

EL ANÁLISIS SEMIÓTICO COMO TÉCNICA PARA DETERMINAR SIGNIFICADOS

Juan D. Godino, *Universidad de Granada (España)*

Mario Arrieche, *Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)*

En Godino (2001) hemos presentado una versión revisada del modelo teórico que designamos como "semiótico-antropológico" para la Didáctica de la Matemática. Los tipos de entidades emergentes de la actividad matemática y las diversas facetas o dimensiones desde las que se pueden considerar dichas entidades se fijan en las siguientes:

- Lenguaje (escrito, oral, gráfico, ...)
- Situaciones-problemas¹ (tareas, ejemplos de aplicación, ...)
- Acciones (operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas)
- Conceptos² (definiciones)
- Propiedades (proposiciones)
- Argumentos (justificaciones, validaciones).

Estas entidades primarias, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones:

- personal - institucional [individual- social]
- ostensiva - no ostensiva [perceptible- mental/gramatical]
- extensiva - intensiva [ejemplar-tipo; concreta- abstracta]
- elemental - sistémica [unitaria-compuesta]
- expresión - contenido [significante-significado]

En dicho trabajo hemos comenzado a desarrollar una técnica, que designamos como "análisis semiótico", que permite caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática. Así mismo, dicho análisis proporciona una herramienta para identificar conflictos semióticos potenciales en la interpretación de un texto usado en un proceso de estudio, o conflictos que tienen lugar en la realización efectiva de una interacción didáctica. Esta técnica y su aplicación a la caracterización de

¹ Elementos promotores o contextualizadores de la actividad matemática.

² El término 'concepto' lo usamos con dos sentidos diferentes que designaremos como concepto-sistema y concepto-definición (o concepto-regla). En el primer uso designa a un sistema praxeológico complejo, como cuando aparece para referir una determinada organización matemática (número real, función exponencial, etc.) e incluye un sistema de situaciones-problemas, técnicas y el discurso teórico que las describe y organiza. En el segundo caso el concepto se refiere a una de las posibles definiciones particulares de un objeto matemático, por ejemplo, la función como "correspondencia entre conjuntos que cumplen ciertas condiciones". En el lenguaje ordinario 'concepto' designa habitualmente una idea, lo que alguien tiene sobre una cosa en su cabeza cuando piensa sobre ella (concepto-idea).

significados se ha ejemplificado en el trabajo citado mediante el análisis de un proceso de estudio de la mediana propuesto en un libro de texto de secundaria.

En este trabajo vamos a aplicar, y en cierta medida desarrollar, la técnica del análisis semiótico en una investigación sobre el estudio de nociones conjuntistas en un programa de formación de maestros. En Arrieche y Godino (2000) describimos la problemática general de un proyecto de investigación centrado en identificar aspectos y factores condicionantes del grado y modo de estudio de una teoría matemática, concretada en la indagación del papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros. Remitimos al lector a dicho trabajo como marco referencial de este informe de investigación.

UNIDADES DE ANÁLISIS, COMPONENTES PRAXEOLÓGICOS Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES

En esta sección caracterizamos los significados elementales puestos en juego en uno de los bloques de contenido sobre "conjuntos y operaciones", desarrollado en el texto que sirve de base al proceso de estudio (Krause, 1991). Cada bloque de contenido es dividido en unidades de análisis basadas en los apartados en los que el autor estructura el texto. Para facilitar la lectura reproducimos el texto de cada unidad. Cada bloque de contenido se finaliza con la descripción de los conocimientos puestos en juego, entendidos como funciones semióticas elementales establecidas entre los distintos objetos identificados.

El bloque sobre “conjuntos y operaciones” está dividido en 9 subsecciones que consideramos como unidades iniciales de análisis³. Son las siguientes:

1. Definición conjunto
2. Notaciones
3. Subconjuntos
4. Ejercicios (2.1)
5. Operaciones con conjuntos; intersección, unión, complementario
6. Producto cartesiano
7. Diagrams de Venn para la resolución de problemas
8. Ejercicios (2.2)
9. Propiedades de las operaciones conjuntistas

Para cada uno de estos contenidos incluimos: el texto y las unidades de análisis, los componentes praxeológicos (lenguaje, praxis y elementos discursivos o teóricos), identificación de conocimientos puestos en juego (interpretados como funciones semióticas) y conflictos semióticos entre los significados puestos en juego en el texto y los atribuidos a las expresiones por una institución de referencia, que en este caso viene dada por los textos sobre “teoría de conjuntos” del nivel profesional matemático interpretados por los investigadores. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa; los conflictos semióticos se

³ Una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático que proponemos es la siguiente: unidades iniciales (apartados o secciones del texto), unidades primarias (oraciones o sentencias), unidades elementales (términos y expresiones que designan una de las seis entidades elementales) y unidades secundarias (combinación de dos o más unidades primarias).

consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes.

En una primera fase del análisis consideramos útil clasificar la información del texto en tres apartados (componentes praxeológicos): *Praxis*, que incluye las situaciones-problemas y los elementos actuativos; *Lenguaje*, términos, expresiones, notaciones, gráficos; *Teoría*, conceptos-definición, propiedades, argumentaciones⁴.

1. Definición de conjunto

Texto y unidades primarias de análisis

1.1	El concepto de <i>conjunto</i> es muy general y muy simple.
1.2	«Cualquier colección de cosas es un conjunto .»
1.3	Sin embargo, hay que señalar que para que un conjunto esté <i>bien definido</i> , es preciso poder conocer <i>todos sus miembros</i> o una
1.4	<i>cualidad</i> de ellos que nos permita saber si un nuevo objeto <i>está o no</i> dentro de ese conjunto.

Componentes y unidades elementales

Praxis	Lenguaje	Teoría
	- Términos y expresiones: conjunto; concepto, colección; cosas; miembros; cualidad; estar dentro de un conjunto	- Conceptos (definiciones): conjunto; conjunto bien definido; pertenencia a un conjunto - Propiedades: el conjunto, concepto muy general y muy simple

Conocimientos y conflictos semióticos:

1.1. Con el término 'conjunto' se designa a un objeto no ostensivo que es calificado de concepto; se supone que el lector conoce el uso del término 'concepto' como resultado de aprendizajes anteriores. La descripción que se da en 1.2 de conjunto es un ejemplar de concepto, que en este caso se trata de un concepto-definición. No hay un discurso teórico sobre el concepto, pero sí una praxis sobre esa noción.

Se atribuye una propiedad al concepto de conjunto: "el ser muy general y muy simple". Se supone que el 'concepto de conjunto' viene regulado por el enunciado del párrafo siguiente y que al ser breve, el atributo de "muy general y muy simple" se refiere a esa característica. Esto no se puede justificar desde el punto de vista del significado de referencia si tenemos en cuenta la complejidad del concepto desde el punto de vista matemático experto.

1.2. La definición que se da utiliza los términos 'colección' y 'cosas' cuyo significado se supone conocido del lector y se corresponde con su uso en el lenguaje ordinario. Los propios conjuntos deben ser considerados como "cosas" ya que pueden ser también miembros de conjuntos; el uso de 'colección' en el lenguaje ordinario no se aplica al caso de conjuntos unitarios y del conjunto vacío.

1.3. Se usa la expresión 'conjunto bien definido' para designar aquellos conjuntos para los cuales se dispone de un criterio que permita determinar si un objeto es o no miembro del conjunto. No se descarta que las colecciones que no cumplan esta

⁴ Queda abierto a análisis y discusión si el uso que hacemos aquí de los términos 'praxis' y 'teoría' coinciden o no con los propuestos por Chevallard (1999) en la teoría antropológica. En cualquier caso nos parece útil destacar como un componente independiente de las praxeologías el propio lenguaje, entendido como el sistema de medios materiales usados como soporte de la actividad matemática.

condición no se designan como conjuntos. Se trata en realidad de un atributo aplicable a las colecciones, pero no a los conjuntos.

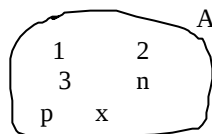
- 1.4. Los términos 'miembro', 'cualidad' y a la expresión 'estar dentro' no se les asigna un significado específico. Se usan con su significado propio del lenguaje ordinario. Se atribuye al conjunto el rasgo metafórico de ser un recipiente y, por tanto, como algo de naturaleza ostensiva; esto oculta su naturaleza lingüística.

En este primer apartado no se incluye ningún elemento situacional ni operatorio; los objetos que se ponen en juego son de naturaleza lingüística y teórica.

2. Notaciones

Texto y unidades primarias de análisis:

2.1	Notaciones:
2.2	A los miembros de esa colección llamada conjunto se les conoce como elementos , y si tenemos un conjunto P y un elemento suyo r, usaremos la notación: $r \in P$ (se lee: 'r pertenece a P', o 'r es miembro de P'). En caso de que s no sea elemento de P, pondremos: $s \notin P$.
2.3	Para describir los elementos de un conjunto los colocaremos entre llaves: $P = \{\text{pala, cubo, playa, chupete}\}$
2.4	(se dice que así está definido por extensión), o bien indicaremos una cualidad de todos sus elementos (definido por comprensión):
2.5	$H = \{\text{meses del año}\}; M = \{x / x \text{ es un número primo}\}$
2.6	Un modo gráfico de representar un conjunto consiste en dibujar, escribir o representar sus elementos, y rodearlos todos por una línea, lo que recibe el nombre de diagrama de Venn .
2.7	El conjunto que engloba a todos los elementos a los que se refieren todos los participantes en una discusión se llama conjunto universal (U) , para ese contexto.



Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Situaciones: Ejemplos de conjuntos dados por extensión y por comprensión Ejemplos de representación notacional y gráfica de un conjunto y elementos genéricos - Técnicas: representación diagrama Venn	- Términos y expresiones: elemento; extensión; comprensión; diagrama de Venn; conjunto universal - Notaciones: P, H, M, U (conjuntos); r, s, x elementos; $\in$, pertenencia; $\notin$; $\{, \}$ - Gráficos: 	- Conceptos (definiciones): elemento; pertenencia; definición por extensión; definición por comprensión; diagrama de Venn; conjunto universal

Conocimientos y conflictos semióticos:

- 2.1. Se asigna significado al término 'elemento' (miembros de las colecciones llamadas conjunto), se introduce una notación literal, r para un elemento cualquiera y una letra mayúscula P a un conjunto arbitrario. Las letras P y r designan aquí un conjunto y elemento arbitrario (tipos, objetos intensivos)

- 2.2. Se introduce la notación de pertenencia y su lectura:

$r \in P$, 'r pertenece a P', 'r es miembro de P'; $s \notin P$

Estas notaciones y expresiones tienen aquí un carácter genérico. La letra r desempeña el papel de variable, representante de cualquier elemento del conjunto P. También P es una variable, está en lugar de cualquier conjunto.

2.3. Se introduce una notación genérica para designar los conjuntos: colocar entre llaves la colección de elementos separados por comas; o indicando una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto. Se trata de dos reglas generales (intensivo) de tipo notacional. La primera notación sólo es pertinente si el número de elementos es pequeño.

2.4. Estas reglas se ejemplifican con la colección de los nombres de 4 objetos, con el conjunto de los meses del año y con el conjunto de números que cumplen la condición de ser primos (infinito). Cada ejemplo de conjunto se designa con una letra mayúscula, convenio general no enunciado; el uso de P pasa a designar un extensivo (ejemplar), mientras que en 1.2 era intensivo (tipo) puede ocasionar dificultades al lector.

2.5. La definición del conjunto M por comprensión introduce una notación no explicada, 'x/x es un número primo', en la que la letra x designa un elemento genérico (noción de variable). El conjunto H (meses del año) dado por comprensión no usa la notación x/x; por tanto, se introducen dos notaciones para las definiciones por comprensión.

2.6. Expresión gráfica de un conjunto (diagrama de Venn). Descripción de la técnica para dibujar diagramas de Venn. Se presenta como otra expresión alternativa, sin indicar sus limitaciones.

2.7. Definición de conjunto universal, de manera genérica y sin mostrar situaciones particulares de uso. No se asigna un significado específico a los términos 'discusión' y 'participantes'.

La noción de variable se usa de manera implícita por medio de la situación de expresión de un conjunto arbitrario P y de elementos arbitrarios de un conjunto dado; aunque no hay un discurso sobre la "variable" sí hay una praxis acerca de esa noción.

3. Subconjuntos

Texto y unidades primarias de análisis:

3.1	Subconjuntos: Si cada miembro de un primer conjunto, A, es también miembro de un segundo conjunto, B, entonces decimos que el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto. Y se denota: $A \hat{=} B$ (se lee 'A incluido en B'). En otras palabras: $A \hat{=} B \hat{=} [\text{" } x \hat{=} A \text{ } \text{ } x \hat{=} B]$
3.2	El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío ($\emptyset$). Es subconjunto de cualquier conjunto. Los conjuntos con un sólo elemento se llaman conjuntos unitarios .
3.3	Como todo conjunto tiene como subconjuntos de él al conjunto vacío y a sí mismo, esos se llaman subconjuntos impropios , para distinguirlos de los demás subconjuntos (si los hay), que se llaman subconjuntos propios .
3.4	Dos conjuntos se dice que son iguales si coinciden en todos sus elementos, en otras palabras: $A = B \hat{=} [A \hat{=} B \text{ y } B \hat{=} A]$

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
	- Términos y expresiones: subconjunto, 'A incluido en B' conjunto vacío, conjunto unitario subconjuntos propios, subconjuntos impropios, conjuntos iguales - Notaciones: $\emptyset$,	- Conceptos: subconjunto; conjunto vacío; conjunto unitario; conjuntos iguales - Propiedades: El conj. vacío es subconjunto de cualquier conjunto;

$A \subset B \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B]$	Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \text{ y } B \subset A]$	

Conocimientos y conflictos semióticos:

3.1. Se formulan las definiciones generales de subconjunto, conjunto vacío y unitario (intensivos conceptuales); se fija la notación genérica para la relación de inclusión (intensivo notacional). Además se establece la equivalencia entre la definición de subconjunto en el lenguaje ordinario y la notación simbólica. Se supone que el lector conoce el uso de los símbolos de doble implicación ($\Leftrightarrow$), implicación $\Rightarrow$, y para todo $\forall$.

3.3. Se dan las definiciones de conjunto vacío y conjunto unitario. No se argumenta ninguna de las dos propiedades enunciadas, $\emptyset \subset A$; $A \subset A$.

3.4. La definición de igualdad de conjuntos introduce la noción de coincidencia, cuya equivalencia con la doble inclusión no se justifica. Esta definición se ha podido dar de manera más simple: “dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos”.

En esta unidad no se presenta ninguna situación o tarea que motive y ejemplifique las nociones introducidas. Estas nociones y notaciones tienen una naturaleza genérica (intensional).

Las letras A y B son usadas para referirse a dos conjuntos arbitrarios, siendo, por tanto, variables; en la sección 2 se usó P para esa misma función, el lector debe establecer la equivalencia entre ambas notaciones.

4. Ejercicios (2.1)

Texto y unidades primarias de análisis:

	2.1.- Ejercicios:	
4.1	2.1.- Refiriéndose a la figura de la derecha, decir si es cierto o falso:	
4.2	a) $7 \in G$ b) $7 \notin G$ c) $G \subset F$ d) $F \subset U$ e) $\emptyset \subset F$ f) $G \in U$ g) $0 \in \emptyset$ h) $\{5\} \in G$	
4..3	2.2.- Tomando como conjunto universal $U = \{1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$, describir cada uno de los siguientes conjuntos, por comprensión:	
	a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ b) $\{5, 10\}$ c) $\{6, 7, 8, 9\}$ d) $\{7\}$ e) $\emptyset$ f) $\{6, 8, 10, 12\}$ g) $\{1, 4, 9\}$	
4.4	2.3.- Dado el conjunto $S = \{a, b, c\}$, escribir todos sus subconjuntos.	
4..5	2.4.- Una partición de un conjunto puede definirse como una separación de éste en subconjuntos no vacíos ni con elementos comunes. Dos particiones diferentes de un conjunto de cuatro elementos se muestran en la figura. La primera partición es $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$, y la segunda es $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$. a) ¿Cuántas particiones hay de un conjunto de cuatro elementos? b) ¿Cuántas particiones hay de un conjunto de cinco elementos?	

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Problemas de aplicación de las definiciones de pertenencia, inclusión, conjunto vacío, unitario, definición de conjunto por comprensión. - Técnica de formación sistemática de todos los subconjuntos - Ejemplo de 2 particiones de un conjunto de 4 elementos - Problema de formación del conjunto de partes de conjuntos con 3 y 4 elementos. - Técnica de formación sistemática del conjunto de partes de 3 y 4 elementos.	- Términos y expresiones: partición de un conjunto - Gráficos: Representación del conjunto U como un rectángulo y la inclusión de subconjuntos mediante diagramas de Venn.	- Conceptos: partición de un conjunto - Validaciones Se requiere producir 8 argumentaciones que justifiquen las respuestas a las 8 cuestiones propuestas - Justificación del carácter exhaustivo de todos los subconjuntos formados y de las particiones.

Conocimientos y conflictos semióticos:

4.1. Se requiere que el lector interprete la letra U junto al rectángulo como el conjunto universal y que está formado por los números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Las letras mayúsculas F y G se refieren a subconjuntos de U. ¿Por qué se representa U con un rectángulo?

4.2. El conjunto U podría considerarse formado por $\{0, G, 10\}$ en cuyo caso G sería elemento de U. La regla de uso de los paréntesis para designar conjuntos hace que $\{5\}$ tenga una "naturaleza" distinta de 5; en consecuencia $\{5\}$ no es un elemento de G, sino un subconjunto.

4.3. Se pide aplicar la regla dada en 2.4 (definición por comprensión) a 7 ejemplos de subconjuntos dados por extensión. Es una tarea bastante abierta que requiere poner en juego conocimientos diversos sobre los números naturales. En el caso a) se espera dar como respuesta {números impares menores que 12}, o también, $\{x \in U/x=2n-1, 1 \leq n \leq 6\}$. Podemos formular la hipótesis que los casos d) (conjunto unitario) y e) (conjunto vacío) resultarán difíciles para la mayoría de los estudiantes a los que va destinado el texto si previamente el profesor no ha mostrado ejemplos similares.

4.3. Se regula el uso del término 'partición' (definición) y se ejemplifica con dos ejemplos de particiones de un conjunto de cuatro elementos. Se establece la equivalencia entre la notación literal y la gráfica.

4.4. Se requiere implementar un procedimiento sistemático de formación de todos los subconjuntos de un conjunto de 3 elementos que garantice que no falta ninguno. El lector debe recordar y aplicar la regla general dada en 3.3 (sin justificación) de que el $\emptyset$ y S son subconjuntos de S.

4.5. Se presentan los dos ejemplos de partición como conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos. No se introduce la definición de conjunto de partes de un conjunto.

5. Operaciones con conjuntos

Texto y unidades primarias de análisis:

5.1	Intersección: «La intersección de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen, a la vez, a A y a B»
5.2	$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$
5.3	«Los conjuntos A y B se dicen disjuntos si y sólo si $A \cap B = \emptyset$ »
5.4	Ejemplo 1: Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ el conjunto universal, sea $P = \{2, 3, 5, 7\}$ el conjunto de los números primos, A el conjunto de los números pares e I el de los impares. Describir cada una de las siguientes intersecciones y representarlas en un diagrama de Venn: a) $P \cap I$ b) $P \cap A$ c) $A \cap I$ d) $U \cap P$
	Unión: «La unión de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen, a A o a B, o a ambos»
	$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$
	Ejemplo 2: Tomando los conjuntos U, P, A e I del Ejemplo 1, describir y representar: a) $P \cup A$ b) $P \cup I$ c) $A \cup I$
	Complementario: «Si A es un subconjunto de un conjunto universal U, entonces el complementario de A en U , denotado por A' (o por C_A), es el conjunto de todos los elementos de U que no son elementos de A»
	$A' = \{x \in U / x \notin A\}$
	Ejemplo 3: Tomando los conjuntos U, P, A e I del Ejemplo 1, describir y representar los complementarios P' , A' , I' y U' .

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Aplicación de la definición de intersección de conjuntos; caso de dos conjuntos finitos dados uno por extensión y otros dos por comprensión; - Ejemplos de uso de la conjunción, disyunción y negación lógica. - Representación literal y mediante diagramas de Venn de los conjuntos solución. - Idem para la unión - Idem complementario	- Términos y expresiones: intersección; conjuntos disjuntos; unión; complementario - Notaciones: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$ $A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$ $A' = \{x \in U / x \notin A\}; C_A$	- Conceptos: intersección de dos conjuntos; conjuntos disjuntos; unión; complementario

Conocimientos y conflictos semióticos:

5.1. Fijación de las reglas de uso de los términos 'intersección', 'unión', 'complementario', 'conjuntos disjuntos' (definiciones, intensivos conceptuales) y las notaciones genéricas correspondientes (intensivos notacionales).

Se ponen en juego la conjunción lógica (intersección), la disyunción inclusiva (unión) y la negación (complementario); estas nociones no son objeto de discurso teórico, pero sí de una praxis.

5.2. Se establece la equivalencia entre las definiciones con lenguaje ordinario y las simbólicas; las descripciones simbólicas ponen en juego la noción de variable, x, como elemento genérico de un conjunto, y las letras A y B como conjuntos arbitrarios.

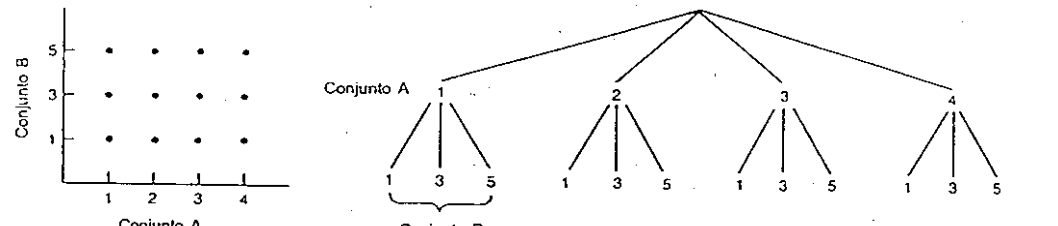
5.3. El estudio de estas tres operaciones se realiza de manera similar. Se establece la regla general (el concepto) en lenguaje ordinario y simbólicamente, y a continuación se propone una tarea de aplicación/interpretación de esa regla en un caso particular

(conjuntos numéricos con 8 elementos). Los ejemplos de conjuntos U, P, A, I son valores particulares de las variables A y B. La letra A se usa para designar dos objetos distintos: un conjunto arbitrario (intensivo) y el conjunto de números pares (extensivo).

5.4. Se propone como ejercicio la realización de las operaciones y su traducción al lenguaje gráfico de los diagramas de Venn. La correspondencia entre las definiciones generales de las operaciones y los ejemplos de cálculo de las mismas pone en juego diversos códigos cuya interpretación por el lector puede ser conflictiva. Así debe saber que las letras A y B usadas en las definiciones toman los valores P, I en a); que $I = \{1,3,5,7\}$, un subconjunto de todos los impares; etc. En ninguno de los casos se resuelve el ejemplo.

6. Producto cartesiano

Texto y unidades primarias de análisis

	Producto cartesiano: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$. Con sus elementos podemos formar pares ordenados , tomando un primer elemento en el conjunto A y un segundo elemento en el conjunto B, lo podremos denotar, por ejemplo, como (1,3) , donde $1 \in A$ y $3 \in B$; al 1 se le llama primera componente del par, y al 3, la segunda componente . Hay que señalar que el apelativo de 'ordenado' indica que el par (1,3) y el (3,1) se considerarán diferentes. Concretamente, dos pares ordenados se dirá que son iguales solamente cuando lo sean sus primeras componentes y lo sean sus segundas componentes.
6.1	Definimos el producto cartesiano de A y B , $A \times B$, como el conjunto de todos los pares ordenados (a,b), donde $a \in A$ y $b \in B$.
6.2	$A \times B = \{ (a,b) / a \in A \text{ y } b \in B \}$
6.3	Una representación cómoda para los productos cartesianos de dos conjuntos es la de diagrama rectangular y la de árbol .
	 El diagrama rectangular muestra un eje horizontal etiquetado como 'Conjunto A' con los valores 1, 2, 3, 4 y un eje vertical etiquetado como 'Conjunto B' con los valores 1, 3, 5. Los puntos de intersección representan los pares ordenados. El diagrama en árbol muestra una raíz que se ramifica en cuatro nodos correspondientes a los elementos de A (1, 2, 3, 4). Cada uno de estos nodos se ramifica a su vez en tres nodos correspondientes a los elementos de B (1, 3, 5).

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Ejemplo de formación del producto cartesiano de dos conjuntos numéricos de 4 y 3 elementos - Ejemplos de los objetos diagrama rectangular y en árbol y de sus técnicas de construcción	- Términos y expresiones: pares ordenados; primera componente; segunda componente; igualdad de pares; producto cartesiano; diagrama rectangular; diagrama en árbol - Notaciones: pares, (3,1), (1, 3) $A \times B = \{(a,b)/a \in A \text{ y } b \in B\}$ - Gráficos: (diagrama cartesiano); (diagrama en árbol)	- Conceptos: par ordenado; producto cartesiano; igualdad de pares ordenados

Conocimientos y conflictos semióticos:

6.1. Los ejemplos de pares (1,3), (3,1) se usan como representantes del tipo general de "par ordenado" al que se le asigna la condición de que ambas componentes del par sean diferentes. Se formula la regla general que fija el uso de la expresión 'par ordenado'. También se ponen en juego las nociones generales de primera y segunda componente de un par ejemplificadas por los números 1, 3 del par (1,3), e igualdad de pares.

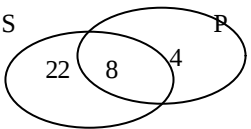
6.2. Definición general de producto cartesiano de conjuntos. Las letras que designan a los dos conjuntos son A y B, las mismas usadas para el ejemplo de formación de pares. Esto puede restar generalidad a la definición. La regla general de formación del producto cartesiano no se aplica al caso de los dos conjuntos numéricos finitos propuestos. No se aprovecha el ejemplo para mostrar el conjunto de pares ordenados que constituye el producto cartesiano.

6.3. Los gráficos 'diagrama rectangular' y 'diagrama en árbol' usados para representar el producto cartesiano de $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y $B=\{1, 3, 5\}$ son ejemplos de un intensivo procedimental, o sea de una técnica general para expresar el producto cartesiano de dos conjuntos. Se supone conocida la técnica general de construcción de ambos diagramas. En ambos esquemas se usan nuevos convenios para expresar conjuntos (sin usar llaves, ni diagramas de Venn).

6.4. La equivalencia notacional entre las tres formas de expresar el producto cartesiano no se establece de manera explícita.

7. Diagramas de Venn para la resolución de problemas

Texto y unidades primarias de análisis:

	Diagramas de Venn para la resolución de problemas:	
7.1	Para ciertas clases de problemas, los diagramas de Venn son un modelo apropiado para representar la información y resolver el problema. Veamos dos ejemplos:	
7.2	Ejemplo 4: En el bar hay 30 alumnos de segundo curso y hay doce alumnos con las Matemáticas I pendientes; 8 de éstos son también de segundo curso. ¿Cuántos alumnos hay en total en el bar? La solución queda indicada si representamos los conjuntos:	
7.3	Ejemplo 5: En una entrevista a 200 personas se obtuvo la siguiente información: 28 beben limonada, leche y Coca Cola 50 beben limonada y leche 60 beben leche y Coca Cola 30 beben limonada y Coca Cola 100 beben leche 65 beben limonada 102 beben Coca Cola. ¿Cuántos no beben ninguna de las tres bebidas?	

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Aplicación de las nociones de conjunto, intersección y unión (2 ejemplos con conjuntos finitos de personas, uno con 2 conjuntos y otro con 3) y de cardinal de un conjunto - Aplicación de la técnica de representación del diagrama de Venn	- Números dentro de los diagramas para expresar el cardinal del conjunto	

--	--	--

Conocimientos y conflictos semióticos:

7.1. Se introduce una nueva manera de expresar un conjunto de objetos indicando su número de elementos en el interior del diagrama de Venn. Se sustituye la enumeración de todos los elementos que forman un conjunto de objetos (que sería aquí imposible) por la indicación de una propiedad característica de esos conjuntos: el cardinal o número de elementos.

7.2. Se presenta un ejemplo particular de aplicación de una técnica general para hallar el cardinal de un conjunto. Dicha técnica no se describe, sólo queda evocada con el ejemplo. El lector debe interpretar que los números 22, 8 y 4 corresponden al cardinal de los conjuntos diferencia $S-P$, intersección $S \cap P$, y diferencia $P-S$. Se pone en juego la operación diferencia entre conjuntos que no ha sido definida.

El sujeto tiene ocasión de recordar y aplicar las definiciones de las operaciones conjuntistas introducidas. Esta actividad permite relacionar la praxis conjuntista y la numérica, proporcionando una primera justificación indirecta (ciertamente insuficiente) del discurso teórico conjuntista.

7.3. En el ejemplo 5 se espera que el lector sea capaz de generalizar la técnica esbozada en el ejemplo 4 al caso de tres conjuntos. Se puede suponer que esa tarea será conflictiva para la gran mayoría de los estudiantes si previamente no se le ha mostrado una tarea similar.

8. Ejercicios (2.2.)

Texto y unidades primarias de análisis

	2.2.- Ejercicios:
8.1	2.5.- Tomando como conjunto universal $U = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ y los subconjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, escribir y representar los conjuntos:
8.2	a) $A \cap B$ b) A' c) $A \cup B$ d) $A' \cup B$ e) $A' \cap B'$ f) $A \cap U$ g) U' h) $A \times B$
8.3	i) $B \times B$ j) $\emptyset \times A$
	2.6.- Representar por diagramas de Venn tres conjuntos A , B y C , que se intersecan mutuamente, dentro de un conjunto universal U , y sombrear, alternativamente, cada uno de los conjuntos indicados a continuación:
	a) $A \cap B$ b) $C \cup A$ c) B' d) $(A \cup C) \cap B$
	e) $A \cup (C \cap B)$ f) $A' \cap (B \cup C)$ g) $B \cup B'$ h) $(C')'$
	2.7.- De un grupo de 100 personas, 70 leen <i>La Voz de Galicia</i> , 60 leen <i>El Correo Gallego</i> y 20 no leen ninguno de los dos. ¿Cuántos leen ambos?
	2.8.- En un grupo de 100 personas hay 67 bebedores y 54 fumadores. ¿Qué se puede decir acerca del número de los que beben y fuman?
8.4	2.9.- Una encuesta fue elaborada para determinar el apoyo que un Presidente tenía en cuanto a su política económica (E), social (S) y militar (M). Los porcentajes de apoyo fueron: EMS 8%; EM 12%; MS 11%; ES 18%; E 40%; M 40% y S 33%. ¿Qué porcentaje no lo apoya en ninguna de sus tres políticas? ¿Qué porcentaje lo apoya en sólo una de ellas?

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Ejemplificación de las nociones: conjunto universal (números del 1 al 10), subconjuntos y operaciones - Traducción entre el lenguaje literal y gráfico con subconjuntos del conjunto universal $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ - Ejemplificación de las nociones: conjunto universal	- Notaciones: EMS (intersección), % (porcentaje)	- Intensivo notacional: diagramas de Venn cuyas regiones sombreadas

(genérico), subconjuntos y operaciones con tres conjuntos, expresados con diagramas de Venn. - Técnica de representación de conjuntos y operaciones con diagramas de Venn - Modelización mediante nociones conjuntistas de situaciones realistas: Cálculo del cardinal de conjuntos de personas que cumplen relaciones definidas mediante operaciones conjuntistas (casos de 2 y de 3 conjuntos)		expresan los elementos de conjuntos arbitrarios
--	--	---

Conocimientos y conflictos semióticos:

8.1. Se requiere recordar e interpretar las reglas que definen las operaciones conjuntistas y los convenios de representación de conjuntos con diagramas de Venn.

8.2. Las letras A, B, C, y los diagramas de Venn con regiones sombreadas representan aquí a conjuntos arbitrarios cuyos elementos pueden tener cualquier naturaleza (puntos, números, etc.). Una región del plano sombreada indica, además de un conjunto de puntos, conjuntos finitos o infinitos de elementos arbitrarios; constituye, por tanto, una nueva expresión gráfica del concepto de variable.

8.3. Modelización de situaciones realistas mediante el lenguaje y las operaciones conjuntistas. Pone en juego procesos de interpretación y traducción, operaciones de cálculo conjuntista y numérico, así como la interpretación de los resultados en términos de las situaciones realistas.

8.4. El problema 2.9 introduce un nuevo convenio (de manera implícita) para expresar la intersección de conjuntos: EMS quiere decir $E \cap M \cap S$. También se usa el % (porcentaje) para indicar el cardinal de los conjuntos en términos relativos: 8% es una variable que puede tomar el valor 8 si la población encuestada es 100, u otro valor si la población es distinta.

9. Propiedades de las operaciones conjuntistas

Textos y unidades primarias de análisis

2.10.-	Comprobar de alguna forma las propiedades conmutativa y asociativa de la unión de conjuntos y de la intersección: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Y también la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección, de la intersección respecto de la unión y del producto cartesiano respecto de la unión y de la intersección:
9.1	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
9.2	
9.3	

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Construcción de ejemplos de conjuntos y de operaciones de unión, intersección y producto cartesiano - Realización de operaciones conjuntistas.	- Términos y expresiones: commutativa, asociativa, distributiva; - Notaciones:	- Propiedades: conmutativa y asociativa de la unión e intersección; distributiva de la unión respecto de la intersección; de la intersección respecto de la unión; del producto cartesiano

- Desarrollo de una técnica de comprobación de las propiedades de las operaciones conjuntistas en un caso particular	(expresiones simbólicas de las propiedades)	respecto de la unión e intersección -Validación de las propiedades mediante comprobación con ejemplos
--	---	--

Conocimientos y conflictos semióticos:

9.1. 'Comprobar de alguna forma' la propiedad conmutativa de la unión e intersección exige inventar una situación en la que se asignen a las variables A y B ejemplos particulares de conjuntos, bien por extensión o mediante diagramas de Venn. Construir los conjuntos unión o intersección, según el caso (operar con conjuntos). Se asume que el lector conoce el significado del término 'comprobar'.

9.2. En el caso de las propiedades asociativas hay que "dar valores" a tres variables, A, B, y C. Construir la unión o intersección, según el caso (operar con conjuntos).

9.3. Recordar la definición de igualdad de dos conjuntos como doble inclusión. Comprobar en los ejemplos contruidos que se cumple la doble inclusión.

Procesos similares se requieren para las propiedades distributivas, aunque con nivel de complejidad superior al poner en juego simultáneamente las operaciones de unión, intersección o producto cartesiano.

SIGNIFICADO SISTÉMICO SOBRE CONJUNTOS Y OPERACIONES

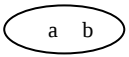
En las siguientes tablas sintetizamos los distintos componentes del significado sistémico o praxeológico puesto en juego en el texto dado a los estudiantes como documento de referencia para el estudio del contenido sobre conjuntos y operaciones. Las tablas describen la estructura de la "praxeología local" sobre teoría de conjuntos implementada en el texto, la cual constituye el marco de referencia institucional del proceso de estudio, junto con las tareas y explicaciones dadas en clase por el profesor correspondiente.

Los componentes del significado sistémico son agrupados en las seis categorías siguientes:

- lingüísticos (términos y expresiones, notaciones y gráficos)
- situacionales (problemas, ejemplos, ejercicios)
- actuativos (operaciones, técnicas, procedimientos)
- conceptuales (formulación de las reglas que definen los conceptos)
- proposicionales (enunciado de propiedades y atributos de los conceptos y operaciones)
- validativos (argumentaciones que validan las proposiciones)

Componentes lingüísticos

Unidad	Componente
1	Términos y expresiones: Conjunto; colección; cosas; miembros; cualidad; estar dentro de un conjunto
2	- Términos y expresiones: elemento; extensión; comprensión; diagrama de

	Venn;conjunto universal - Notaciones: P, U, H, M (conjuntos) r, s, x (elementos); $\in$ (pertenencia), $\notin$ (no perten.), $\{ , \}$ - Gráficos:  (diagrama de Venn)
3	- Términos y expresiones: subconjunto; 'A incluido en B'; conjunto vacío; conjunto unitario; subconjuntos propios; subconjuntos impropios; conjuntos iguales. - Notaciones: $A \subset B \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B]$; $A = B \Leftrightarrow [A \subset B \text{ y } B \subset A]$; $(\emptyset)$
4	- Términos y expresiones: partición de un conjunto - Gráficos: Representación del conjunto U como un rectángulo y la inclusión de subconjuntos mediante diagramas de Venn.
5	-Términos y expresiones: intersección; conjuntos disjuntos; unión; complementario - Notaciones: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$; $A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$; $A' = \{x \in U/x \notin A\}$, C_A
6	- Términos y expresiones: pares ordenados; primera componente; segunda componente; igualdad de pares; producto cartesiano; diagrama rectangular . diagrama en árbol; - Notaciones: pares, (3,1), (1, 3); $A \times B = \{(a,b)/a \in A \text{ y } b \in B\}$ - Gráficos: (diagrama cartesiano); (diagrama en árbol)
7	- Números dentro de los diagramas para expresar el cardinal del conjunto
8	Notaciones: EMS (intersección); % (porcentaje)
9	- Términos y expresiones:Commutativa, asociativa, distributiva; - Notaciones: (expresiones simbólicas de las propiedades) - Enunciado de problemas en los que se requiera realizar las operaciones conjuntistas y comprobar las propiedades

Componentes situacionales

Unidad	Componente
2	Ejemplos de conjuntos dados por extensión y por comprensión. Ejemplos de representaciones notacionales y gráfica de un conjunto y elemento genérico.
4	- Problemas de aplicación de las definiciones de: pertenencia, inclusión, vacío, unitario, definición de conjunto por comprensión. - Ejemplo de 2 particiones de un conjunto de 4 elementos - Problema de formación del conjunto de partes de conjuntos con 4 y 5 elementos.
5	- Aplicación de la definición de intersección de conjuntos; caso de dos conjuntos finitos dados uno por extensión y otros dos por comprensión; representación literal y mediante diagramas de Venn de los conjuntos solución. - Idem para la unión y el complementario. - Ejemplos de uso de la conjunción, disyunción y negación lógica.
6	- Ejemplo de formación del producto cartesiano de dos conjuntos numéricos de 4 y 3 elementos
7	- Aplicación de las nociones de conjunto, intersección y unión (2 ejemplos con conjuntos finitos de personas, uno con 2 conjuntos y otro con 3) - Aplicación de la técnica de representación del diagrama de Venn
8	- Ejemplificación de las nociones: conjunto universal (números del 1 al 10),

	subconjuntos y operaciones - Ejemplificación de las nociones: conjunto universal (genérico), subconjuntos y operaciones con tres conjuntos, expresados con diagramas de Venn. - Modelización mediante nociones conjuntistas de situaciones realistas: Cálculo del cardinal de conjuntos de personas que cumplen relaciones definidas mediante operaciones conjuntistas (casos de 2 y de 3 conjuntos)
9	- Construcción de ejemplos de conjuntos y de operaciones de unión, intersección y producto cartesiano

Componentes actitudivos

Unidad	Componente
4	- Técnica de formación sistemática de todos los subconjuntos - Técnica de formación sistemática del conjunto de partes de 4 y 5 elementos.
6	- Ejemplo de aplicación de la técnica de construcción de los diagramas rectangular y en árbol
8	- Traducción entre el lenguaje literal y gráfico, con subconjuntos del conjunto universal $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ - Técnica de representación de conjuntos y operaciones con diagramas de Venn - Cálculo del cardinal de conjuntos de personas que cumplen relaciones definidas mediante operaciones conjuntistas (casos de 2 y de 3 conjuntos)
9	- Realización de operaciones conjuntistas. - Desarrollo de una técnica de comprobación de las propiedades de las operaciones conjuntistas en un caso particular

Componentes conceptuales

Unidad	Componente
1	Conjunto; conjunto bien definido; pertenencia a un conjunto
2	Elemento; pertenencia; definición por extensión; definición por comprensión; diagrama de Venn; conjunto universal;
3	Subconjunto; conjunto vacío; conjunto unitario; conjuntos iguales
4	Partición de un conjunto
5	Intersección de dos conjuntos; conjuntos disjuntos; unión; complementario
6	Par ordenado; producto cartesiano; igualdad de pares ordenados
7	Número de elementos de un conjunto
8	- Intensivo notacional: diagramas de Venn cuyas regiones sombreadas expresan los elementos de conjuntos arbitrarios.

Componentes proposicionales

Unidad	Componente
1	El conjunto, concepto muy general y muy simple
3	El conj. vacío es subconjunto de cualquier conjunto; Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
9	- Propiedades: conmutativa y asociativa de la unión e intersección; distributiva de la unión respecto de la intersección; de la intersección respecto de la unión; del producto cartesiano respecto de la unión e intersección

Componentes argumentativos

Unidad	Componente
4	- Validaciones: Se requiere producir 8 argumentaciones que justifiquen las respuestas a las 8 cuestiones propuestas - Justificación del carácter exhaustivo de todos los subconjuntos formados y de las particiones.
9	-Validación de las propiedades (commutativa, asociativa, ...) mediante comprobación con ejemplos

SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

La técnica del análisis semiótico en cuya puesta a punto venimos trabajando desde hace unos años, y que hemos aplicado y desarrollado en este trabajo, comienza a desvelarse como un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de “microcópico”, permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones. A un nivel más general permite describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja, como puede ser la “teoría de conjuntos” implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos conflictos semióticos pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con nuestro análisis es necesaria si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño e implementación del proceso de estudio y determinar los recursos materiales y de tiempo necesarios.

A título de ejemplo, y como resumen, reseñamos a continuación los principales conflictos semióticos encontrados en el análisis realizado.

1. La definición de conjunto dada en 1.2 es una simplificación de la dada por Cantor. Como sabemos, una definición tan general de la noción de conjunto provoca la aparición de paradojas en la teoría que serán superadas a base de no considerar como conjuntos ciertas colecciones excesivamente grandes, como el conjunto de todos los conjuntos. Como se sabe, para solventar el problema de las paradojas se elaboraron diferentes teorías axiomáticas como la Zermelo-Fraenkel, von Neumann, Bernays, Gödel y Ackermann.

Aunque parece obvio que estas dificultades técnicas de la teoría no pueden ser discutidas en un texto dirigido a la formación de maestros si nos parece que la definición presentada requiere matizaciones ya que será conflictivo para el estudiante considerar a un conjunto unitario como una colección, y mucho más hablar de colecciones vacías y colecciones infinitas (discretas y continuas). También parece necesario precisar la noción de “cosa” ya que como elementos de conjuntos el estudiante encontrará a las propias colecciones. No es pues de extrañar que los estudiantes tengan dificultades ante tareas en las que intervengan estas colecciones “extrañas”.

Esta clase de conflictos con las definiciones de los objetos matemáticos podemos describirlos como *conflictos conceptuales*. En el caso del concepto-definición *conjunto*

se trata de que la regla presentada no contempla la verdadera complejidad de uso del término correspondiente. Pero también puede ocurrir que en el proceso de estudio se ponga en juego una noción, como la diferencia de conjuntos, que no ha sido introducida.

2. El análisis semiótico permite analizar la dialéctica entre lo “concreto” y lo “abstracto”, que en nuestro modelo teórico viene contemplada al introducir la dimensión extensiva – intensiva, o lo que consideramos equivalente, la distinción ejemplar – tipo. En la actividad matemática hay siempre una tensión hacia la generalización, a considerar problemas y técnicas cada vez más generales que resuelvan el mayor número posible de problemas particulares. Esto lleva al uso de variables instrumentadas en notaciones y convenios generales.

En diversas unidades hemos visto que el autor designa un conjunto genérico con la letra A , por ejemplo, (P en otra ocasión), y a continuación la misma notación designa “el conjunto de los pares”, y otros conjuntos se designan con letras diferentes. El uso indiscriminado de estas notaciones puede dificultar el desarrollo del razonamiento abstracto que se pretende ir construyendo progresivamente.

3. Los conjuntos se han expresado con notaciones diversas: letras mayúsculas, enumeración de elementos entre llaves, enunciado de una propiedad entre llaves, diagramas de Venn, diagrama cartesiano, etc. El conocimiento de las circunstancias en que cada notación resulta apropiada, y las traducciones entre ellas no han recibido atención en el texto, lo que a priori puede resultar conflictivo para los sujetos a los que se dirige (conflictos notacionales).

4. En diversas unidades de análisis hemos identificado un conflicto potencial que se puede describir como “generalización docente abusiva”. Se trata de requerir del lector la realización de tareas para las que no ha recibido instrucción suficiente: pedir la formación de las particiones de un conjunto con cinco elementos, hallar el cardinal de conjuntos que cumplen ciertas condiciones en situaciones que involucran tres conjuntos, comprobar mediante ejemplos las propiedades de las operaciones conjuntistas. En estas tareas se requieren conocimientos previos tales como, conjunto de partes, familia de conjuntos, verificación de igualdades, etc.

5. Ausencia de justificación o explicación de algunas propiedades mencionadas, como que $\emptyset \subset A$, $A \subset A$, para todo conjunto A . También se detecta la falta de mención de los conectivos lógicos (conjunción, disyunción, implicación, doble implicación), los cuales son usados implícitamente o explícitamente en las definiciones presentadas.

El contenido matemático “conjuntos y operaciones” se caracteriza por la profusión de nuevos términos, expresiones y notaciones cuyo uso debe ser regulado de manera precisa, lo que da lugar a otros tantos “conceptos-regla”. El sistema de objetos que se obtiene queda caracterizado por la estructura de álgebra de Boole, aspecto que no se trata en el documento analizado. Las propiedades de las operaciones conjuntistas son enunciadas en el contexto de un ejercicio y su “validación”, dejada a la responsabilidad del lector, queda limitada a una comprobación mediante ejemplos, sin presentar previamente un ejemplo sobre cómo realizar la comprobación de la igualdad de dos conjuntos.

Abundan también en el texto los ejemplos y ejercicios como “explicación” de las reglas que fijan el uso de los términos. Estos ejemplos no se presentan como justificación de la utilidad del lenguaje conjuntista como unificador de las distintas

ramas de las matemáticas, objetivo que no se puede lograr en este nivel educativo por las restricciones de tiempo y los conocimientos previos de los estudiantes. Sólo los ejemplos de modelización de situaciones realistas en las que se requiere determinar el cardinal de conjuntos o subconjuntos de objetos (personas) permiten mostrar a los estudiantes una potencial utilidad del lenguaje conjuntista. La modelización de estas situaciones-problemas requiere identificar en las situaciones las colecciones de objetos, las operaciones requeridas, su representación simbólica y la interpretación de los resultados de las operaciones efectuadas en el modelo en términos de la situación realista descrita.

REFERENCIAS

- Arrieche, M. y Godino, J. D. (2000). Grado y modo de estudio de una teoría matemática: Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros. Comunicación presentada en la *Reunión del Grupo DMDC-SIIDM. IV Simposio de la SEIEM*, Huelva. Recuperable en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/boletin11.htm>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 221-266.
- Godino, J. D. (2001). Análisis semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Versión revisada del trabajo presentado en la Reunión del Grupo *La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*. III Simposio de la SEIEM, Valladolid, Septiembre de 1999. Recuperable en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/semiotica.htm>
- Krause, E. (1991). *Mathematics for elementary teachers* (2nd ed.). Toronto: D.C.Heath. [Traducción parcial, E. de la Torre].