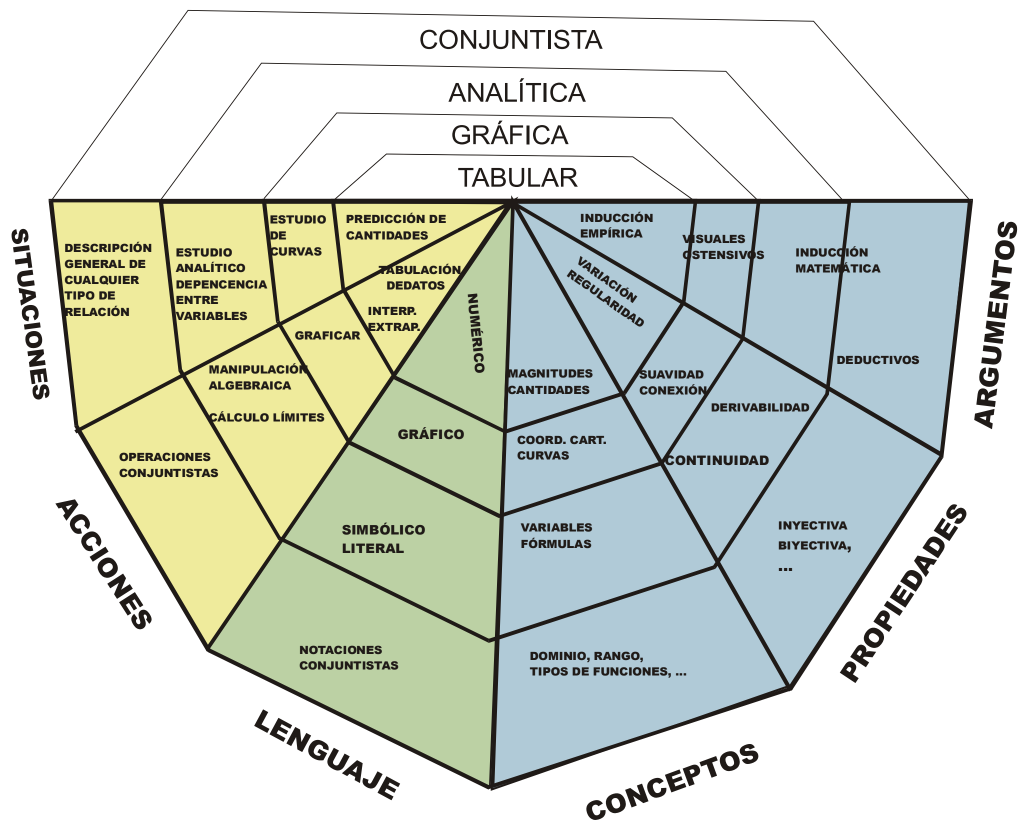


Figura 1: Configuraciones epistémicas asociadas al concepto de función.

Las definiciones determinan, mejor que cualquier otro objeto matemático, el proceso de *generalización* (extensión del campo de aplicabilidad de la noción de función), de *formalización* (limitación de usos no reglados de expresiones de lenguaje) y de *abstracción* (universo de objetos más general, menos empírico) de estas configuraciones epistémicas. Alson (1996) introduce la noción de función como una curva en el plano cartesiano tal que al trazar líneas verticales (paralelas al eje de las ordenadas) se corta a dicha curva en un solo punto (figura 2). Asimismo, introduce la noción de fórmula como representante simbólico de la curva y muestra cómo construir curvas a partir de la fórmula mediante manipulaciones gráficas (operaciones suma y producto de dos curvas y determinación de la curva cociente). En este contexto, las "curvas" representan una manera pertinente de introducir la idea central de "regla", como mecanismo de asignación de elementos de un conjunto en otro conjunto y la restricción sobre el modo de asignación (un solo corte vertical) determina que dichas reglas puedan ser identificadas con funciones.

CURVAS

Convención.
Las curvas que se van a estudiar en este libro serán sólo aquellas que tienen no más de un punto en cada vertical. Un ejemplo de curva que no sirve aparece en la figura: en punteado hay una vertical y esa vertical corta la curva en más de un punto (la corta en tres puntos).

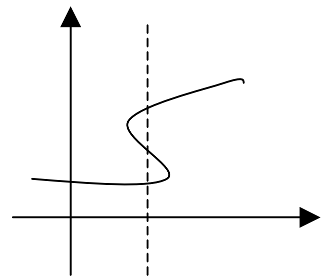


Figura 2: Introducción de la noción de función en el marco gráfico (Alson, 1996, p.**1**/1).

Bloch (1999) determina que el modo de proceder propuesto por Alson es adecuado para la introducción de las primeras nociones del cálculo (límite, continuidad, derivabilidad). De hecho, la propuesta de Alson representa una interpretación "gráfica" de una práctica habitual en una primera formalización de la noción de función; a saber, aquella que define la noción de función en términos del dominio (conjunto inicial) y la regla de correspondencia.

> "Recall that the salient features of a function f are:
>
> (a) the set on which f is defined, called the *domain* of f and written dom(f);
>
> (b) the assignment, rule or formula specifying the value $f(x)$ of f at each x in dom(f).
>
> We will be concerned with functions f such that $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbf{R}$ and such that f is a *real-value function*, i.e., $f(x) \in \mathbf{R}$ for all $x \in \mathrm{dom}(f)$. Properly speaking, the symbol f represents the function while $f(x)$ represents the value of the function at x. However, a function is often given by specifying its values and without mentioning its domain. In this case, the domain is understood to be the *natural domain*: the largest subset of **R** on which the function is a well defined real-value function. Thus 'the function $f(x) = 1/x$' is shorthand for 'the function f given by $f(x) = 1/x$ with natural domain $\{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$'." (Ross, 1980, p.115).

En un contexto conjuntista, la idea de "regla" se formaliza mediante la noción de "par ordenado", que a su vez es formalizada y no descansa sobre un descripción intuitiva de "orden". De esta forma, el significado conjuntista de la noción de función (y, por lo tanto, la configuración epistémica asociada) descansa sobre axiomas fundamentales de la Teoría de Conjuntos.

> "The reader will be familiar with the idea of a function as a 'rule' that takes an object x to another object $f(x)$. We wish to place the definition of a function on a firm foundation and to dispense with the undefined term 'rule'. The *graph* of a function f is the set of all ordered pairs $(x, f(x))$, so that *two functions are identical if and only if their graphs are identical*. This observation is the key to our formal definition, for it implies that a function and its graph are just two different representations of the same object. As we have defined what we mean by an ordered pair[13], we can now define a function by its graph without reference to the word 'rule'. Of course, not every set of ordered pairs is the graphs of a function, and the crucial requirement for such a set to be a function is that if (x, y) and

[13] Beardon (1997, pp.5–6) introduce la noción de par ordenado en términos totalmente conjuntistas, sin referencia a las palabras 'primero' y 'segundo' (que se presuponen la noción primitiva de *orden*). El par ordenado (a, b) queda definido por la relación $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

> (x, y') are in the set, then $y = y'$ (that is each y is uniquely determined by x). These comments motivate the following formal definition of a function.
>
> **Definition.** *A function f is a set of ordered pairs that has the property that if* (x, y) and (x, y') *are in f, then* $y = y'$." (Beardon, 1997, p.7).

Para terminar esta breve descripción del holo-significado, es necesario resaltar que la noción de "gráfica de una función" es polisémica. Por ejemplo, la función real de variable real que asocia a cada número racional 1 ($\forall x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = 1$) y a cada número irracional 0 ($\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $f(x) = 0$) no tiene "gráfica" desde punto de vista exclusivamente "visual"[14]; sin embargo, desde un punto de vista conjuntista, la "gráfica" de esta misma función está perfectamente definida, puesto que el conjunto de pares ordenados (x, $f(x)$) está unívocamente determinado. Esta diferencia en el uso del lenguaje es origen de diferentes conflictos epistémicos en las instituciones actuales a la hora de definir la noción de función; asimismo es representativo de un hecho más general: un objetivo fundamental para la enseñanza de una noción matemática (y de la noción de función en particular) es la integración de las diferentes configuraciones asociadas a la misma, de tal manera que los estudiantes sean capaces de realizar un *tránsito flexible* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004) entre ellas.

De esta forma, el holo-significado representa el marco objetivo de los significados institucionales, sobre los cuales debería elaborarse cualquier proyecto de enseñanza. Asimismo, toda institución, explícitamente o no, determina *a priori*, en paralelo a las nociones, procesos y significados pretendidos, una *configuración didáctica*, esto es, pautas específicas de gestión de los significados institucionales asociados a la noción que se desea introducir o desarrollar, por supuesto, teniendo en cuenta los recursos humanos, materiales y de tiempo disponibles. El equilibrio entre estas dimensiones (matemática y didáctica) es condición necesaria para que un proceso instruccional pueda ser idóneo. En la sección siguiente, mostraremos en qué sentido el proceso instruccional observado no es idóneo.

5. IDONEIDAD DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Para valorar la idoneidad y pertinencia de un proceso de estudio matemático tenemos en cuenta tres dimensiones: *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (relativa a los significados personales) e *instruccional* (relativa a las intervenciones del director de estudio y a la disponibilidad y utilización de recursos materiales y de tiempo).

Como hemos determinado, un proceso de instrucción es idóneo desde el punto de vista epistémico si el significado implementado es fiel al significado pretendido y éste, a su vez, lo es al de referencia. En muchas ocasiones, en un proceso de estudio matemático, es posible identificar algún desajuste fundamental entre los significados institucionales de referencia y pretendido con el implementado, que no han sido previstas *a priori* como constituyentes del proceso instruccional y que representan decisiones didácticas desafortunadas[15]. Llamamos *conflictos epistémicos* a todos estos desajustes, los cuales condicionan el proceso de estudio y los aprendizajes de los estudiantes.

---

[14] Con otra palabras, dicha función no pertenece al universo de objetos de la configuración epistémica gráfica.

[15] Estas decisiones son de tres tipos según el agente gestor del significado: el director de estudio (en la implementación del significado institucional), la institución (en la determinación del significado pretendido a

La idoneidad cognitiva se consigue cuando el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales es el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas y de recursos. En ocasiones, este desfase es excesivo y provoca inadaptaciones cognitivas de los estudiantes que no pueden ser abordadas sin modificaciones parciales o totales de los significados pretendidos o de los medios implementados para su desarrollo. Denominamos *conflictos cognitivos* a estos desfases.

Por último, un proceso de estudio es idóneo, desde el punto de vista instruccional, cuando tanto el profesor como los alumnos pueden, en primer lugar, identificar conflictos semióticos y, en segundo lugar, resolverlos mediante la negociación de significados. Se tiene un *conflicto instruccional* cuando ni el profesor ni los alumnos son capaces de identificar un conflicto semiótico o, en caso de identificarlo, no disponen de los recursos matemático-didácticos necesarios para resolverlos y establecer, por lo tanto, un estado de equilibrio en el proceso de estudio.

La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión evaluada. Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados que propone Godino (2003) es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su puesta en escena. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática.

Somos conscientes de que la valoración de la idoneidad de un proceso instruccional requiere registrar un complejo de informaciones sobre el estado y evolución de los distintos componentes y dimensiones que lo definen. Es necesario, por tanto, usar diversos métodos y técnicas de observación, registro y medida de datos (cuestionarios, entrevistas, grabaciones audio-visuales, etc.) y determinar los estados cognitivos de los estudiantes en diferentes momentos del proceso instruccional. En el caso que usamos como ejemplo ilustrativo disponemos del programa general de la asignatura y libros de texto recomendados (*significado institucional de referencia local*) y de la guía de tareas a realizar (*significado institucional pretendido*); asimismo, de la grabación audio-visual del desarrollo de las cuatro clases (*significado institucional implementado*). Basándonos en este material, mostraremos algunos aspectos de la trayectoria didáctica implementada y una valoración parcial de las idoneidades respectivas.

5.1. IDONEIDAD EPISTÉMICA

La observación del proceso de estudio descrito en la Sección 2 nos permite caracterizar el sistema de prácticas operativas y discursivas efectivamente implementadas relativas al objeto matemático "función". La comparación de estas prácticas con el significado de referencia de dicho objeto nos permite identificar diversos desajustes y formular hipótesis sobre la idoneidad del proceso de estudio, en cuanto a su faceta epistémica. En la

partir del de referencia), la noosfera (en la identificación del significado de referencia a partir del significado cultural asociado al objeto matemático —noción, propiedad, argumento, etc.).

trayectoria epistémica se distinguen secuencias en las cuales existen conflictos epistémicos, que no obedecen a intervenciones establecidas a priori por el profesor y cuyo objetivo podría ser que los estudiantes superaran un *obstáculo cognitivo* o *epistemológico*.

Según la especificidad del conflicto epistémico con relación al sistema de prácticas operativas y discursivas relativas al objeto matemático que se desea introducir o desarrollar, los conflictos los clasificamos en generales y específicos. Se tiene un *conflicto epistémico general* cuando se refiere a un proceso matemático (definición, demostración, interpretación, etc.) no específico de la clase de problemas del que emergen el objeto. En caso contrario, llamamos *específico* al conflicto epistémico.

La identificación de un conflicto, general o específico, supone la observación de un desajuste fundamental entre dos *entidades praxémicas* (problemas o acciones), entre dos *entidades discursivas* (conceptos, propiedades o argumentos) o entre dos *juegos de lenguaje* que se introducen o desarrollan en dos marcos institucionales relacionados. Estos desajustes se identifican en la utilización (*acción*), la construcción (*acciones-argumentaciones*) y la comunicación (*lenguaje-argumentación*) de nociones, proposiciones y problemas. De hecho, los problemas, acciones, lenguaje, nociones, proposiciones y argumentos (como entidades constituyentes de los significados institucionales y personales) son los *observables* que permiten hacer operativos los criterios de idoneidad y, por lo tanto, valorar un proceso instruccional. Además, estos desajustes se pueden describir en términos de las cinco *facetas cognitivas duales* (figura 2). De esta forma, los conflictos se pueden clasificar, al menos de forma teórica, en 120 tipos diferentes (no disjuntos): atendiendo a los niveles del proceso adaptativo del significado institucional (referencial-pretendido; pretendido-implementado) (2 tipos), a la especificidad de los conflictos con relación al objeto matemático de estudio (2), a la entidad involucrada (6) y a la faceta dual donde se focaliza el conflicto (5).). Por lo tanto, para identificar un conflicto es necesario dar cuatro descriptores: nivel de proceso, especificidad, entidad y faceta.

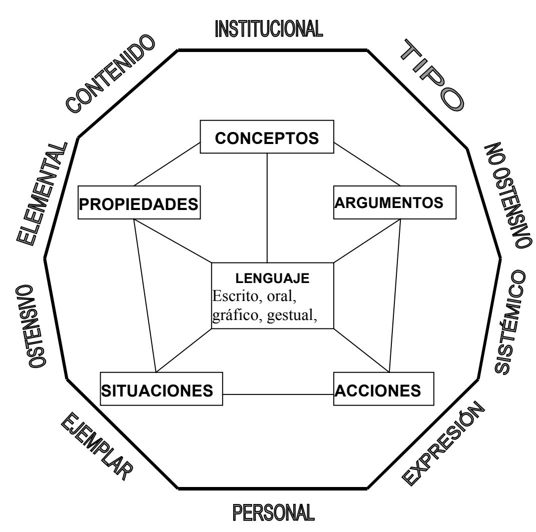


Figura 3: Componentes y facetas de la cognición matemática (Godino, 2003, p.146).

A continuación, a modo de ejemplo, identificaremos algunos conflictos en varios segmentos de la experiencia observada.

Conflicto 1: pretendido-implementado, específico, problema y ejemplar-tipo

El principal conflicto epistémico que encontramos es el relativo a la elección y formulación de la tarea matemática propuesta a los alumnos para el estudio de la noción de función. La cuestión 1 plantea un problema de modelización de un problema físico (previsión del espacio conocido el tiempo) mediante una función dada mediante una fórmula algebraica. Las cuestiones que siguen piden determinar si la correspondencia definida por la fórmula es o no una función, su dominio, codominio, rango y tipo de función (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva).

> *¿Es $y(t)$ una correspondencia o una función? Si es una función, ¿cuál son su dominio y rango?*
> *¿Es $y(t)$ una función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva?*

Estas cuestiones se refieren a una problemática de naturaleza formal/ discursiva que es ajena al problema de modelización. La "razón de ser" del sistema de objetos puestos en juego por el modelo "conjuntista" es la descripción, generalización y estructuración de conocimientos matemáticos, ajenos a la práctica de modelización funcional. Existe una ruptura brusca entre las distintas configuraciones epistémicas asociadas al objeto función.

Teniendo en cuenta la clasificación de los conflictos introducida, este conflicto queda identificado por los cuatro descriptores siguientes: *pretendido-implementado* (puesto que se produce en este momento del proceso adapatativo de los significados institucionales), *específico* (porque es consustancial a la tarea solicitada), *problema* (la principal entidad primaria involucrada es la situación propuesta) y *ejemplar-tipo* (la función cuadrática es representativa de la noción genérica de función; el profesor acepta, implícitamente, que la transferencia del caso particular a la noción formal de función es transparente).

Conflicto 2: de referencia-pretendido, general, noción y elemental-sistémico

La configuración conjuntista requiere explicitar cuáles son los conjuntos inicial y final cuyos elementos se corresponden, de modo que si se cambia alguno de estos conjuntos, o el criterio de correspondencia, se tiene una función diferente. El problema físico que se modeliza con la fórmula algebraica pone en juego dos intervalos de números reales que pueden tomarse como "conjuntos iniciales, o dominios de definición de la función", [0; 3,2] (tiempo hasta que la pelota alcanza la altura máxima), o [0; 6,4] (tiempo hasta que vuelve al suelo; el conjunto imagen es el intervalo [0; 51,2] en ambos casos. La naturaleza de la variable independiente, tiempo, hace que los valores que puede tomar sean números reales positivos, pero la fórmula algebraica que establece el criterio de correspondencia es válida para todo número real. El conjunto final (codominio) de la función $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ queda completamente indefinido, y por tanto, carece de sentido preguntar si "la" función (¿cuál?) es o no sobreyectiva.

> *P: Entonces, fíjense esta función d, me relaciona un conjunto de números reales positivo; se tiene que usar incluyendo el cero, y dónde va a parar ese conjunto; ¿en qué conjunto numérico va a parar? Enteros otra vez, los enteros y el veintisiete y medio ¿positivos o negativos? ¿Y el cero, lo van a dejar afuera? Ahí tienen entonces esta función, la función altura relaciona al conjunto de los números reales más el cero con el conjunto de los números reales con el cero.*

Matemáticamente, la fórmula $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$, con $v_0 = 32\ m / s$ y $g = 10\ m / s^2$ es válida para todo *t* real. Desde el punto de vista de la modelización física, la variable *t* varía entre 0 y 3,2 segundos (intervalo en que se alcanza la altura máxima pedida), ambos extremos incluidos y no de los positivos a los positivos como se estableció en la clase. Este hecho podía haberse utilizado para matizar la diferencia entre rango y conjunto final y para introducir o desarrollar la noción de función sobreyectiva. De manera general, el modelo físico actúa de "distractor dentro del proyecto instruccional", esto es, aleja los significados pretendidos de los implementados.

El conflicto queda identificado con los descriptores siguientes: *de referencia-pretendido* (el profesor no establece una distinción clara entre la función como "modelo-instrumento" y como "objeto intramatemático" que condiciona todo el discurso), *general* (todo modelo debe ser interpretado en términos del sistema al que hace referencia; siempre es necesario valorar la pertinencia de una solución de un problema[16]), *noción* (dominio, rango, función como terna) y *elemental-sistémico* (la fórmula cuadrática que modeliza la situación como objeto matemático aislado o como elemento constituyente de la función y como objeto descriptor del sistema físico modelizado).

Conflicto 3: de referencia-pretendido, general, propiedades y ejemplar-tipo

> *P: Una correspondencia. No puede ser función. Esto es una correspondencia.*

Toda función es una correspondencia; de la misma forma que todo cuadrado es un rectángulo o que toda sucesión es una función. La práctica matemática tiende a identificar con el nombre la característica que discrimina al objeto dentro de una clase más amplia. De esta forma, se fuerza en el lenguaje la exclusión de familias de objetos contenidos en clases más extensas: "es una función, no una correspondencia", "es un cuadrado, no un rectángulo", "es una sucesión, no una función", etc. De manera más propia debiera decirse: "es una función, un tipo particular de correspondencia", "es un cuadrado, un tipo particular de rectángulo", "es una sucesión, un tipo particular de función", etc.

El conflicto queda identificado con los descriptores siguientes: *de referencia-pretendido* (el significado pretendido establece la siguiente afirmación categórica: el conjunto de las funciones y el de las correspondencias son disjuntos), *general* (se excluye a una clase de objetos identificada —funciones— del resto de objetos del universo de referencia —correspondencias), *propiedad* (para identificar un clase de objetos —funciones— dentro de una clase más amplia —correspondencias— se utiliza una única característica necesaria —si $f(a) = b$ y $f(a) = b'$, entonces $b = b'$— que no es suficiente) y *ejemplar-tipo* (la función es un ejemplar de una clase más amplia denominada correspondencia).

Conflicto 4: pretendido-implementado, general, lenguaje y expresión-contenido

> *P: ...Ahora la pregunta clave es, ¿además de una correspondencia, qué se necesita para que sea una función? ¿Qué hace falta añadirle para que se convierta o se constituya en una función?*

La pregunta que hace el profesor sugiere que la definición de función es la unión de condiciones y no, como en efecto lo es, una intersección (Winicki-Landman & Leikin, 2000).

[16] Por ejemplo, en un "problema de edades" en el que el procedimiento conduce a una resolución de una ecuación de segundo grado con una solución entera positiva y otra negativa es preciso señalar que la segunda no es válida.

El conflicto queda identificado con los descriptores siguientes: *pretendido-implementado*, *general* (dados dos conjuntos A y B, si el conjunto de los objetos de A queda definido por todas las propiedades que definen a los elementos de B y una adicional, entonces $A \subseteq B$), *lenguaje* (el profesor intenta que los alumnos tengan a su cargo el proceso de formalización de la noción de función; por ello, evita utilizar un lenguaje formalizado que "de pistas" y, en su lugar, utiliza expresiones coloquiales que llevan a confusión) y *expresión-contenido* (el registro utilizado por el profesor no se adapta al desarrollo de la noción de función).

El último conflicto que mostraremos queda identificado de manera similar al anterior, puesto que refiere de igual manera un uso abusivo del lenguaje; sin embargo, en esta ocasión, es específico de la noción de función.

Conflicto 5: pretendido-implementado, específico, lenguaje y expresión-contenido

> *P:¿Y eso rompe la continuidad de una función?*

El profesor utiliza la expresión "continuidad de la función" como sinónimo del "condición básica que discrimina al tipo particular de correspondencia llamado función (para cada x existe un único y)"; esto supone una ruptura en el uso del lenguaje que condiciona la formalización de la noción de función: ¿todas las funciones son continuas?, ¿una función "discontinua" es la "conexión de dos funciones"?

Los conflictos epistémicos descritos, que tienen su origen en un conflicto cognitivo del profesor sobre el "significado de la noción de función", ha tenido graves consecuencias en el desarrollo del proceso de estudio, provocando conflictos cognitivos en los estudiantes que quedan sin resolver.

5.2. IDONEIDAD COGNITIVA

En la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2002; 2003) se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Con la información registrada en la experiencia de enseñanza, la idoneidad cognitiva, esto es, la proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, puede ser analizada únicamente por medio de las intervenciones de los estudiantes.

En el siguiente diálogo podemos observar que los alumnos recuerdan la definición general de función, pero tienen grandes dificultades para su interpretación y aplicación al caso particular de las diversas funciones puestas en juego en la situación de modelización del problema de física.

> P: ... Ahora la pregunta clave es: ¿además de una correspondencia, qué se necesita para que sea una función? ¿Qué hace falta añadirle para que se convierta o se constituya en una función?
> A_2: Que cada elemento del conjunto de partida tenga un elemento del conjunto de llegada. Que cada elemento del conjunto de partida no tenga dos elementos en el conjunto de llegada.
> [...]

P: ... ¿Entendieron el concepto de ella? Ahora preguntamos: Entonces, eso, [señalando a la gráfica de la pizarra] ¿Eso es una función? ¿No? Allá dijeron que no. ¿Hay algún elemento del conjunto de partida que tenga dos imágenes, o tres o cuatro?
A_3: Sí. Por ejemplo, en *y*, yo coloqué el valor en *x* igual cero y me da cero; en *x* igual seis coma cuatro, también.
P: ¿Y eso significa que eso no es función? ¿Por qué no es función?
A_2: Bueno… Sí es función, pero aparte de eso tiene otra función.
P: ¿Otra función?
A_2: Sí.
P: ¿Por qué dices tú que no es función?
A_2: Yo no he dicho que no es función, yo no puedo explicarlo, pero cumple dos tipos de funciones.
P: ¿Dos tipos de funciones o dos tipos de aplicaciones?
A_2: A través de esa gráfica uno puede saber si es sobreyectiva, porque, aparte de que se cumple la definición de que cada elemento tiene una y sólo una imagen en el rango, también se cumple que un elemento tiene dos imágenes.
P: ¿Ahí tiene un elemento dos imágenes?
A_2: Sí.
P: ¿Cuál elemento tiene dos imágenes?
A_2: No, ninguno.
A_4: Profesor, un elemento del conjunto de partida tiene dos elementos del conjunto de llegada; por ejemplo, el cero y el seis coma cuatro… Ahí se ve que dos elementos del conjunto de partida caen en un mismo elemento del conjunto de llegada.
P: ¿Y eso rompe la continuidad de una función?
A_2: No.
P: […] ¿Cómo es la definición de función?… A cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto de llegada. Eso no significa que tres elementos del conjunto de partida puedan tener la misma imagen.

Observamos que el profesor se refiere al dibujo trazado en la pizarra (objeto ostensivo) como si fuera el propio objeto función (no ostensivo); esta identificación incorrecta nos parece una explicación plausible de los conflictos cognitivos que manifiestan los alumnos. El gráfico es visto por el profesor como una entidad transparente, elemental, cuando en realidad constituye un sistema de convenios que es necesario explicitar y compartir para que adquiera sentido la pregunta: *¿Eso es una función?* El profesor tampoco es consciente de las dificultades que presenta el seguimiento de una regla general (la definición de función), una entidad intensiva, de la variedad potencialmente ilimitada de situaciones particulares en las que se puede aplicar (entidades extensivas).

Otro segmento instruccional en el que encontramos conflictos cognitivos que no logran resolverse en el transcurso de las clases observadas se refiere a las nociones de codominio, rango y función sobreyectiva. El significado institucional implementado para dichas nociones no es conforme con el de referencia. En la clase no se ha fijado un conjunto final que permita hablar de codominio y de su coincidencia o no con el conjunto imagen.

P: .. ¿Cuál es el codominio?
[A_2 señaló el eje equis de la gráfica]
P: ¡Co-co-codomio!
A_2: Si el rango vendría siendo el conjunto "y" , de llegada, el co-dominio tendría que ser el reflejo de ambos conjuntos, o sea, ...
P: ¿Qué el codominio y rango son los mismos?
A_2: No, no, tendría que ser el recorrido que hace la pelota, desde que parte hasta que llega.

Estos incidentes aislados no permiten conjeturar que el proceso instruccional no es idóneo desde el punto de vista cognitivo. Sin embargo, para evaluar la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción en términos de proximidad de la zona de desarrollo potencial del alumno sería necesario hacer un seguimiento más detallado de los alumnos para determinar si las explicaciones dadas por el profesor fueron efectivas. Este seguimiento podría haberse realizado mediante test, entrevistas, etc.

5.3. IDONEIDAD INSTRUCCIONAL

El grado de idoneidad instruccional tiene en cuenta las posibilidades que ofrecen las configuraciones didácticas, y su secuenciación a lo largo de la trayectoria didáctica, para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados (utilizando los recursos materiales y de tiempo disponibles). En nuestro caso hemos observado algunos hechos importantes que nos permiten valorar esta dimensión del proceso de estudio implementado. Describimos, a continuación, algunos "conflictos instruccionales" observados.

Un problema pedagógico general

El profesor asigna cada uno de los siete apartados de la tarea a un grupo de alumnos diferente, de modo que cada grupo, formado por 5 estudiantes, se responsabiliza de resolver una de tales cuestiones y de presentarla al resto de la clase. Esta manera de organizar el trabajo en el aula implica que los estudiantes que no han trabajado alguna de las cuestiones tendrán dificultades para seguir las explicaciones del resto de los compañeros. El resultado es que las presentaciones de los estudiantes se convierten en explicaciones magistrales para la mayor parte de los estudiantes. Una trayectoria didáctica pretendida inicialmente por el profesor con un cierto grado dialógico y adidáctico resulta finalmente en varias configuraciones magistrales, pero en este caso, conducidas por "profesores inexpertos" (los representantes de los distintos equipos).

Configuración didáctica pretendida e implementada

A partir de un *estudio personal* previo el profesor plantea un diálogo contextualizado cuyo fin es el desarrollo de la noción de función (*configuración didáctica dialógica*.). El papel que el profesor atribuye a los alumnos en la construcción y comunicación del conocimiento es central: supone que los estudiantes serán capaces de identificar los objetos pretendidos en la situación modelizada y descontextualizarlos para la construcción del significado de función pretendido. Con otras palabras, el profesor intenta gestionar un aprendizaje de tipo constructivista: los estudiantes, por intermedio de la situación y en interacción con el profesor, deberán ser capaces de hacer evolucionar el significado personal atribuido a la noción de función (producto del proceso de estudio personal) y obtener una adaptación fiel al significado institucional pretendido.

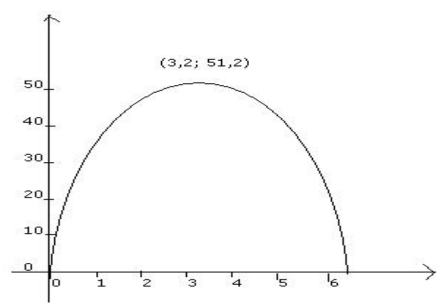
Sin embargo, la *configuración didáctica efectiva* no puede considerarse como dialógica. La mayor parte de los estudiantes no ha realizado el estudio personal anterior a la sesión de aprendizaje. El profesor es consciente de ello, empero no modifica el diseño del proceso instruccional pretendido. Poco a poco, el carácter dialógico de la configuración didáctica implementada se diluye en una "mayéutica ficticia" en la que el profesor toma a su cargo la formulación y la validación. De esta forma, detrás del diálogo efectivo, la sesión de aprendizaje esconde una configuración didáctica magistral, irreflexivamente asumida por el profesor.

Evidentemente, esta distorsión entre las configuraciones didácticas pretendida y efectiva es origen de conflictos. En concreto, un problema didáctico prototípico se da cuando el profesor no es consciente, en el curso del proceso efectivo de enseñanza, de dichas discrepancias y tiene la ilusión de que el proceso se desarrolla en los términos que él había establecido *a priori*.

El papel de la regulación (institucionalización)

Al finalizar la primera clase el primer equipo ha escrito en la pizarra una tabla de valores para representar la gráfica de la función, en la que incluye valores negativos para el tiempo.

T	***y*(*t*)**
–2	–84
–1	–37
0	0
1	12
2	48



En la gráfica aparecen marcados el valor de *t* en que se alcanza la altura máxima, y el valor de dicha altura, (3.2, 51.2).

Pero en cuanto el alumno comienza a explicar la solución el profesor le interrumpe y plantea cuestiones ajenas al trabajo realizado y cuyo interés es meramente formal:

> *P: ¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente?*

El momento de institucionalización (regulación) de la solución de la tarea de modelización se aborta y en su lugar se institucionalizan nociones imprevistas (variable dependiente, variable independiente). No se aprovecha la ocasión para discutir el conflicto cognitivo del alumno con los valores negativos del tiempo, ni para identificar los intervalos de números reales que constituyen el dominio y rango de la función que modeliza el problema de física planteado.

Ilusión de la transparencia y *efecto Topaze* (Brousseau, 1998, pp.52-53)

Como hemos comentado, el diálogo contextualizado que plantea el profesor, poco a poco, se va diluyendo en una "mayéutica ficticia" en la que el profesor toma a su cargo la formulación y la validación.

> *P: "¿Eso es una función?... ¿Seguro, no? Allá dijeron que no. ¿Hay algún elemento del conjunto de partida que tenga dos imágenes... o tres o cuatro?".*

Esto es, el profesor utiliza explícitamente en una pregunta retórica la característica principal que discrimina a las funciones de las correspondencias, para interpretar después las respuestas de los estudiantes como constituyentes del significado pretendido (*efecto Topaze*). Más aún, el profesor da explícitamente una correspondencia que no es función:

> P: *"Lo que sí no es correcto… Aquí tienen una contraejemplo de función. ¡Miren esto! Esto es un contraejemplo de función… es la misma gráfica pero volteada"*.

La institucionalización queda entonces en un terreno "de nadie", donde se acoplan los significados personales de los estudiantes previamente adquiridos, los significados contextualizados (con relación a la situación modelizada) que el profesor introduce y el significado institucional pretendido, que el profesor explicita en algunos pasajes (y que considera transparente en términos de la situación modelizada).

El profesor continuó con una serie de preguntas y respuestas; con esta actividad intenta, sin éxito, institucionalizar las nociones de función, dominio, rango, etc. El profesor abandona su objetivo y atribuye el fracaso del proceso de estudio a que los alumnos no cumplieron con el contrato pedagógico de realizar el estudio personal solicitado:

> P: *"Pero si ustedes no averiguan…"*

En conclusión, podemos valorar la configuración didáctica de "diálogo contextualizado" como idónea en sí misma. Esta configuración permite que el profesor identifique ciertos conflictos semióticos. Pero es el profesor con sus intervenciones quien no consigue negociar el significado de los objetos involucrados en la situación propuesta, de tal forma que el proceso instruccional permita adaptar los significados personal aprendido e institucional pretendido. Para ello, el profesor podría haber utilizado diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio: por ejemplo, medios de presentación de la información (pizarra, retroproyector, etc.) o dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadores). Además, debiera haber modificado "al paso" la configuración didáctica pretendida y no "culpar" a los estudiantes por no haber cumplido el contrato pedagógico que establecía que debían realizar un estudio personal previo a las sesiones presenciales ("*Pero si ustedes no averiguan…*").

6. REFLEXIONES FINALES E IMPLICACIONES

Desde el punto de vista educativo, no es suficiente un conocimiento formal del objeto función, centrado en el componente discursivo; el diseño de las tareas instruccionales y la implementación de una *trayectoria didáctica* idónea requiere del profesor un conocimiento profundo de los diversos significados de los objetos matemáticos.

El análisis que hemos realizado del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función ha mostrado la utilidad y pertinencia de las herramientas teóricas aplicadas. La noción de idoneidad didáctica, y sus tres dimensiones principales —epistémica, cognitiva e instruccional (Godino, 2003; Wilhelmi, Bencomo y Godino, 2004)— permite centrar la atención del análisis didáctico en las interacciones entre los significados institucionales y personales, en el contexto de un proyecto educativo. En este trabajo hemos desarrollado principalmente la noción de idoneidad epistémica, para lo cual hemos explicitado el significado de referencia de la noción de función y algunos elementos del significado implementado en el proceso instruccional. La comparación entre ambos nos ha permitido identificar las concordancias y desajustes (conflictos epistémicos) entre ambos significados, y por tanto, valorar el grado de idoneidad epistémica. También podemos identificar algunos criterios para la mejora de los procesos de estudio del objeto función, aportando información a los profesores de matemáticas sobre los elementos a tener en cuenta en los distintos modelos que articulan el significado de referencia global (holo-significado) de la función y el tránsito flexible entre los mismos.

Teniendo en cuenta los conflictos epistémicos identificados podemos valorar la idoneidad epistémica del proceso de estudio observado como deficiente. La tarea matemática elegida es claramente mejorable (hubiera sido preferible no introducir la complicación del parámetro V_0, ni la composición de funciones). No obstante, nos parece adecuado comenzar con cuestiones de predicción, como motivación primaria de la función, usando el lenguaje gráfico ("*Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de y*(*t*)"). Pero el desarrollo del proceso de estudio ha tenido numerosos puntos críticos cuando se ha abordado la discriminación del modelo formal de función (correspondencia entre conjuntos), que hemos descrito en el significado de referencia como *aplicación* y *correspondencia* (terna, relación), y las relaciones entre estos modelos formales con los modelos tabular, gráfico y expresión analítica.

Por otra parte, la configuración didáctica implementada, de corte constructivista-mayéutico, no ha permitido resolver con claridad los conflictos semióticos que han ido apareciendo a lo largo del proceso de instrucción. El profesor ha dejado inicialmente a los alumnos la responsabilidad de leer las definiciones, interpretarlas y aplicarlas a un ejemplo que ha resultado complejo (incluso el profesor no interpreta adecuadamente el papel del criterio algebraico de una correspondencia). Los alumnos han recordado de memoria las definiciones, pero lo hacen confundiendo los términos; el profesor tiene que invertir bastante tiempo en corregir los errores, formulando él mismo definiciones inadecuadas que provocan confusión y segmentos instruccionales innecesarios, que se hubieran podido evitar mediante intervenciones regulativas explícitas por parte del profesor (intervenciones magistrales).

El análisis epistemológico de los objetos matemáticos, realizado con un enfoque y herramientas conceptuales apropiadas, debe ser un objetivo esencial en la formación del profesor de matemática. Hemos visto cómo un objeto matemático tan elemental y "aparentemente conocido", como la función, ha planteado grandes complicaciones tanto al profesor como a los estudiantes. La mayor parte de estas complicaciones se derivan de un conocimiento insuficiente, por parte del profesor, de lo que podemos denominar "la arqueología del objeto función", lo que se traduce en la superposición caótica de los distintos modelos, la pérdida de control del proceso instruccional y la toma de decisiones didácticas desafortunadas.

Los hechos observados los podemos considerar como manifestaciones de un fenómeno de un cierto alcance o generalidad sobre la gestión del tiempo didáctico y la topogénesis (el reparto de la responsabilidad de la gestión del conocimiento entre el profesor y los alumnos). Las descripciones y las interpretaciones que hemos realizado de los mismos, usando algunas nociones de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003), tienen consecuencias para la formación de profesores. Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión amplia, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica). Asimismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes (idoneidad cognitiva), identificar y resolver los conflictos semióticos que aparecen en todo proceso de estudio, empleando los recursos materiales y temporales necesarios (idoneidad instruccional). Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción*,* cuyo indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos.

Reconocimiento

Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos: MCYT-BSO2002-02452, Resolución nº1.109/2003 de 13-octubre de la UPNA y MCYT-HA2002-0069.

REFERENCIAS

Aliprantis, C. D. & Burkinshaw, O. (1999). *Problems in real analysis. A Workbook with solutions*, 2nd Edition. San Diego, CA: Academic Press.

Alson, P. (1996). *Métodos de graficación*. Caracas: Erro.

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3): 281–308.

Beardon, A. F. (1997). *Limits. A new approach to Real Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Bencomo, D., Godino, J. D. y Wilhelmi, M. R. (2004 julio). Conflictos epistémicos en un proceso de estudio de la noción de función. Implicaciones para la formación de profesores. *Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 18)*. Tuxtla Gutiérrez (Chiapas, México): Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Biehler, R. (1997). Reconstruction of meaning as a didactical task –the concept of function as an example. BACOMET IV, May 1997.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu. Connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2). Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage. pp.135–194.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situation in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3): 237–284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (URL: http://www.ugr.es/local/jgodino).

Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking.

Ross, K. A. (1980). *Elementary analysis: the theory of calculus*. New York: Springer-Verlag, 2000.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, ESP: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* MAA Notes # 25 (pp. 3–58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2/3): 133–170.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16: 39–85.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2004). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (URL: http://www.ugr.es/local/jgodino).

Wilhelmi, M. R., Bencomo, D. y Godino, J. D. (2004 septiembre). Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática*. Castellón: Universitat Jaume I y Real Sociedad Matemática Española.

Winicki-Landman, G. & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17–21.